Teaching Statistics in Schools throughout the World, 1982, Edited by Vic Barnett

CHAPTER 3

Problems Raised by the Teaching of Probability Theory and Statistics in French Secondary Schools

P.L. HENNEQUIN IREM of CLERMONT-FERRAND, FRANCE

Although probability theory is now considered by mathematicians as belonging entirely to mathematics and although most subjects use it, its teaching in France is discredited in the eyes of most mathematics teachers. It is dealt with separately, if time is left or if it is required for an examination, and it is the first topic to be omitted in any syllabus reduction. The purpose of this report is an attempt to analyse the causes of this phenomenon and to make some propositions to remedy it, taking into account the work of the INRP (Institut National de la Recherche Pedagogique) group which was in operation from 1973 to 1978. See (2.B.O) and (2.C.O).*

We will examine successively the role played by probability theory and statistics in our society, in our culture and in our scientific activity; the specific problems presented by teaching these subjects; the lacks and aberrations of the present situation; the objectives of such teaching at the school level; the concepts to be elaborated and those to be introduced.

Finally, we examine a number of examples of such work, taken from the bibliography presented at the end of the report.

3.1 MOTIVATION

One of the characteristics of the development of our society is the *mass* of information collected and processed as well as the *speed* of social change. Nearly every country has a National Statistical Service whose purpose is to collect economic, food, medical, social data – and then to present them to the political representatives responsible for making the decisions. Depending on the political systems of the country these data either remain secret or, on the contrary, are broadcast to the general public by the mass media in a more or less clear (or distorted) and summarized form.

One can find in reference (6.2) a number of simplified examples in which the chosen mode of representation, often graphical, suggests an inappropriate interpretation to an uninformed reader. Ignorance of methods of calculation and of graphs used by statisticians is akin nowadays to illiteracy in years gone by.

* This chapter has an extensive classified and coded bibliography. References relate to the classification code rather than to author's name and date of publication which is the style adopted throughout the rest of the book.

Our need for safety leads us to resort throughout our lifetime to various *insurances*. The very principle of insurance dates from the XVIth century at least and the effective calculation of premiums paid in return for full cover is based on the evaluation of a mathematical expectation (expected value). To be able to choose an insurance policy implies a certain familiarity with random variation. We might also consider *games of chance*, and the economical importance of the most famous ones: in 'Tierce' (betting on horses) or in 'Loto' (similar to Bingo) the compulsive gambler's behaviour depends much more on irrational motivation than on a methodical knowledge of the law of large numbers or of the theory of martingales. Then again, a probability model is related to the idea of a *representative sample*, the basis of survey technique which is so widespread nowadays that it is difficult to find an economics, literary, scientific or popular weekly or daily paper, television or radio programme which does not quote in each of its copies or programmes at least one survey. In fact, *sample surveys* have become an essential technique for collecting information in view of the prohibitive cost of censuses and the speed with which changes occur in society. It seems that it is only French teachers who still ignore this topic.

Nowadays, scientific subjects make frequent use of statisical methods and probability models.

In *Physics*, long familiar (since Laplace among others) with the use of probability to represent errors of measurement, electronic signal and noise theories based on Gaussian processes have been developed whilst statistical mechanics of systems of particles uses the theory of point processes involving integrating probabilities in models as general as those of quantum field theory.

Chemistry uses probability models, for instance in the formation of some polymers.

Biology, after developing along with English biometricians the instruments of multivariate analysis which were to give birth to factor analysis, founded genetics on Mendel's model which has thrown much light on the phenomenon of heredity.

Population changes and *ecology* make use of Markov models which have been well mastered nowadays.

Medicine has for a long time faced the problem of drawing conclusions from a fixed-size sample of observations and systematically uses statistical inference in order to decide whether a treatment has a significant effect or whether a vaccine is effective. For patient after patient, a doctor has to formulate a diagnosis and in doing so can make use of the ideas of statistical decision theory in a random universe.

Economics has developed models of short- and long-term economic change involving a great number of random variables linked to individual decisions. The Club of Rome has popularized such models in drawing up various forecasting schemes. Each economics study requires a decision-maker to draw conclusions on the basis of various criteria – for example, maximisation of an expectation (expected value) or of a probability. (See Hennequin, 5.3).

The *Social Sciences* need to process a great number of qualitative variables

to which it is difficult to associate a measure. There are appropriate methods of data analysis (classification and factor analysis) allowing one to examine many factors at the same time, suggest structures and design more accurate experiments. (See 4.A.4 and 4.A.5).

Psychology systematically uses tests but to apply them to a given population requires standardisation, then successive re-standardisations, making use of statistical methods.

But the use of probability and of statistics in the contemporary world is not restricted to the information field or to the scientific field. The development of interdependent systems of greater and greater complexity poses problems in *transport* and in *communication* for which the mathematical models necessarily involve random sizes.

Computer *simulation* of these models enables one to test them, to examine their validity and plan future action. At a simplest level, the regular attendance of customers at a service unit leads to the notion of a *queue*. The theory of queues has been studied in depth in the literature but the simplest types of queueing system can be easily formalised and modelled.

Every factory plant which is at all complex in structure presents *control* problems; control of manufactured goods or control of production processes in order to optimise such or such criterion, and problems of reliability and safety. Modelling for such problems is now well developed and involves advanced mathematical techniques.

Finally let us note that the so-called *Monte Carlo methods* of calculation, involving expressing a quantity to be calculated in the form of an expectation, have permitted a rapid attainment of an idea of the size of the solution to problems to which the analytical solution was not accessible.

3.2 SPECIFIC PROBLEMS POSED BY TEACHING PROBABILITY AND STATISTICS

The theory of probability is more than just a branch of mathematics – it has its own vocabulary originating from the first problems it helped to resolve. Its development has often been given impulse by the needs of other subjects. Therefore it can only be taught in close connection with them. All the more so, statistical methods are justified by the validation tools they provide for other subjects. Being concerned with the measurement of experimental variables, statistics can be taught by a mathematician, by a specialist of each subject or even better by a team. And yet it must be noted that whilst physical- and natural-scientists might understand well the role of statistics in their subject the situation is not so satisfactory in the social sciences where the use of statistical methods is much more recent. But is this adequate reason for leaving our pupils in ignorance of the problems presented by sample surveys and collecting information or opinions?

A second characteristic is related to the concept of probability. From a frequentist point of view, an experiment is amenable to probabilistic study if it is reproductible a good many times. In fact, pupils rarely have, except perhaps in some simple games of chance, the opportunity of repeating the same experiment some dozens of times. The convergence of a relative frequency, because of its very slowness, can only be observed in long sequences. This can be remedied by computer simulation, where the empirical behaviour of frequencies can be observed and this seems to us essential to its understanding.

A third characteristic is to propose models for random situations. Because of the need to introduce independence assumptions, these models are sometimes too simple: realistic models need to be much more complicated; for instance, in order to represent the weather situation, during a year, in a given area, one must go from a series of independent variables to a Markov chain. (See 4.B.21)

But selecting a model, criticising its validity, rejecting it for another one, requires time and implies the possibility of making mistakes. This is the price one must pay for the use of probabilistic methods. Finally, is it reasonable to teach probability without statistics or statistics without probability?

3.3 CRITICISM OF THE PRESENT SITUATION

Figure 3.1 presents a diagrammatic representation of the French school system. At the present time the teaching of probability and statistics comes too late in the syllabuses. Its absence in the junior high school (i.e. for 10–14 year olds) is a serious lack and leads to unnecessary difficulties and phobias about statistics which hamper its teaching in the senior high schools (14–17 year olds). In principle there is no reason why some material could not be introduced in the junior high school using the existing programmes of study in the form of data analysis which would stimulate the use of mathematical tools (as well as the pupils) and encourage certain types of calculation to be carried out. With reference to this matter see the report (2.B.0) and the 23 notes (2.B.1 to 2.B.23). The teaching of statistics is often neglected in the 'premier': that is the year before the Baccalauréat examination. For want of time it remains fairly formal and is not connected with experimental subjects. Appendix I shows the official programmes of study presently in use in French secondary high schools together with explanatory comments written by the School Inspection Board. Baccalauréat subjects are published yearly, for example in 'MATH ANNALES', Editions CEDIC, 93 Avenue d'Italie, 75013 PARIS. Teaching probability without introducing statistics beforehand remains dogmatic and computational without pupils understanding the meaning or interpretation of the numbers they are calculating. For want of time again, no effort is spent on the critical study of a model or on the comparison between various models. The Baccalauréat examination exerts an excessive pressure. Parts removed from the syllabus of the examination (for example, the exclusion of the word 'independent' and associated concepts) have made it literally incoherent. Either the questions are fairly formal or at best they involve artificial situations such as drawing balls from urns. Situations of a real and concrete type are not considered and any proposed model is assumed inviolable provided further indications which are meant to help the candidate do not make it completely absurd. (See 2.C.0: § II).

