UNIVERSIDAD DE JAÉN

FACULTAD DE HUMANIDADES Y CC. DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS

TESIS DOCTORAL

•

LAS MEDIDAS DE DISPERSIÓN EN LA EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA: ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO Y DE LA COMPRENSIÓN DE LOS ESTUDIANTES.

PRESENTADA POR:
JESÚS DEL PINO RUIZ

DIRIGIDA POR:
ANTONIO ESTEPA CASTRO

JAÉN, DICIEMBRE 2019

Esta tesis se defendió el día 18 de diciembre de 2019 en la Universidad de Jaén, ante el tribunal siguiente:
Presidenta: Dra. Carmen Batanero Bernabeu.
Secretaria: Dra. Lourdes Ordoñez Cañada
Vocal: Dra. Assumpta Estrada Roca

Obteniendo la calificación de Sobresaliente Cum Laude

Dedicatoria

Dedicar una tesis era algo que nunca imaginé, así que se hace algo complejo, porque uno no quiere dejar a nadie atrás, por tanto, voy a empezar por las personas fundamentales, mis padres. En especial a mi madre, una mujer luchadora e incansable, que ha sacrificado toda su vida por el bienestar de sus hijos, es un ejemplo de trabajo y superación constante. Mis padres siempre han estado ahí, apoyándome en cada uno de mis proyectos, fuese cual fuese, y sabe Dios que soy un hombre “de culo inquieto”. Gracias. Gracias por esa herencia que es de un valor incalculable, por enseñarme a levantarme después de caer, a ser constante, a ser responsable, a no olvidar a nadie por el camino, gracias por esos libros que siempre estuvieron a mi disposición, por fomentar mis rarezas, que a veces me han llevado a lugares desconocidos, gracias… podría estar así hojas y hojas, pero tan solo una más. Gracias por ser mis padres.

Gracias también a mis hermanos, ellos han estado ahí siempre, no se podría querer unos hermanos mejores, gracias a ambos por vuestros ejemplos, para lo bueno y para lo malo, por vuestro apoyo y vuestros ánimos, también tenéis un pedacito de este trabajo.

Y por supuesto GRACIAS, así, con mayúsculas, a mi mujer, a mi compañera, a mi mejor amiga. Sin ella, este trabajo no solo habría sido imposible, sino que también impensable. Es una mujer admirable, luchadora, comprensiva, inteligente, fuerte, … tengo la enorme suerte de haber encontrado una compañera de viaje con la que compartir proyectos, alegrías y una vida en común. Además de darle las gracias debo pedirle perdón, perdón por todas esas horas robadas, perdón por todos esos libros desordenados, por el ordenador conectado en cualquier enchufe, por las discusiones y discusiones sobre el mismo tema, la tesis, por todas esas veces que me contabas algo y no te escuchaba como debía porque estaba, o bien leyendo un artículo o redactando algún trocito de este texto. A partir de ahora espero que no se repita.

Y gracias a alguien más, de quien me acuerdo a diario, a mi abuelo y padrino, a ese hombre, que pese a no tener muy claro lo que hacíamos, estaba orgulloso de cada uno de nuestros logros. Él, desde el cielo, aunque no tenga muy claro lo que es convertirse en doctor, estará una vez más orgulloso de lo que hace su nieto.

A Ani, Vicente, Encarnita, Rubén, Gemma y Francisco.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer al Dr. Antonio Estepa Castro todo el apoyo brindado para la realización de esta tesis. Desde sus inicios, mis circunstancias personales no nos han permitido centrarnos de una manera exclusiva en el desarrollo de este trabajo, y de no ser por su tesón, su compromiso, su ayuda y todas las horas que hemos pasado juntos, incluso cuando su situación personal también se ha vuelto más complicada, este trabajo no vería hoy la luz. Ha pasado de ser un director, a ser un profesor, de ser un profesor a ser un maestro (con todo lo que ello implica) y de ser un maestro a ser un amigo. Nunca tendré palabras suficientes para valorar el soporte que me ha dado.

Quiero agradecer también su apoyo, sobre todo durante los últimos años, a la Dra. Carmen Batanero Bernabeu, quien además de dirigir mi Trabajo Fin de Máster, me ha brindado sabios consejos desde nuestro primer encuentro en la SEIEM de Jaén, que se realizó en Baeza, allá por el 2012.