Pupils' ages – years	Classes	Institutions
2–10		Elementary School
11 12 13 14	6^{th}, 5^{th} } observation 4^{th}, 3^{rd} } orientation	'Colleges' (Junior High Schools) or 1^{st} Cycle
15 16 17	2^{nd} 'Seconde' 1^{st} 'Première' 'Terminales'	'Lycées' (Senior High Schools) or 2^{nd} Cycle

Sections in Senior High Schools			
Label	Classical Sections	Label	Technical Sections
A	Humanities	F	Industry
B	Economics		
C	Pure Sciences	G	Commerce
D	Natural Sciences		
E	Technical Sciences	H	Computer-Science

Figure 3.1 French long-cycle education.

It is highly significant that the candidates for the 'agregation' (a competitive examination conducted by the state for admission to posts on the teaching staff of lycées and universities) as well as for the 'CAPES'* (certificate d'aptitude pedagogique d'enseignement secondaire) (similar to agregation but only for teaching staff of lycées), when they are given the choice, ignore papers in this subject.

It is appropriate to say something about the way in which curriculum development work in probability and statistics is carried on in France. Some small research groups have been working for some time at the secondary level, either set up by the Association of Mathematics Teachers (APMEP) or in the form of Research Institutes on the Teaching of Mathematics (IREM's).

Since 1973 these efforts have been coordinated by the National Institute of Pedagogic Research (INRP). In addition there are research groups in some universities. In particular the one at Clermont is concerned with developing theoretical and practical statistics. Typically, an IREM has a few full-time workers and is assisted by some secondary school teachers on a part-time

* The two state competitive examinations for selection of teachers. 'Agregation' is at the higher level.

basis. About ten IREM's are working in this way. Any teaching material which is produced is tried out in schools usually under the direction of the teacher members of the IREM. Rather than trying to produce a coordinated syllabus in probability or statistics the IREM's are producing special-topic teaching units which can be incorporated into a variety of courses e.g. biology, social science, mathematics, etc. depending on content. A major aim is to ensure that pupils encounter real-life examples of indeterministic situations rather than merely examining the formal details of the subject.

Some IREM's, as mentioned in the bibliography, have monitored groups of pupils working on simulation exercises but more training of teachers is needed before they will feel at ease in such work.

3.4 SUGGESTIONS FOR FUTURE DEVELOPMENTS

Appendix II presents the new official programmes for first year classes at senior high school, which will commence in September 1981. The new programmes for the other two classes of senior high school are under development.

3.4.1 *Concepts and their levels of study*

Let us now examine a range of concepts, which together *might* constitute a coherent whole enabling one to handle the most elementary problems. Let us state precisely here that the objective is to teach a certain facility in manipulating simple models on finite probability spaces, and to provide experimental acquaintance with more general situations but without the introduction of any general theory of measure or integration. (See 2.B.0 to 2.B.23).

1. *Statistical series* (Senior high schools, first year)
   - *Data* (taken from the pupil's environment)
   - *Tables of data*, periodical reports, answers to a survey.
   - Data manipulation, graphical representation.
   - *Groups* – comparison of groups. Frequency.
   - Study of various examples in which the set E in which the *character* takes its values is without structure and totally ordered ($\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$).
   - *Histogram* of frequencies – comparison of histograms.
   - Selection of a central measure (*mode*, *median*, *mean*) as a function of the structure of E.
   - For the case where E is totally ordered; the distribution function. Change from the histogram to the distribution function and vice-versa.
   - In the case $E = \mathbb{R}^2$, *cluster of points*, *middle point* of the cluster.
2. *Observation of random phenoma* (Second and final years)
   - We go back to the concepts introduced for the study of a set of data in a context involving chance.
   - Use of randomising devices such as – roulettes, urns, dice, results of series of trials.
   - Use of a calculator in order to generate 'pseudo-random' series. Study of the obtained result. (6.5) (6.7)

   - Repetition of the same experiment: by hand on a calculator, and possibly on a computer. Heuristic approach to the law of large numbers. (film projection) (9.A.11) (9.B.4)
   - Sequence of experiments – random processes. Experimental estimation of probabilities by relative frequencies. Heuristic introduction to probability and conditional probability. (6.3.3, chapter 6) (4.B.13) (6.3.1)
3. *Probabilistic concepts* (Final year, scientific sections)

Preliminary notice. There are at least five more or less different methods of introducing these concepts and the teacher must be able to select the one which seems the most suitable to his pupils' knowledge, to their experience of statistics and of random phenomena, to their motivation and to the progress of mathematical activity of the class.

1st method (The most abstract, the method existing in present curricula and therefore in most French school-books.)

We introduce first a finite set Ω of *outcomes* or *trials*, then a sub-family A of parts of Ω closed with respect to the operations C (complementation) $\cup$ and $\cap$, the elements of which are called *events*. Then a probability is a positive function additive on A, such that $P(\Omega) = 1$ and a *real random variable* is a mapping X from Ω to $\mathbb{R}$ such that, $\forall x \in \mathbb{R}, X^{-1}(\{X\}) \in A$.

2nd method (See 4.A.2)

From the observation of situations involving chance, one can bring out the notion of *event*, then the relation of implication and the operations (and, or, inverse) on the assumed finite set A of events related to an experiment. Among these events are the *elementary events* which are indivisible, and the null event. A is isomorphic to the set $P(\Omega)$ of members of the set Ω of elementary events; this isomorphism builds up a correspondence between probabilistic language and the language of sets. Then the process is the same as that in the 1st method.

3rd method (See 2.C.0)

The Ω set is finite or infinite; at first we will not try to state its elements (in fact a similar experiment can be modelled through a great number of sets Ω).

For a finite *partition* of Ω:

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} A_i, \text{ there are numbers } p_i \text{ such that}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \text{ and we put } p(A_i) = p_i \text{ and } P(\sum_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} p_i .$$

The study of a situation usually leads to the introduction of finer and finer partitions in order to model the successive drawings. One could, *a posteriori*, select for Ω the set of elements of the finest introduced partition (which amounts to assuming that each of the elements in this finest partition has been reduced to a point). Random variables are then mappings from Ω to $\mathbb{R}$.

4th method (See 4.B.28)

This in fact the most economical method for the solution of a great majority of Baccalauréat 'exercises' (See 2.C.0, pp. 23–29). The observation of games of chance (tossing coins, throwing dice, use of loto, cards, lotteries, roulettes, pseudo-random series on a calculator) leads to an equiprobable model. If the set Ω of outcomes has cardinality n, each point of Ω has probability $\frac{1}{n}$ and for every $A \in \Omega$, $P(A) = \frac{\text{Card } A}{n}$ (termed 'random'). Combinations of games which are independent (or have Markov dependence) can also be studied by means of an equiprobable model.

Probabilities are calculated by counting sets using the rules of combinatorial analysis. From an experimental point of view (approximating a real number by a rational number with a quite large denominator) this model is adequate in all the situations in which the number of outcomes is finite. Obviously in such situations probabilities have rational values. In fact it is the general application of this model (uniform measure on an interval) which will lead later to the introduction of 'real' probabilities but then the set of measurable partitions will have to be restricted to a suitable sub-family. (See 4.A.3, p. 183).

5th method (The most natural for pupils who are already familiar with data before any introduction to probabilities.)

The study of tables and of statistical series leads to the introduction, first of all, of the idea of a *real random variable*. A real random variable X related to an experiment E takes a real value each time this experiment is carried out. If the set of values taken by X is finite, we can define *the distribution of* X as

$$\{x_i, p_i, l \leqslant i \leqslant n\} \text{ with } p_i > 0, \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

with the x_i distinct real numbers (in practice, the p_i are evaluated by the observation of long enough series of realizations of E).