Por supuesto no quiero olvidar a todos aquellos que invirtieron un poco o un mucho de su tiempo para que este trabajo esté aquí hoy. A la Dra. Lourdes Ordoñez Cañada, que fue quien me facilitó la práctica totalidad de los libros de texto para analizar, y hago extensivo el agradecimiento a todo el departamento de matemáticas del IES Jabalcuz por tan generoso préstamo. A este préstamo también ayudaron Julia María Casado Casado y la editorial Oxford. Al Dr. Antonio Manuel Peña García, quien siempre se ha preocupado por el ritmo de esta tesis y me ha facilitado libros de la Universidad de Granada cuando ha sido necesario. Al Dr. Francisco Tomás Sánchez Cobo, por todos sus consejos no solo sobre la tesis, sino también sobre la gestión personal de situaciones que a veces se nos escapan de las manos. Al Dr. José Rodríguez Avi, quien me ayudó a encontrar todos los libros necesarios para el fundamento estadístico de esta obra. Y a todos aquellos que con su ayuda silenciosa me han ayudado a acabar este trabajo.

La causa de mis enormes enfados al examinar los libros estribaba en lo infames que eran éstos. Eran falsos. Estaban escritos con prisas. Pretendían ser rigurosos; pero luego usaban ejemplos que casi estaban bien pero nunca bien del todo; siempre tenían alguna pega. A las definiciones les faltaba precisión. Todo era un poco ambiguo; los autores no eran lo bastante listos como para comprender lo que significa «rigor»; sólo lo fingían. Pretendían enseñar algo que ellos no comprendían, y lo que es más, algo que, de hecho, al alumno le era totalmente inútil en ese momento.

(Feynman, 1987, pp. 339-340)

Resumen

En esta tesis se van a analizar y definir la dispersión y las medidas de dispersión, se plantea cómo el curriculum indica que hay que trabajar las mismas, realizando un análisis histórico, posteriormente se analizan los libros de texto desde varias perspectivas, siendo la más amplia a través del EOS. Finalmente, se analiza el resultado de un cuestionario que se propone a los alumnos y una encuesta a nivel andaluz para evaluar si la estadística se estudia en 3º de ESO o no.

Si hay que definir linealmente este trabajo, lo que se realiza es un planteamiento del curriculum, se comprueba si los libros se adaptan a ese curriculum, y cómo trabajan los libros los diferentes significados que éste indica, y por último si a través de dichos libros los alumnos consiguen aprender lo que el currículum indica que deben de aprender y si este curriculum se trabaja en clase, todo ello referido a las medidas de dispersión.

Tabla de Contenidos

Índice de tablas

Índice de figuras

Introducción

Esta tesis surge tras la experiencia profesional, al darnos cuenta de la dificultad que tienen los estudiantes para asimilar algunos conceptos estadísticos y desarrollar las destrezas propias del área. En concreto, percibimos una especial dificultad para entender la importancia de la dispersión, así como para realizar el cálculo de las diferentes medidas de dispersión e interpretarlas junto a las medidas de tendencia central.

Como indica Moore (1990) la dispersión está en el corazón de la Estadística, ya que sin dispersión, la investigación Estadística carece de sentido. En la secundaria española no se trata directamente esta noción, sino que se estudian las medidas de dispersión y la noción de dispersión a través de ellas. Así pues, el objeto de estudio de esta tesis serán las medidas de dispersión.

Con el cambio normativo, las medidas de dispersión se trabajan desde el curso 1º de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) (MECD, 2015b), sin embargo, en el anterior marco legislativo no comenzaba el estudio de estas medidas hasta 3º de ESO (MEC, 2007), por tanto se ha centrado la atención sobre cómo se trabajan estas nociones en los cursos 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria.

Ballman (1997) pensaba que las reformas educativas no funcionaban porque a pesar de los esfuerzos no se estaba ayudando a comprender la dispersión y su rol en la Estadística todo ello a pesar de parecer un concepto sencillo; sin embargo, el concepto de dispersión es bastante complejo. En el primer capítulo estudiaremos las dificultades, no solo matemáticas sino también semánticas, debido a la dificultad de encontrar un término que describa con precisión el concepto a analizar. También se estudiarán las dificultades matemáticas debido al amplio ecosistema de expresiones y fórmulas aparentemente equivalentes que describían Estepa y Ortega, (2005b) al realizar el estudio del significado institucional de referencia de las medidas de dispersión.

Como indican Batanero, González-Ruiz, López-Martín, y Contreras, (2015) "la didáctica sobre las medidas de dispersión es escasa, y se centra principalmente en la forma en que los estudiantes comprenden el tema" (p. 8) por tanto, es un problema de investigación pertinente evaluar cómo se presenta la dispersión a los estudiantes en los libros de texto para entender mejor cómo los estudiantes aprenden y perciben la dispersión.

Con el fin de aportar nuevos resultados en los estudios de investigación en dispersión y sus medidas, y continuando con trabajos anteriores (Estepa y Ortega, 2005a; Ortega y Estepa, 2005; Ortega y Estepa, 2006), que dentro del marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento e instrucción matemáticos (EOS) fijaron el significado institucional de referencia y pretendido en libros de texto universitarios (en los que se puede considerar la institución Estadística), para las medidas de dispersión se van a analizar dentro del mismo marco los libros de texto más empleados en secundaria.

La memoria se organizará en siete capítulos que abarcarán desde la clarificación de los conceptos a analizar, hasta el análisis final de los libros de texto:

En el primer capítulo se estudian los problemas que han surgido a nivel semántico con los términos "dispersión" y "medidas de dispersión" en el desarrollo del trabajo, ya que, aunque en castellano la cuestión es algo más clara, al traducir la literatura de lengua inglesa surgen algunos problemas. Se utiliza el capítulo también para hacer una breve descripción de cómo han evolucionado estos conceptos.

En el segundo capítulo se analiza la situación de las medidas de dispersión en el curriculum, realizando una comparativa entre las situaciones anteriores y la actual, teniendo en cuenta los últimos análisis que se han realizado sobre este aspecto, como Batanero, González-Ruiz, López-Martín, y Contreras (2015).

En el tercer capítulo se realiza una amplia revisión bibliográfica sobre la investigación en libros de texto, donde además se analizan diferentes marcos teóricos que se emplean para tal fin, siguiendo el trabajo realizado por Del-Pino y Estepa (2015), para evaluar que marco es el más conveniente en el estudio del problema de investigación.

En el cuarto capítulo se analiza la investigación previa sobre medidas de dispersión, prestando especial atención a aquellas más novedosas, con el objetivo de establecer claramente el problema de investigación y que es a su vez una ampliación del trabajo fin de máster del autor de esta tesis.

En el quinto capítulo se define el marco teórico que se va a emplear para analizar los libros de texto, que será el EOS, desarrollado por Godino y colaboradores a través de diferentes trabajos desde la primera mitad de los 90, (Godino y Batanero, 1994); (Godino, Batanero, y Font, 2007) y que provee de una herramienta para análisis de libros de texto llamada GROS (Godino, Rivas, Castro, y Konic, 2008) para acabar definiendo el problema de investigación y los objetivos e hipótesis de esta tesis.

En el sexto capítulo se realiza la investigación en libros de texto de educación secundaria obligatoria. Se analiza la presentación de las medidas de dispersión en una muestra de 12 libros de texto de Matemáticas, dirigidos a estudiantes de tercer y cuarto curso de Educación Secundaria Obligatoria. Se estudian los objetos y significados definidos en el enfoque ontosemiótico, identificando las principales variables que los afectan, y comparando entre libros de la misma modalidad de 4º de ESO y entre modalidades, se identifican algunos conflictos semióticos potenciales.

En el séptimo capítulo se evaluará el conocimiento de una muestra de estudiantes sobre las medidas de dispersión. Para ello se utilizará un cuestionario elaborado con preguntas refrendadas en otros estudios. Al ser un estudio con menores de edad se tendrá en cuenta obtener el permiso de padres y alumnos y el visto bueno de la gestión de cuestionarios y consentimiento por parte del comité de ética de la Universidad de Jaén. Además, se realizará una encuesta a nivel andaluz para tener una percepción clara acerca de si las unidades de estadística se trabajan en 3º de ESO o no.

En el octavo y último capítulo se establecerán las conclusiones de este estudio, cómo afectan a la enseñanza, cómo afectan a la investigación y las líneas abiertas para futuros estudios y/o tesis doctorales.

La memoria finaliza con las referencias y el apéndice del informe de la comisión ética de la Universidad. Así como una breve biografía del autor de la tesis.