Then we define the *expectation* of X, $EX = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ then its *distribution function*

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i .$$

Given a function f from $\mathbb{R}$ to $\mathbb{R}$, $f(X)$ is a random variable with expectation

$$\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i).$$

In the same way we study pairs of real random variables (X, Y) and their distribution $\{(x_i, y_j), p_{ij}\}$ to which we associate *marginal distributions* $\{x_i, p_{i.}\}$ and $\{y_j, p_{.j}\}$ with $p_{i.} = \sum_j p_{ij}$ and $p_{.j} = \sum_i p_{ij}$. X and Y are *independent* if $p_{ij} = p_{i.}\, p_{.j}$. The distribution of the pair (X, Y) can also be defined in terms of $\{p_{i.}\}$ and the transition probabilities

$$p_i^j = \frac{p_{ij}}{p_{i.}} .$$

The study of the particular case of random variables with values in (0,1) brings us to the notion of events and probabilities. In the end we can associate a function of Ω in $\mathbb{R}$ to a random variable. Any of the 5 methods therefore will allow one to introduce the concepts of *events*, of *probability*, of *finite probability space*, of *uniform probability*. One can develop probability models for games and situations which have already been explained in earlier classes.

The following concepts will be introduced in an order corresponding to the selected method:

Conditional probability of an event with respect to an event of non-null probability.

Independent events. Various examples taken from genetics, series of experiments, random walks, insurance, reliability will put the stress on the fact that, often in practice, probability modelling requires *repeated partitioning*. Calculation of the probability of an event by the rule of the combination of probabilities.

Real random variables. The distribution or probability law for one variable.

Mathematical expectation. The mathematical expectation of the size of a variable chosen at random in a population is but the mean of this variable in the population. *Linearity* of the mathematical expectation. Mathematical expectation of the product of two *independent random variables*. Repetition of experiments. *Bernoulli sampling*; number s_n of successes in n trials.

Binomial law. Use of tables for the binomial distribution. Construction of the histogram and of the distribution function for various values of n. Experimental study of the estimation of the probability of success by $\frac{s_n}{n}$. Application to surveys. Films about the binomial law for many values of n (or studies on the computer using graph-plotters or visual display units).

3.4.2 *Examples of activities*

The examples should be selected as far as possible in subject areas being studied by the pupils but not exclusively so for the same mathematical model can be applied in different situations.

In the list below, the code indicated in brackets shows the class sections* in which a particularly appropriate activity could be developed and in square brackets references are given to the Bibliography in which one will find other examples.

* A Humanities	D Natural Sciences	G Commerce
B Economics	E Technical Sciences	H Computer-Science
C Pure Sciences	F Industry	

History of Probability (A) – [8.A.3]
Pascal, Fermat, Huygens, Bernoulli [3.P.2] [8.B.1] [8.B.4] [8.B.7] [8.B.8]
Gauss and Laplace and the bell-shaped curve [8.B.3] [8.B.5]
Poisson and miscarriages of justice [8.B.9]
Determinism and chance in physics and biology [6.1.1] [6.1.2] [6.6]
1925–1950 period (Khintchine, Kolmogorov, Levy) [8.A.2]
History of Statistics (A,D) – [8.A.1]
Censuses in ancient times.
English biometricians.
The advent of computers and data analysis.
Chance and artistic composition (A) – [6.9]
In music.
In painting.
In architecture.
Statistics and literature (A)
Frequency of different letters in a text. | [3.P.3;]. [7.1(b); p.1, p. 81.]
Frequency of words. | [7.1(d); p. 74]
Studying an author. | [7.2; p. 164.]
Statistics and sport (all sections)
Sporting performances. | [2.B.7] [2.B.9] [2.B.17]
Organization of championships and cup finals. | [4.B.8] [7.1(a)] [7.2]
Road Traffic (all sections)
Simulation of traffic on a dual carriage-way [4.B.13]
Selection of an optimum route in town [3.L.1]
Random walks (H) [3.L.1] [6.4] [6.3.2]
Walks on a square lattice and Pascal's triangle.
Walks on part of a line.
Return to the origin.
Economic indicators (B, G) [4.A.1] [6.2] [7.2; p. 266]
Changes in the level of an index.
Comparison between cost of living in different places.
Time series (B, G) – [7.1(b); p. 113]
Fluctuations in price levels.
Weather reports [2.B.1] [2.B.2] [7.2; p. 354]
Queues (all sections)
At a pay desk or booking office.
In a telephone exchange [9.A.3]
Population growth (D) [7.1(d); p. 41]
Competition between two populations.
Epidemics [4.B.13] [7.2; p. 66]
Training and instruction.
Polya's urn [9.B.6]
Process control in manufacturing industry (E, F) [4.A.3; p. 145] [7.1 (c);p. 63]
Reliability (E, F)
Mortality tables and life assurance (B)
Errors of measurement (C, D) [2.B.14] [7.1 (c); p. 141]
Probability and genetics (D) [2.C.0] [6.3.2; Chap. 7]
Phenotypes and genotypes.

Study of the genetic evolution of a population.
Classical problems (all sections)
de Mévé's problem [3.P.2]
Gambler's ruin.
Banach's box of matches [4.B.23] [4.B.24]
Waiting time for a succes in a Bernoulli sequence.
The collector's problem [4.B.25] [4.B.26]
Graphical techniques (all sections) [7.1(a); p. 33]
Binomial families [9.A.15]
The Poisson approximation.
Laplace's approximation.

3.4.3 *Themes to be introduced in examples without detailed theoretical study*

Simulation work on pocket calculators (all sections)
[3.L.3] [3.S.1] [4.B.13] [6.3.3] [6.5] [6.7]
Pseudo-random sequences.
Finite Markov chains.
Possible use of a graph plotter.
Fitting straight lines
Fitting a linear model to a set of experimental points.
Least squares.
Linear regression.
Pascal's law
Waiting time and stopping time [6.3.2]
The Poisson Distribution (E, F, G, H) [6.3.1 p. 255] [7.1 (d) p. 63]
Customers arriving at a petrol station.
Point distributions on a straight line and in the plane.
The Exponential Distribution.
Service time and waiting time.
Memoryless processes.
The Normal Distribution (D) [6.3.1]
The binomial approximation.
Use of tables.
Inequalities of variability
Variance.
The Cauchy-Schwarz inequality.
The Bienaymé equality.
The Tchebycheff inequalities.
The weak law of large numbers.
Use of the χ^2 test
As a test of goodness-of-fit.
As a test of independence.

3.5 CONCLUSIONS

Much remains to be done before French education can play its part in the teaching of statistics. The experiments which have been carried out, mainly organised by the IREM's, have shown not only what is possible at different levels but also the obstacles which have to be overcome.

It is to be hoped that the new secondary curricula will have a much larger place for statistical activities and inter-disciplinary studies. Such subjects remain to be introduced, as is a familiarity with stochastic phenomena at an early stage, even at the elementary school level.

In particular, there is much to be done in teacher training and the production of teaching material showing the role of statistics. In constructing examples take from a wide range of disciplines or describing statistical modelling and simulation in the classroom the IREM's are ready to take part if they are given the means.

APPENDIX I *Programmes et commentaires officiels en vigueur depuis 1972*

A CLASSES DE PREMIÈRE

1. *Sections classiques*

Programme de A, B, C, E

STATISTIQUE ET PROBABILITÉS

1° Description statistique d'une population ou d'un échantillon.
Documents statistiques; représentations graphiques.
Effectifs, fréquences.

2° Espaces probabilisés finis $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$.
Exemples (dés, pipés ou non, cartes, urnes).
Variable aléatoire numérique; événements liés à une variable aléatoire X (par exemple X = donné; X < a donné).
Fonction de répartition, croissance.
Distribution dans R. Distribution binômiale.

Programme de D

1° Description statistique d'une population ou d'un échantillon.
Documents statistiques; représentations graphiques.
Effectifs, fréquences.

2° Espaces probabilisés finis $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$.
Exemples (dés, pipés ou non, cartes, urnes).

Commentaires officiels

Le programme est le même dans les sections A, B, C, E; paradoxalement, et pour une raison d'équilibre entre les disciplines, il a dû être allégé en section D, mais la compensation se fera en section terminale D par rapport aux sections C et E.

§ 1. *Statistique*

Les professeurs peuvent traiter la statistique et les probabilités dans l'ordre de leur choix. L'expérience de cet enseignement, introduit depuis 1962 d'abord en section « Economie » (alors T′), a montré qu'il y a avantage à commencer par une étude statistique descriptive de niveau modeste.

Le mot de *moyenne* est d'usage courant; on pourra faire connaître ceux de *médiane* et de *dominante*. Des exercices pratiques, peu nombreux mais bien choisis, montreront comment sont enregistrés et groupés les résultats d'une enquête statistique et feront construire un histogramme, une courbe cumulative, un polygone des fréquences cumulées.

Ont disparu du programme les notions d'ajustement linéaire, de série chronologique, de corrélation, ainsi que tout ce qui concerne la dispersion, mais des exercices adaptés prépareront aux besoins de l'enseignement des sciences économiques et naturelles.

Dans ces conditions, le paragraphe relatif aux probabilités ne consiste pas à réunir et à résumer des expériences nombreuses sur certains faits, mais bien à bâtir une théorie axiomatique assez souple pour servir ultérieurement de *modèle* mathématique aux études statistiques.

A cette intention, on pourra faire comprendre que la notion de fréquence apparaît comme une approche de la notion de probabilité; analogie entre histogrammes et probabilités, entre courbes cumulatives et fonctions de répartition, . . .

§ 2. *Probabilités*

On examinera la correspondance entre les terminologies ensembliste et probabiliste.

On se limite en Première à l'étude d'un espace probabilisé *fini* formé d'un ensemble fini Ω et d'une probabilité p, celle-ci étant une application de l'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ des parties de Ω dans l'intervalle $[0, 1]$ des réels, telle que $p(\Omega) = 1$, et telle que, quels que soient les sous-ensembles A et B disjoints de $\Omega : p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})$.

Un événement est une partie de Ω; un événement élémentaire est une partie de Ω réduite à un seul élément.

Ω est appelé l'événement certain; la partie vide de Ω, $\emptyset$, est appelée l'événement impossible; ces définitions sont indépendantes de toute probabilité p.

La probabilité p est connue si, $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ étant les éléments de Ω, on connaît les probabilités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ des événements élémentaires

$$\{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \ldots \{\omega_n\}, \alpha_i = p(\{\omega_i\}), \alpha_i \geqslant 0, \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots \alpha_n = 1.$$

Si, pour une probabilité ainsi donnée, l'un des nombres α_i est nul, l'événement $\emptyset$ n'est pas le seul à avoir pour probabilité zéro et l'événement Ω n'est pas le seul à avoir pour probabilité un.

Deux événements contraires sont deux parties complémentaires A et $\overline{\mathrm{A}}$ de Ω. $p(\mathrm{A}) + p(\overline{\mathrm{A}}) = 1$; en particulier $p(\emptyset) = 0$.

L'événement « A ou B » est la reunion $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

L'événement « A et B » est l'intersection $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.

Deux événements sont incompatibles si l'événement « A et B » est impossible, c'est-à-dire si $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset$.

On démontrera que

$$\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \Rightarrow p(\mathrm{A}) \leqslant p(\mathrm{B}),$$
$$p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B}) = p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) + p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}).$$

Les mots *dés, cartes, urnes*, présentent simplement un matériel et non des

jeux; mention est faite de dés pipés (cartes biseautées, urnes truquées) pour convaincre que l'équiprobabilité ne se présume jamais; si on la suppose, on doit le dire; l'expression « au hasard » masque trop souvent une hypothèse d'équiprobabilité qu'il convient toujours d'expliciter.

Si, par hypothèse, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots \alpha_n$, alors $\alpha_i = \dfrac{1}{n}$ et $p(\mathrm{A}) = \dfrac{\mathrm{card}\ \mathrm{A}}{n}$.

Ont été exclues les locutions anciennes de probabilités *simples, totales, composées*. Sont hors du programme de Première la notion d'indépendance de deux événements relativement à une probabilité, la notion de probabilité conditionnelle relative á un événement de probabilité non nulle; il est des exercices qui feraient intervenir ces notions et que l'on peut pourtant traiter en Première, il convient alors pour chacun d'eux, non pas d'appliquer un théorème général, mais de faire un changement explicite de l'espace probabilisé Ω.

Variable aléatoire numérique. — Etant donné un espace probabilisé fini $[\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p]$, on appelle variable aléatoire numérique X (ou aléa numérique) toute application de Ω dans $\mathbb{R}$:

$$\omega_i \in \Omega, \mathrm{X} : \omega_i \to \mathrm{X}(\omega_i), \mathrm{X}(\omega_i) \in \mathbb{R}$$

L'image $\mathrm{X}(\Omega)$ de Ω par X est formée des valeurs:

$$\mathrm{X}(\omega_1), \mathrm{X}(\omega_2), \ldots \mathrm{X}(\omega_n), \omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n \text{ étant les } n \text{ éléments de } \Omega.$$

Les valeurs $\mathrm{X}(\omega_i)$ peuvent être distinctes ou non, leur ensemble peut se noter $\mathrm{X}(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots x_k\}, (x_h < x_{h+1})$. x_i étant un élément de $\mathrm{X}(\Omega)$, on désignera par A_i l'ensemble des éléments ω de Ω tels que $\mathrm{X}(\omega) = x_i$. D'après la convention faite ci-dessus, si $i \neq j$, A_i et A_j sont disjoints, l'ensemble des A_i est une partition de Ω.

D'une façon générale, a étant un réel, on note par abus d'écriture $\mathrm{X} = a$ (resp. $\mathrm{X} < a$) l'ensemble, éventuellement vide, des éléments de Ω tels que $\mathrm{X}(\omega) = a$ (resp. $\mathrm{X}(\omega) < a$). Puisqu'alors $\mathrm{X} = a$ (resp. $\mathrm{X} < a$) désigne un événement de l'espace probabilisé donné, $p(\mathrm{X} = a)$ [resp. $p(\mathrm{X} < a)$] se trouve défini.

On fera comprendre qu'une variable aléatoire transporte ainsi la probabilité p définie sur Ω sur une probabilité p' définie sur $\mathrm{X}(\Omega)$, ou sur une partie finie Ω' de $\mathbb{R}$ contenant $\mathrm{X}(\Omega)$, par la formule $p'(\{a\}) = p(\mathrm{X} = a)$, $[(\mathrm{X} = a)$ n'est pas forcément un événement dans Ω', seul $\{a\}$ l'est].

Fonction de répartition. — D'après une convention généralement adoptée, la fonction de répartition de la variable aléatoire X est la fonction numérique F définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{F}(x) = p(\mathrm{X} < x), x \in \mathbb{R}$.

Le programme ne traitant que d'un espace probabilisé fini, on se bornera à montrer que, dans ce cas, F est une fonction croissante, continue à gauche en tout point, en escalier, et telle que:

$$\mathrm{F}(x) = 0 \text{ sur }]-\infty, x_1], \mathrm{F}(x) = 1 \text{ sur }]x_k, +\infty[.$$

La fonction numérique f telle que $f(x) = p(X = x)$ est appelée parfois la loi de probabilité de la variable aléatoire X, ou distribution; cette distribution pourra être présentée sous la forme d'un tableau (x_i, p_i).

Le seule exemple proposé de distribution est la distribution binômiale de paramètre p; on suppose $0 < p < 1$, on pose $q = 1 - p$; cette distribution est définie par $x_k = k (k = 0, 1, 2, \ldots n)$, $a_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$. Pour démontrer que $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, on pourra utiliser la formule du binôme.

2 *Programmes des sections de Techniciens* (G et H)
[Anoter: l'absence totale de statistique et de calcul des probabilités dans les sections F (industrielles)]

1ère G

STATISTIQUE

1° *Description statistique d'une population ou d'un échantillon.*
Documents statistiques; représentations graphiques diverses.
Effectifs, fréquences.
2° *Série statistique.*
Caractéristiques de valeur centrale: mode, médiane, moyennes.
Caractéristiques de dispersion: quantiles, variance (fluctuation), écart type.
Les indices de la vie économique: indices simples, indice synthétique; leur confection, leur utilisation.

1ère H

STATISTIQUE ET PROBABILITÉS

1° *Description statistique d'une population ou d'un échantillon.*
Documents statistiques; représentations graphiques diverses.
Effectifs, fréquences.
2° *Série statistique.*
Caractéristiques de valeur centrale: mode, médiane, moyennes.
Caractéristiques de dispersion: quantiles, variance (fluctuation), écart type.
Les indices de la vie économique: indices simples, indice synthétique; leur confection, leur utilisation.
3° *Espaces probabilisés finis.*
Variable aléatoire numérique, fonction de répartition. Distribution dans R. Distribution binomiale.

B CLASSES TERMINALES

1. *Sections classiques*

Programme de Terminale A (facultatif)

CALCUL DES PROBABILITÉS

Espaces probabilisés finis $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$. Exemples (dés, pipés ou non, cartes, urnes, . . .)

Variable aléatoire numérique; événements liés à une variable aléatoire X (par exemple, parties de Ω telles que $X(\omega) = a$, ou $X(m) < a$ pour a donné); densité discrète; fonction de répartition, croissance; espérance mathématique (ou valeur moyenne) et variance d'une variable aléatoire.

Probabilité conditionnelle d'un événement par rapport à un événement de probabilité non nulle. Evénements indépendants.

Produits d'espaces probabilisés finis; exemples.