Si no hubiese variación, no habría necesidad ni de Estadística ni de estadísticos.

(Snee, 1999)

Capítulo 1

Qué son la dispersión y las medidas de dispersión

1.1. Introducción

Como indican Watson y Kelly (2008), el vocabulario y el significado que damos a los términos que se emplean en Estadística es fundamental para la comprensión de lo que éstos suponen y de cómo se aprenden.

> La relación entre el lenguaje y la comprensión del sujeto (en este caso la Estadística) es compleja. La mayoría de los educadores creen que el desarrollo de los dos ocurre a la vez. ¿El aprendizaje del lenguaje apropiado ayuda a entender la Estadística? ¿O el aprendizaje sobre el contenido estadístico ayuda en el desarrollo del uso apropiado del lenguaje? (Watson y Kelly, 2008, p.741).

Por tanto, es importante comenzar el estudio de un concepto y su enseñanza delimitando el vocabulario y tratando de definirlo de la mejor manera posible. A lo largo del análisis que se realizará en este capítulo se observará que esta tarea no es siempre sencilla, sobre todo en el habla inglesa, que genera multitud de confusiones debido a la polisemia de sus términos y el cómo se emplean en diferentes contextos, como la vida cotidiana y el contexto escolar.

En una primera aproximación se puede definir la dispersión como "la diferencia entre el valor observado y el verdadero valor del fenómeno en cuestión" (Hald, 1998, p.33). Es fácil entender desde esta definición que sin esta diferencia no sería necesaria la Estadística y por tanto se puede coincidir con numerosos autores en que la dispersión está en el corazón de la Estadística y que es su razón de ser. (Moore y Cobb (1997), Gould (2011), Meletiou (2002), Meletiou-Mavrotheris y Lee (2002), Snee (1999), Wild y Pfannkuch (1999), Pfannkuch y Wild (2004), Shaughnessy (1997)). En palabras de Harris (2005),

> La Estadística, como disciplina, existe a causa de la variabilidad. Si no hubiese variabilidad, el universo sería determinista y no habría necesidad de métodos estadísticos (Harris, 2005, p. 1).

Como se ha indicado en la introducción, el objeto primario de estudio de esta tesis es la forma en la que se mide la dispersión y cómo se trabaja este concepto en secundaria, pero como se ve entran en juego otros términos, como variabilidad y variación. En este capítulo se va a describir el objeto de estudio, y se hará desde varias perspectivas, semántica, histórica y social. Para ello, lo primero que se va a hacer, es tratar de mostrar las definiciones de dispersión y medidas de dispersión. Y estudiar los posibles conflictos que surgen a la hora de definir estos conceptos. Posteriormente se realizará una revisión histórica de cómo estos conceptos han ido surgiendo y evolucionando.

1.2. Definición de dispersión y medidas de dispersión

Se van a analizar ambas definiciones tanto en castellano como en inglés con diferente profundidad. En primer lugar, analizándolas en diccionarios comunes, para ir ahondando en el concepto a través de diferentes diccionarios especializados y literatura Estadística y de Didáctica de las Matemáticas.

1.2.1. Definición en castellano.

Se comienza analizando el significado habitual de los términos que atañen a nuestro análisis. Para ello se indican los significados que da el diccionario de la Real Academia Española (R.A.E.), que difieren algo del sentido matemático. Por ejemplo, en Estadística un conjunto de elementos sería una muestra. El término medidas de dispersión no viene en el diccionario de la R.A.E, pero podemos encontrar el término *dispersión.*

> Dispersión: 4. f. Mat. Distribución estadística de un conjunto de valores.
>
> («Real Academia Española de la Lengua», 2015).

Medidas de dispersión es un término compuesto, en consecuencia, se recurre a otras fuentes de consulta como la enciclopedia online EcuRed.

> Medidas de dispersión: Parámetros estadísticos que indican como se alejan los datos respecto de la media aritmética. Sirven como indicador de la variabilidad de los datos. Las medidas de dispersión más utilizadas son el rango, la desviación estándar y la varianza («EcuRed. Enciclopedia colaborativa cubana», 2010).

Sin embargo, como se indicaba anteriormente, los diccionarios comunes no son el mejor lugar para buscar el significado técnico de un término, pero sí que dan una aproximación al sentido que a estos términos les da la población en general y los estudiantes en particular, siendo un primer acercamiento a un sentido más profundo que se obtendrá en diccionarios especializados, como lo son los matemáticos y los estadísticos.