Programme de Terminale B

IV. STATISTIQUES ET PROBABILITÉS

Révision du programme de Première B.

Programme de Terminales C et E

VIII. PROBABILITÉS SUR UN ENSEMBLE FINI

1. Espaces probabilisés finis $(\Omega, \mathscr{B}, p)$.

Applications mesurables (ou variables aléatoires); probabilité, image, fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

Couple de variables aléatoires réelles, loi du couple. Lois marginales. Couple indépendant. Système de n variables aléatoires indépendantes.

2. Espérance mathématique d'une variable aléatoire à valuers dans R ou R^2.

Espérance mathématique de la somme des deux variables aléatoires réelles d'un couple, du produit dans le cas d'un couple indépendant.

Variance, écart type d'une variable aléatoire réelle.

3. Inégalité de Bienaymé-Tschebycheff. Epreuves répétées; loi faible des grands nombres.

Programme de Terminale D

VI. PROBABILITÉS SUR UN ENSEMBLE FINI; STATISTIQUE

1. Espaces probabilisés finis $(\Omega, \mathscr{B}, p)$.

Applications mesurables (ou variables aléatoires); probabilité, image, fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

Couple de variables aléatoires réelles, loi du couple. Lois marginales.

Couple indépendant. Système de n variables aléatoires indépendantes.

2. Espérance mathématique d'une variable aléatoire à valeurs dans R ou R^2.

Espérance mathématique de la somme des deux variables aléatoires réelles d'un couple, du produit dans le cas d'un couple indépendant.

Variance, écart type d'une variable aléatoire réelle.

3. Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff. Epreuves répétées; loi faible des grands nombres.

4. Description statistique d'une population ou d'un échantillon (révision du programme de statistique de Première D, titre VII, 1); exercices pratiques sur ce programme: calcul de coefficients de corrélation observés.

Commentaires officiels Terminale C

VIII. PROBABILITÉS SUR UN ENSEMBLE FINI

§ 1. On a défini en Première des espaces probabilisés finis dans lesquels, Ω étant l'ensemble fondamental, toute partie de Ω est un événement.

Il existe des sous-ensembles non vides $\mathscr{B}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ tels que le complémentaire dans Ω de tout élément de $\mathscr{B}$ appartienne à $\mathscr{B}$, ainsi que la réunion de deux éléments quelconques de $\mathscr{B}$; le couple $(\Omega, \mathscr{B})$ est dit un *espace probabilisable*. Ω et $\emptyset$ sont donc éléments de $\mathscr{B}$.

On dit que p est une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{B})$ si p est une application de dans $\mathbb{R}_+$ telle que: $p(\Omega) = 1$,

$\forall (B_1, B_2) \in \mathscr{B} \times \mathscr{B},\ B_1 \cap B_2 = \emptyset \Rightarrow p(B_1 \cup B_2) = p(B_1) + p(B_2)$.

Il en résulte la formule:

$\forall (B_1, B_2) \in \mathscr{B} \times \mathscr{B},\ p(B_1 \cup B_2) = p(B_1) + p(B_2) - p(B_1 \cap B_2)$.

Le triplet $(\Omega, \mathscr{B}, p)$ est dit un *espace probabilisé*.

Une application mesurable (ou variable aléatoire) de $(\Omega, \mathscr{B}, p)$ dans un espace probabilisable fini $(\Omega', \mathscr{B}')$ est une application φ de Ω dans Ω', telle que pour tout élément $B' \in \mathscr{B}'$ l'ensemble $\varphi^{-1}(B')$ est un élément de $\mathscr{B}$; si l'on pose alors $p'(B') = p[\varphi^{-1}(B')]$, le triplet $(\Omega', \mathscr{B}, p')$ est un espace probabilisé fini; on dit que p' est la probabilité-image par l'application φ.

Ces définitions seront illustrées d'exemples.

Pour introduire une variable aléatoire réelle, il est nécessaire d'associer à l'ensemble infini $\mathbb{R}$ un ensemble $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ de parties B de $\mathbb{R}$; B est élément de $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ si et seulement si B est la réunion d'un nombre fini d'intervalles de $\mathbb{R}$. La famille $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ a les propriétés de la famille $\mathscr{B}$ évoquée plus haut à propos de Ω.

On introduira de même une famille $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^2}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$.

Une variable aléatoire *réelle* (appelée parfois aléa numérique) est alors une application mesurable φ de $(\Omega, \mathscr{B}, p)$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$.

La fonction de répartition F de la variable aléatoire réelle φ est donnée par $F(x) = p[\varphi^{-1}(]-\infty, x[)]$.

Un *couple* de variables aléatoires réelles et une application mesurable φ de $(\Omega, \mathscr{B}, p)$ dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^2})$; la loi du couple est la loi p' définie par:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2\ p'[\{(x, y)\}] = p'[\varphi^{-1}(\{(x, y)\})].$$

Le programme supposant Ω fini, $p'[\{(x, y)\}]$ n'est non nul que pour un nombre fini de couples (u_i, v_j).

Loi marginale. – Soit φ un couple de variables aléatoires réelles. La première loi de probabilité marginale est la loi p_1 de la première composante de φ:

$$B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}},\ p_1(B) = p[\varphi^{-1}(B \times \mathbb{R})];$$

$p_1(\{x\}) = p[\varphi^{-1}(\{x\} \times \mathbb{R})]$ n'est non nul que si x est l'un des nombres u_i.

On définit de même la seconde loi marginale p_2. En général, on n'a pas, pour tout couple (x, y) de réels,

$p'[\{(x, y)\{] = p_1(\{x\}) \cdot p_2(\{y\})$; quand ce fait se produit, les deux variables sont dites *indépendantes*.

Ces définitions se généralisent à un système de n variables aléatoires.

§ 2. L'espérance mathématique E(X) d'une variable aléatoire X à valeurs $u_1, u_2 \ldots u_k$ dans $\mathbb{R}$ est, par définition, le nombre

$$\sum_{h=1}^{k} u_h\, p(u_h)$$

L'ensemble des variables aléatoires sur l'espace probabilisé fini est un espace vectoriel; l'application qui, à toute variable aléatoire X associe son espérance mathématique est une forme linéaire sur cet espace vectoriel; en particulier, X_1 et X_2 étant deux variables aléatoires réelles, on a:

$$E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2).$$

On démontrera que si X_1 et X_2 sont indépendantes, l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X_1 X_2$ est $E(X_1) \cdot E(X_2)$.

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire à valeurs (u_i, v_j) dans $\mathbb{R}^2$ est, par définition, le couple:

$$\left(\sum_{(i,j)} u_i\, p'(u_i, v_j),\ \sum_{(i,j)} v_j\, p'(u_i, v_j) \right);$$

on y reconnaît encore une application linéaire et aussi un barycentre.

La variance d'une variable aléatoire réelle X est donnée par $v(X) = E[X - E(X)]^2$; on démontrera qu'elle est égale à $E(X^2) - E^2(X)$. Par définition, l'écart-type est $\sigma(X) = \sqrt{v}(X)$.

L'inégalité de Bienaymé-Tchébicheff indique que, si une variable aléatoire X a une espérance mathématique a et un écart-type σ, alors

$$p(\{\frac{X - a}{\sigma} \geqslant \alpha\}) \leqslant \frac{1}{\alpha^2}.$$

On appliquera particulièrement cette inégalité au cas où une expérience est répétée n fois. On constate que, dans un grand nombre de situations concrètes, les résultats d'expériences successives sont sans influence les uns sur les autres. On traduit cette constatation en postulant l'indépendance des variables aléatoires correspondantes, indépendance qui s'exprime dans le produit $\Omega' = \Omega^n$.

Sur Ω', la probabilité de l'événement $(x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n)$ est le produit des probabilités $p(a_1) \ldots p(a_n)$; l'inégalité de Bienaymé-Tchébicheff donnera la « loi faible des grands nombres », qui établit un premier lien avec la statistique:

$X_1, X_2, \ldots X_n$ étant des variables aléatoires indépendantes, de même loi et d'espérance mathématique commune a,

$Y_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ est une variable aléatoire telle que, pour tout réel strictement positif ϵ,

$$\lim_{n \to \infty} p(\{ |Y_n - a| \geqslant \epsilon \}) = 0 .$$

Terminale A

CALCUL DES PROBABILITÉS
(Programme complémentaire)

Le programme fait revenir d'abord sur le programme de Première A, ce retour concerne seulement les probabilités et non la statistique.

La terminologie adoptée n'est pas exactement celle des sections scientifiques; il convient de préciser qu'on appelle ici *densité discrète* de la variable aléatoire X en a, la probabilité de l'événement $X = a$.

On introduit l'espérance mathématique de la variable X; si les valeurs qu'elle prend sont $a_1, a_2, \ldots a_k$, l'espérance mathématique de X est le nombre $m = E(X) = \sum_i a_i p_i$ où p_i désigne la densité discrète de X en a_i.

De même, la variance de X est le nombre $v(X) = \sum_i (a_i - m)^2 \, p_i$; on démontrera que: $v(X) = \sum_i a_i^2 \, p_i - m^2$.

A étant un événement de probabilité non nulle, on démontrera que l'application qui à toute partie B de l'ensemble fondamental Ω associe

$p'(B) = \dfrac{p(B \cap A)}{p(A)}$ est une probabilité; $p'(B)$ est, par définition, la probabilité conditionnelle de B relativement à A.

Par définition, deux événements A et B sont indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$.

Etant donnés plusieurs espaces probabilisés finis, par exemple trois espaces $(\Omega_1, \mathscr{P}(\Omega_1), p_1)$, $(\Omega_2, \mathscr{P}(\Omega_2), p_2)$, $(\Omega_3, \mathscr{P}(\Omega_3), p_3)$, on peut définir sur $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \Omega_3$ une probabilité p et une seule, telle que la probabilité élémentaire d'un triplet d'événements élémentaires respectifs de Ω_1, Ω_2, Ω_3

soit le produit des probabilités élémentaires de chacun d'eux; il en résulte que:

$$\forall \omega_1 \in \Omega_1, \forall \omega_2 \in \Omega_2, \forall \omega_3 \in \Omega_3,$$
$$p(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = p_1(\omega_1) \cdot p_2(\omega_2) \cdot p_3(\omega_3);$$

le triplet $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ est appelé l'espace probabilisé produit.

On remarquera que, étant donné un espace probabilisé:

$$\mathscr{E} = (\Omega_1 \times \Omega_2, \mathscr{P}(\Omega_1 \times \Omega_2), p)$$

il n'existe pas en général de probabilités p_1 et p_2 telles que $\mathscr{E}$ soit le produit des espaces probabilisés:

$$\mathscr{E}_1 = (\Omega_1, \mathscr{P}(\Omega_1), p_1) \text{ et } \mathscr{E}_2 = (\Omega_2, \mathscr{P}(\Omega_2), p_2).$$

Terminale D

VI. PROBABILITÉS SUR UN ENSEMBLE FINI

§ 1. En Première D, les élèves ont reçu une première initiation à la description statistique d'une population, ils ont vu également les définitions relatives aux espaces probabilisés finis $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$.

Mais le programme de Première D ne comprend pas, comme le fait celui de Première C, la définition d'une variable aléatoire numérique sur $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), p)$ et celle de sa fonction de répartition. On sera donc amené à introduire de manière beaucoup plus progressive qu'en Terminale C, et en l'entourant de très nombreux exemples, cette notion fondamentale de variable aléatoire.

§ 4. Ce paragraphe consacré à la statistique est propre à la classe Terminale D, il est destiné à compléter par une description plus quantitative d'une population la description presque exclusivement qualitative faite en Première D; on l'exprimera avec un langage et avec des notations qui feront le lien entre statistique et probabilités.

Soit P une population de N individus; supposons qu'un caractère observé soit précisé par un nombre x; soit $x_1, x_2, \ldots x_h$ la suite (croissante) des valeurs prises par x, la valeur x_i étant prise par n_i éléments de P $(\Sigma n_i = N)$. On appelle fréquence de x_i le nombre $f_i = \frac{n_i}{N}$ $(\Sigma f_i = 1)$; le nombre $\bar{x} = \frac{1}{N} \Sigma n_i x_i = \Sigma f_i x_i$ est la *moyenne* des x. Il est souvent commode, pour le calcul pratique de $\bar{x}$, de faire un changement de variable $x' = ax + b$, alors on a $\bar{x}' = a\bar{x} + b$.

On appelle fonction cumulative, ou (fonction de répartition) la fonction croissante F donnée par $F(t) = \sum_{x_i < t} f_i$; elle est nulle sur $]-\infty, x_1]$, égale à 1 sur $]x_h, +\infty[$.

La répartition des valeurs prises par x est, bien entendu, impossible à résumer par le seul nombre $\bar{x}$, ou par toute autre valeur *centrale* telle que le nombre m défini par $F(m) = \frac{1}{2}$ et appelé *médiane*; seule la fonction F donne cette répartition.

On peut alors définir des nombres permettant d'indiquer la *dispersion* des valeurs prises par x par rapport à $\bar{x}$; c'est ainsi qu'on utilise parfois les quartiles q et q', définis par $F(q) = \frac{1}{4}$ et $F(q') = \frac{3}{4}$ dont le nom et la définition n'ont pas à être sus des candidats au baccalauréat; mais le nombre qui se prête le mieux à un traitement mathématique est la variance empirique v_x définie par:

$$v_x = \sum_i f_i (x_i - \bar{x})^2 \; ; \; \sigma = \sqrt{v_x} \text{ est dit écart type.}$$

On calcule pratiquement v_x à l'aide des propriétés suivantes que l'on démontrera:

$$\frac{1}{N} \Sigma n_i x_i^2 = v_x + \bar{x}^2 \text{ et, si } x' = ax + b,\ \sigma'_x = |a|\, \sigma_x$$

Un des objets principaux de la statistique est d'étudier sur une population la «dépendance expérimentale» ou «l'indépendance expérimentale» de deux caractères observés simultanément: l'un d'eux x, prend les valeurs $x_1, \ldots x_h$; l'autre y, prend les valeurs $y_1, \ldots y_k$; soit n_{ij} le nombre d'individus de la population pour lesquels on observe à la fois x_i et y_j. S'il existe deux suites $n'_1, \ldots n'_h$ et $n''_1, \ldots n''_k$ telles que l'on ait, pour tout i et pour tout j, $n_{ij} = n'_i n''_j$, les deux caractères sont dits *expérimentalement indépendants*.

A l'observation des deux caractères x, y d'une population, on associe les nombres: $\bar{x} = \frac{1}{N} \Sigma n_{ij} x_i$, $\bar{y} = \frac{1}{N} \Sigma n_{ij} y_j$,

$$\sigma^2{}_x = v_x = \frac{1}{N} \Sigma n_{ij} (x_i - \bar{x})^2,\ \sigma^2_y = v_y = \frac{1}{N} \Sigma n_{ij} (y_j - \bar{y})^2 \text{ et la covariance}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{1}{N} \Sigma n_{ij} (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}).$$

Ces calculs donneront lieu à des remarques analogues à celles qui ont été déjà faites pour le cas d'un seul caractère.

Pour $\sigma_x \cdot \sigma_y \neq 0$, on appelle coefficient de corrélation le nombre

$r = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_z\, \sigma_y}$; on a toujours, et on l'admettra, $|r| \leq 1$.

Quand on suppose, par hypothèse, que y est lié par une relation de la forme $y = \alpha x + \beta$ (avec $\alpha \neq 0$), on a $|r| = 1$; on admettra la réciproque.

Quand x et y sont expérimentalement indépendants, le coefficient de corrélation r est nul; il peut arriver que r soit nul sans que x et y soient expérimentalement indépendants.

La position de r dans $[-1, +1]$ est un élément d'appréciation du lien statistique entre les caractères x et y.

Le professeur de mathématiques trouvera avantage à emprunter à la biologie des exemples de dépendance et d'indépendance.

Sont hors du programme:

– *la définition des droites de régression;*

– *en probabilité, les définitions de la loi normale et de la loi de Poisson;*

– *en statistique appliquée, l'estimation d'une moyenne, le jugement sur échantillon, la notion d'intervalle de confiance.*

2. *Sections de Techniciens*

Programme de Terminale G

STATISTIQUE

Révisions du vocabulaire introduit en Première G.

Ajustement linéaire: procédés des moyennes mobiles et des moyennes discontinues; méthode des moindres carrés.

Corrélation linéaire entre deux variables statistiques: définition, droites de régression; covariance; coefficient de corrélation linéaire.

Programme de Terminale H

STATISTIQUE ET PROBABILITÉS

a) Statistique.

Révisions du vocabulaire introduit en Première H.

Ajustement linéaire: procédés des moyennes mobiles et des moyennes discontinues; méthode des moindres carrés.

Corréation linéaire entre deux variables statistiques: définition, droites de régression; covariance; coefficient de corrélation linéaire.

b) Probabilités.

Révisions des résultats étudiés en Première H.

Inégalité de Bienaymé-Tchebicheff.