Un diccionario de Estadística en español es el de Sierra Bravo (1991), en dicho diccionario los términos “dispersión” y “medidas de dispersión” aparecen en la misma entrada del siguiente modo.

> Dispersión del latín *dispergere:* esparcir
> En un conjunto de datos estadísticos, dispersión es el esparcimiento, alejamiento, variación o desviación de unos datos respecto a los otros en relación a su valor medio. El grado de dispersión se mide en Estadística mediante las medidas de dispersión, desviación o variación. Estos índices constituyen el complemento de las medidas de tendencia central o promedios. En relación a ellos, pretenden medir el grado de aproximación con que la medida de tendencia central representa al grupo (Sierra Bravo, 1991, p. 198).

A continuación, se van a describir ambos términos tal y como aparecen en otros diccionarios matemáticos.

> Dispersión: Una medida de dispersión es una forma de describir lo dispersas o separadas entre sí que están las observaciones de una muestra. El mismo término se aplica de forma similar a una variable aleatoria. Las medidas de dispersión más corrientes son el rango, el rango intercuartílico, la desviación absoluta media, la varianza y la desviación típica. El rango puede verse afectado por escasos valores muy altos o bajos y la desviación absoluta media es incómoda debido a los valores absolutos. La desviación típica viene dada en las mismas unidades que los datos, y es el parámetro usado con más frecuencia, aunque también puede ser útil el rango intercuartílico cuando se emplea la mediana como medida de localización (Clapham, 1998, p.107).

El segundo diccionario que se puede utilizar es el Diccionario de Matemáticas de Norma Editorial, en este diccionario, al igual que en el anterior, la dispersión y su medida vienen fundidas en una sola entrada.

> Dispersión: Es toda medida de la separación de un grupo de números alrededor de su valor medio. La amplitud, la desviación típica y la desviación media son todas medidas de dispersión («Diccionario de Matemáticas», 2001, p.67).

También se puede considerar como fuente de documentación la propia disciplina, por tanto, un lugar donde se puede buscar son los libros de Estadística, un ejemplo podría ser la siguiente definición:

> A la mayor o menor separación de los valores respecto a otro, que se pretende que sea su síntesis, se le llama dispersión o variabilidad (Martín-Guzmán y Martín, 1993, p.57).

Se aprecia en las diferentes definiciones que se han proporcionado en este apartado, que en general, es difícil encontrar una definición de dispersión y de medidas de dispersión diferenciada en castellano, ya que son dos conceptos que en la mayoría de la literatura de nuestra lengua aparecen conjuntamente y no por separado.

1.2.2. Definición en inglés.

La mayor parte de la bibliografía consultada es en lengua inglesa, la traducción natural de los términos dispersión y medidas de dispersión debería ser, para dispersión, el término "spread" o "dispersion" y para medidas de dispersión, el término "spread measurements", o bien, "measure of spread".

Encontrar el significado de "dispersion" en multitud de diccionarios especializados es sencillo, por ejemplo, en el diccionario estadístico Cambridge aparece:

> La cantidad que un conjunto de observaciones se desvía de la media. Cuando el conjunto de observaciones está muy cerca de la media, la dispersión es menor que cuando están dispersas ampliamente con respecto a la media (Everitt y Skrondal, 2010, p.139).

En una enciclopedia de Estadística también se puede encontrar la definición de medidas de dispersión:

> Una medida de dispersión permite describir un conjunto de datos concerniente a una variable particular, dando una indicación de la variabilidad de los valores dentro de la colección de datos. La medida de la dispersión completa la descripción dada por una medida de tendencia central de una distribución (Dodge, 2008, p.341).

Así pues, una medida de dispersión no sólo cuantifica la variabilidad de un conjunto de datos o de una distribución, sino que también es necesaria para completar la descripción de éstos. Por tanto, diferentes medidas de dispersión la cuantificarán de manera diferente y completarán la descripción o el resumen de un conjunto de datos de forma diferente, de la misma manera que diferentes medidas de centro (como la media, la mediana o la moda) dan informaciones diferentes.

Sin embargo, al leer textos científicos de Didáctica de las Matemáticas se encuentra que la realidad dista mucho de esta situación ideal de traducción y se debe a varios motivos.