Loi faible des grands nombres.

Distribution de Poisson. Distribution de Laplace-Gauss.

c) Applications des probabilités à la statistique (sans démonstration).

Application de la distribution de Laplace-Gauss au jugement sur échantillon. Estimation d'une moyenne. Valeur significative d'une moyenne. Intervalle de confiance. Valeur significative de la différence entre les moyennes de deux échantillons.

APPENDIX II *Nouveaux programmes pour la classe de seconde indifférenciée entrant envigueur en septembre 1981*

II. STATISTIQUE

Les documents nécessaires seront empruntés à l'environnement de l'élève ou proposés en liaison avec les enseignements de sciences biologiques, économiques et humaines.
Il est souhaitable que ces documents soient authentiques et récents.

Description statistique d'une population ou d'un échantillon. Tableaux de données, relevés périodiques, réponses à une enquête, . . . ; classement de ces données, représentations graphiques diverses.

Effectifs, fréquences, fréquences cumulées. Moyennes.

Il es conseillé de faire porter ces activités sur l'étude d'une seule situation, apte à une bonne approche des notions statistiques, et de se borner à explorer ces notions sur l'exemple choisi par le professeur.
Des données nombreuses sont indispensables; des phases distinctes sont à prévoir dans le déroulement (voir commentaires).

APPENDIX III *Commentaires officiels*

Les séquences d'activités statistiques (limitées à l'étude d'une seule situation), constituent un débroussaillage pour l'étude ultérieure de la statistique et du calcul des probabilités; elles sont aussi l'occasion d'appliquer de nombreuses autres parties du programme.

Pour permettre des travaux diversifiés, les données de la situation étudiée devront être nombreuses; certaines pourront correspondre à des relevés chronologiques.

Dans son déroulement, l'activité statistique comporte plusieurs phases:

- Prise de contact avec les données, lecture de tableaux;
- Elaboration d'une liste de questions qui se posent à partir de ces données;
- Choix des moyens à mettre en oeuvre pour répondre à ces questions;
- Accomplissement des calculs (utilisation de calculatrices et répartition des tâches par groupes);
- Elaboration de graphiques;
- Analyse des graphiques; questions auxquelles ils permettent de répondre et nouvelles questions qu'ils conduisent à poser.

REFERENCES – *A Classified Bibliography on the Teaching of Probability and Statistics in French Secondary Schools*

1. Inter-IREM meetings before 1973

1.1 – Teaching Probability – Inter-IREM conference. Lyon (May 1972) (90 p)
1.2 – Teaching Statistics – Inter-IREM conference. Clermont (March 1973) (120 p)

2. INRP Inter-IREM Research 73.02.9.01 (1973–78)

A. Reports on conferences

2.A.1 – Paris (April 1974) (50 p)
2.A.2 – Clermont (October 1974) (38 p)
3.A.3 – Toulouse (May 1975) (69 p)
3.A.4 – Lans en Vercors (March 1976) (43 p)
3.A.5 – Eveux (November 1976) (53 p)
3.A.6 – Belle-Ile (1977) (90 p)

B. Data analysis in the Junior High School

2.B.0 – Pedagogical Research No. 101, INRP (1979) (120 p)

File references:

2.B.1 – Climatology (Bordeaux-Brest-Strasbourg) IREM of Bordeaux.
2.B.2 – Climatology (Brest-Chateauroux, Orleans, Strasbourg) IREM of Orleans.
2.B.3 – Consumption of water in Grenoble – IREM of Grenoble.
2.B.4 – Consumption of electricity in the South-East from 1971–1975. IREM of Lyon.
2.B.5 – Consumption of electricity on the 3rd Wednesday of December in the South-East. IREM of Lyon.
2.B.6 – School class sizes. INRP Paris.
2.B.7 – Study of sporting performances. IREM of Bordeaux.
2.B.8 – Growth of population in Gironde and Dordogne. IREM of Bordeaux.
2.B.9 – Football. INRP Paris.
2.B.10 – Car registration in the Rhonde department. IREM of Lyon.
2.B.11 – Car registration in EEC countries. IREM of Rennes.
2.B.12 – Loire. IREM of Orleans.
2.B.13 – Spare time activities – Holidays. IREM of Orleans.
2.B.14 – Measuring the length of a room. IREM of Bordeaux.
2.B.15 – The port of Bordeaux. IREM of Bordeaux.
2.B.16 – The port of Rouen. IREM of Rouen.
2.B.17 – Sports results. IREM of Grenoble.
2.B.18 – Surveys. IREM of South Paris.
2.B.19 – Pupils' heights in the second year of a Junior High School* at Orleans. IREM of Orleans.

* For ages 10–15.

2.B.20 – Height and weight in the second year in a Valence Junior High School. IREM of Grenoble.
2.B.21 – Height, weight, span of arms and sport results. IREM of Rennes.
2.B.22 – Height, weight: growth from birth to age 18 years. IREM of Orleans.
2.B.23 – Television. IREM of Rouen.

C. Theory of probability in Senior High Schools

2.C.0 – Pedagogical Research No. 104, INRP (1979) (80 p)

3. Publications of IREM

3.B.1 – Brest. Introduction to probability (J. Bocle), (January 1978).
3.C.1 – Caen. For an introduction to statistics and probability. (1975).
3.C.2 – Caen. Probability, books 1, 2, 3, 4.
3.C.3 – Clermont. Probabilistic topics. (1978).
3.D.1 – Dijon. Selected pages and calculations of Blaise Pascal.
3.G.1 – Grenoble. Probability 1 (1975) and 2 (1978).
3.L.1 – Lille. Analysis of the file on 'New York City'. (1978).
3.L.2 – Lille. Summary No. 6 – Lottery (p. 22 to p. 33) (1977).
3.L.3 – Lyon. Report of the group 'simulation of random events'. (St. Etienne, 73–74).
3.L.4 – Lyon. Introduction to statistics and probability – 'sans tambour ni trompettes' IREM 15 (1979) (p. 23 to p. 30).
3.M.1 – Marseille. Theory of probability and arithmetic (1978).
2.M.2 – Montpellier. Descriptive statistics. (1973).
3.M.3 – Montpellier. Probability and statistics, 'première, A, B, C, D, E.' (1973).
3.M.4 – Montpellier. Probability. (1979).
3.N.1 – Nancy. The binomial distribution (programmed lecture). (1975).
3.P.1 – Poitiers. Teaching probability in a lycée. (C. Bloch) (1975).
3.P.2 – Poitiers. de Méré's problem. (1977).
3.P.3 – Poitiers. Work-sheets for teaching probability. (1978).
3.R.1 – Rennes. Elements of probability (R. Gras), (May 1973).
3.R.2 – Rennes. 'Did you say graphics'. (1979).
3.R.3 – Rennes. Sale of newspapers in St. Brieuc. (1978).
3.R.4 – Rennes. Pig farming in Brittany ('seconde A, B, T' – 'première and terminal B, G').
3.R.5 – Rennes. Multidisciplinary activities in 'seconde A, B'. (INRP Research. 78-02-4-14, Mathematics and the understanding of economic processes (I: 1979 – II: 1980).).
3.S.1 – Strasbourg. 'Informatics, when you get hold of us'. (1976).

*4. Documents published by the APMEP**

Brochures –

L. Guerber and P.L. Hennequin. Learning to guess.
4.A.1 – 1. Introduction to statistics (1967) (238 p).

* Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (French association of teachers of mathematics).

4.A.2 – 2. Introduction to probability (1970) (238 p).
4.A.3 – Let us take a chance (15 articles) (1976) (218 p).
4.A.4 – Data analysis. Book I (1980) (240 p.).
4.A.5 – Data analysis. Book II (1980) (320 p).

Articles of the APMEP Bulletin (in chronological order – the 1st number indicates the number of the Bulletin, the 2nd one, the page).