Respecto a la dispersión, en inglés existe una discusión de índole léxica acerca de los vocablos que serían equivalentes a dispersión en español, que son "spread" y "dispersion." En Kaplan, Fisher, y Rogness (2009) y Kaplan, Rogness, y Fisher (2012) se analiza este hecho, especialmente en el segundo donde dan las siguientes tres razones para el abandono del término "spread":

> (1) "spread" ya tiene una multiplicidad de significados y sólo algunos de ellos relacionados con la dispersión; (2) el conocimiento previo del estudiante de la palabra "spread" está unida más cercanamente a significados que producen malentendidos y conceptos erróneos; y (3) los estudiantes no demuestran comprender la palabra "spread" al final de un curso estadístico de un semestre (p. 57).

Los motivos aducidos, pues, son: la polisemia ya que el término "spread" cuenta con al menos 25 significados en el diccionario Oxford (Kaplan et al., 2012), los conocimientos previos y la persistencia de esos conocimientos previos. Los autores sugieren que la mejor salida para evitar posibles problemas de comprensión por parte del alumnado es el empleo del término "variability" como sinónimo de los términos "spread" y "dispersion".

Se encuentra pues, que en la literatura de nuestra área se ha abandonado el uso de los términos "spread" o "dispersion" y "spread measurements" a favor de los términos "variability" y "variation" que son los que se presentan en la mayoría de los textos científicos. Sin embargo, la traducción de estos términos no está tampoco exenta de discusión ya que no está clarificada, generando que en ocasiones se intercambien como indican Estepa y Ortega (2005b) "podemos decir, sin creer equivocarnos, que el uso indistinto de "variabilidad", "dispersión" y "variación" es también una constante en la literatura en español" (p. 174).

Por tanto, en el siguiente apartado se van a analizar las posibles traducciones de "variability" y "variation" y los problemas que presentan.

1.3. Los términos variability y variation y su traducción al castellano

En este apartado se recoge el testigo del anterior y se tratará de definir los términos que más se emplean en la literatura del área en inglés y sus traducciones al español. Estas dos nociones, su traducción, y los fenómenos que tratan de explicar vienen ampliamente comentados en Estepa (2013). Así pues, en este apartado se resumirán algunas de las ideas presentadas en ese artículo, sobre todo las referentes a la terminología y su uso en esta tesis.

1.3.1. Definición en diccionarios de lengua inglesa.

Se comenzará continuando la línea anterior, definiendo estos términos en su uso común, que en muchas ocasiones no tiene mucho que ver con su uso en matemáticas o en disciplinas más específicas como la Didáctica de la Matemática.

Para ello se busca en el diccionario Oxford de lengua inglesa el significado de ambos términos.

> Variability (variabilidad):1. El hecho de que algo puede variar. Ej. La variabilidad del clima o un grado de variabilidad en el tipo de cambio.

> Variation (variación): Un cambio en el valor de una función debido a pequeños cambios en el argumento o argumentos de esta (Simpson y Weiner, 2016).

1.3.2. Definición en diccionarios matemáticos y estadísticos.

Al igual que en castellano, en la búsqueda de un significado más profundo se acude a varios diccionarios especializados en lengua inglesa. Sin embargo, en la mayoría de los escritos es muy difícil encontrar definidos estos términos, por tanto, se recurre a algunos especializados online, como el de las universidades de Rice, Houston Clear Lake y Tufts:

> Variability (variabilidad): La variabilidad se refiere a cómo se "esparce" un conjunto de datos (Lane, 2016).

Otra definición se puede encontrar en www.statisticshowto.com dirigida por la profesora Deviant:

> Variability (variabilidad): La variabilidad (también llamada dispersión) se refiere a cómo se extiende un conjunto de datos. La variabilidad te ofrece una manera de describir cuánto varían los conjuntos de datos y te permite utilizar la Estadística para comparar tus datos con otros conjuntos de datos (Deviant, 2015).

En otros textos de Estadística, como el de Weisberg (1992) de la Universidad de Ohio, se encuentra una definición un tanto informal del otro término buscado:

> "La variedad es la especia de la vida", o, como dicen los franceses, "vive la différence". Los estadísticos coinciden en que el estudio de la variedad y las diferencias es de lo que se trata la Estadística. "Ciencia de la variación". El concepto de variación enfatiza que una variable interesante es aquella que varía, de tal manera que no todas las observaciones tienen la misma puntuación para la variable. (p.1)

1.3.3. Definición de la Didáctica de la Matemática.

En la literatura española e inglesa se intercambian los significados de estos conceptos, lo que es incorrecto. Como indican Makar y Confrey (2005), el término variación "en los estudios de investigación se considera como evidente, con un significado de sentido común, y se deja sin definir" (p. 28).