4.B.1 – P.L. Hennequin. Teaching probability and statistics in the 'seconde' and 'terminal' since 1970 – Evaluation of the situation (280, 570).
4.B.2 – C. Boucher. Simulation games (287, 9).
3.B.3 – D. Feneuille. Failure of experience (287, 43).
4.B.4 – L. Schluraff. Concerning the notion of conditional probability (288, 234).
4.B.5 – M. Monsarrat. Elections and mathematics (290, 529).
4.B.6 – P.L. Hennequin. For the teaching of statistics in junior high schools (290, 535) (292, 58).
4.B.7 – J.M. Monnez and J.C. Petit. Probability and statistics in senior high schools (291, 716).
4.B.8 – P. Lescanne. Mathematics outside school, in sports and games (291, 716).
4.B.9 – F. Huguet. A problem of simulation (291, 791).
4.B.10 – R. Gras. Concerning a problem of simulation (291, 794).
4.B.11 – B. Sorin. Probabilistic analysis of aptitude tests QCM* (295, 607).
4.B.12 – J.P. Guichard. Graph paper and probability (295, 627).
4.B.13 – J. Badrikian. Simulation (296, 865).
4.B.14 – Berthold, Henning, Mangeney. Organisation and realisation of a 'mathematical' lottery (297, 17).
4.B.15 – A. Tortrat. Concerning the problem of the Baccalauréat section C in Paris. June 1975 (302, 115).
4.B.16 – Parisian provincial branch of the APMEP – Report on the same problem. (302, 121).
4.B.17 – D. Feneuille, D. Mathieu, Phan Than Lun. An introduction to the methodology of experimental research; the notion of planning an experiment (304, 542).
4.B.18 – C. Bloch. Initial training of teachers (305, 795).
4.B.19 – A. Tortrat. On an exercise in probability (306, 910).
4.B.20 – C. Bloch. On an exercise in probability theory (307, 419).
4.B.21 – P. Clarou and G. Gachet. An approach to probability and statistics in the 'premiere: A' (312, 25).
4.B.22 – H. Moritz, M. Blanchard and C. Bloch. Remarks on the probability in the 'A, B, C, D, E' sections of the lycées (312, 38).
4.B.23 – C. Estezet. An introduction to probability – An open situation (312, 46).
4.B.24 – P.L. Hennequin. Some new openings (312, 61).
4.B.25 – G. Rebel. Advertisement! (316, 809).
4.B.26 – C. Bloch. Let us stop the expense (316, 812).

* Multiple-choice questions.

4.B.27 – C. Bloch. Playing loto according to Euler (318, 223).
4.B.28 – F. Pluvinage. Basis of actual probability (in preparation).

5. *International meetings*

5.1 – The teaching of probability and statistics, Carbondale (March 1969, Wiley 1970) (374 p).
5.2 – Statistics at the school level (Vienna, September 1973) (242 p).
5.3 – The teaching of probability and statistics (Bordeaux, August 1974) IREM of Bordeaux (170 p).
5.4 – The teaching of statistics in schools (Warsaw, August 1975) edited by E. Breny (1976) (77 p).
5.5 – An approach to statistics for children from 11 to 15 years old (Grenoble, 6–10 September 1976) (51 p).

6. *Various works in French*

6.1.1 – Bachelard. The new scientific mind. (1934).
6.1.2 – Bachelard. The rationalist style of present day physics.
6.2 – Boursin. Surveys, statistics, scientific forms of lie? Tchou (1978).
A. Engel. The teaching of probability and statistics. CEDIC.*
6.3.1 – Book I (1975) (307 p).
6.3.2 – Book II (1979) (386 p).
6.3.3 – Elementary mathematics from an algorithmic point of view. CEDIC (1979) (320 p).
6.4 – M. Glaymann and T. Varga. Probability at school. CEDIC (1973) (223 p).
6.5 – G. Noel and J. Bastier. Mathematics and calculators – Methods and popularization (1978) (162 p).
6.6 – J. Monod. Chance and necessity – Le Seuil (1970) (220 p).
6.7 – L. Råde. Take your chance with your programmable calculator. CEDIC (95 p).
6.8 – T. Varga and M. Dumont. Combinatorics, statistics and probability for 6 to 14 year olds. OCDL** (1973) (128 + 120 p.).
6.9 – I. Xenakis. Music, architecture. Casterman (1976) (238 p).

7. *Some works in English*

7.1 – F. Mosteller (Chairman), W.H. Kruskal, R.F. Link, R.S. Pieters and G.R. Rising. The joint committee on the curriculum in Statistics and Probability of the American Statistical Association and the National Council of teachers of mathematics (editors), a series of 4 books and 4 teacher's manuals:
(a) Statistics by example: Exploring Data (125 p)
(b) Statistics by example: Weighing chances (145 p)
(c) Statistics by example: Detecting patterns (166 p)
(d) Statistics by example: Finding models (146 p)
Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 2725 Sand Hill Road, Menlo Park, California, USA (1973).

* CEDIC, 93 Avenue d'Italie, F-5013, Paris.
** OCDL, 65 rue Claude Bernard, Paris 5.

7.2 – Judith M. Tanur, F. Mosteller (Chairman), W.H. Kruskal, R.F. Link, R.S. Pieters and G.R. Rising. The joint committeee on the curriculum in Statistics and Probability of the American Statistical Association and the National Council of teachers of mathematics (editors), Statistics: A guide to the unknown (430 p). Holden-Day, Inc. 500 Sansome Street, San Francisco, California, USA (1972).
7.3 – Journal 'Teaching Statistics' Sheffield – 1, (1979).
7.4 – W. Feller. An introduction to probability theory and its applications – Vol I (1950) (510 p). Wiley, New York.

8. History of probability and statistics

8.A.1 – J.P. Benzecri. History and prehistory of data analysis.
Books on data analysis, 1st year, 1, 2, 3, 4, 2nd year, 1, Dunod (1976).
8.A.2 – P. Levy. Some aspects of a mathematician's mind. Blanchard (1970).
8.A.3 – M. Loeve. Chapter XII – Probability theory in 'a short history of mathematics'. Jean Dieudonne – Hermann (1978).
8.A.4 – P. Raymond. From combinatorial analysis of probability. Maspero (1975).

Historic texts

8.B.1 – J. Bernoulli. Ars conjectandi. Basel (1719) and Blanchard.
8.B.2 – I. Bienaymé. Reflections in support of Laplace's discovery on the law of probability in the method of least squares. CRA Sci Paris. Book 37 p. 309, (1853).
8.B.3 – C.F. Gauss. Werke. 12 volumes. Gottingen (1870–1927).
8.B.4 – C. Huygens. Complete works. Book XIV M. Nikoff. La Haye, (1888–1950).
8.B.5 – Laplace. Analytical theory of probability. Complete works. Book 7. Gauthier-Villars, (1886).
8.B.6 – A. de Moivre. The doctrine of chance. (1718) and Chelsea, New York (1967).
8.B.7 – P. de Montmort. An essay on analysis of games of chance. (1708).
8.B.8 – B. Pascal. Complete works. (1662).
8.B.9 – D. Poisson. Research on the probability of judgements in criminal and civil law preceded by general rules of calculus of probability. (1837).

9. Films

A. *16 mm*

A–1. *OFRATEME**

9.A.1 – Chance and training (Chantiers mathematiques 71–72 & 72–73) 30 min.
9.A.2 – Diagnosis in toxicology (Chantiers mathematiques 71–72 & 72–73) 30 min.
9.A.3 – Study of a telephone exchange (Chantiers mathematiques 71–72 & 72–73) 30 min.
9.A.4 – The Christmas tree (Chantiers mathematiques 71–72) 30 min.

* Office de Recherche sur les Technique Modernes d'Education, 29 rue d'Ulm, Paris 5.

9.A.5 – The baker's croissants (Chantiers mathematiques 71–72) 30 min.
9.A.6 – Convergence of a binomial distribution to the Laplace-Gauss distribution. (Chantiers mathematiques 71–72) 30 min.

A–2. *Scientific research film service*

9.A.8 – 'Fibrogramme' (Condorcet centre) 1966, 18 min.
9.A.9 – Multinomial formula (Condorcet centre) 1966, 14 min.
9.A.10 – An introduction to the binomial distribution (Condorcet centre) 1966, 11 min.
9.A.11 – An introduction to the law of large numbers (Condorcet centre) (1966), 18 min.
9.A.12 – The arc sine law (Condorcet centre) (1967), 17 min.
9.A.13 – The exponential distribution (Condorcet centre) (1967), (1 : 15 min; 2 : 12 min).
9.A.14 – Triangle of Pascal (Condorcet centre) (1966), 15 min.
9.A.15 – Repeated trials and convergence towards the normal distribution (Sup-Aero) 9 min.

B. *8 mm or Super 8*

OFRATEME

B–1. – Bernoulli diagram. (1975), 5 min.
9.B.1 – Convergence towards the bell-shaped curve, symmetrical case.
9.B.2 (1975), 5 min.
– Convergence towards the bell-shaped curve, asymmetrical case.
9.B.3 (1975), 5 min.

Programmed mathematical films (University of Clermont)

9.B.4 – Bernoulli diagram and the law of large numbers. (1977), 15 min.
9.B.5 – Convergence of the binomial towards the bell-shaped curve. (1974), 10 min.
9.B.6 – Polya's urn. (1976), 15 min.