Una de las definiciones que parece más descriptiva es la de Phatak y Robinson (2005), "usamos la palabra variabilidad para describir una situación en la cual las observaciones o las medidas deberían ser las mismas, pero no lo son" (p. 1).

Sin embargo, en muchos artículos, libros y actas de congresos de Didáctica de la Matemática en inglés los términos se intercambian, como si fuesen sinónimos, de esto dan cuenta Ben-Zvi y Garfield (2004a), que indican que esta intercambio se da de manera indiscriminada, produciéndose cierto abuso, algo que además se podía ya percibir en el apartado anterior al ver cómo se definen ambos términos.

Se han dado algunos intentos de frenar esta situación, por ejemplo, Makar y Confrey (2005) hacían un esfuerzo por definir el concepto de variación, indicando que "en palabras sencillas, variación es la cualidad de una entidad (una variable) de variar, incluida la variación debida a la incertidumbre" (p.28). Sin embargo esta definición no termina de cerrar el debate, hasta tal punto que en artículos posteriores como Peters (2011) se sigue manteniendo el uso indiferente de ambos términos.

Reading y Shaughnessy (2004) dan una definición de ambos términos, "variación es un nombre usado para describir el acto de variar o de condición cambiante, y variabilidad es una forma nominal del adjetivo variable, lo que significa que algo es propenso o tendente a variar o cambiar" (p. 201), profundizando más adelante, "el término variabilidad será entendido como la característica de una entidad que es observable, y el término variación para referirse a la descripción o medida de esta característica" (Reading y Shaughnessy, 2004, p.201). Debido a que se pretenden mantener las traducciones se utilizarán tal y como vengan en los textos a traducir, aunque lo correcto es usar los términos "variabilidad" y "variación" en este sentido, variabilidad como sinónimo del fenómeno de dispersión, es decir, una característica del sistema, y la variación como la medida de dicha característica o, en otras palabras, como medida de dispersión.

1.3.4. Significado de las medidas de dispersión y principales medidas.

Según Estepa y Ortega (2005a) podemos distinguir dos sentidos o significados de la dispersión en el estudio del significado, la dispersión referencial que es la que se mide tomando como referencia una medida de promedio y la dispersión intrínseca que es la que se mide comparando unos datos con otros. Sin embargo, ambos tipos son equivalentes como indicaban los autores,

> Aunque conceptualmente son distintas, cuando se miden son equivalentes, ya que se puede demostrar que el promedio del cuadrado de todas las diferencias entre dos datos de un conjunto es igual a dos veces la varianza de ese conjunto de datos. (p.6)

Por tanto, puede parecer indiferente si consideramos la dispersión como referencial o intrínseca ya que numéricamente se puede pasar de una a otra fácilmente, sin embargo, su sentido e interpretación sí que son diferentes.

A continuación, en la tabla 1 se muestran las principales medidas de dispersión de ambos tipos que hay.

Tabla 1. Resumen de las principales medidas de dispersión, su significado y expresión.

Medida de dispersión	Significado	Expresión
Rango	Amplitud en la que varían los datos.	R = Max - Min
Cuartil	El cuartil k-esimo (k = 1, 2, 3) será el valor de la variable que deja menores o iguales que él kN/4 valores de la variable.	Q_1, Q_2, Q_3
Rango intercuartílico	Diferencia entre el tercer y el primer cuartil	$R_I = Q_3 - Q_1$.
Coeficiente de variación	Relación entre la desviación típica y la media aritmética del conjunto de datos	$C_v = \frac{\sigma}{\bar{x}}$
Varianza	La varianza mide la dispersión de los valores en torno a la media	$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}$
Desviación típica	La varianza se mide en unidades cuadradas, por tanto, no queda expresada en la misma unidad que la media, por ello se puede utilizar su raíz cuadrada	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$
Desviación absoluta	Es la media de los valores absolutos de la dispersión con respecto a la media	$D_m = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\left\|X_i - \bar{X}\right\|$

Las expresiones de la varianza y la desviación típica están divididas por n -1 para ser un estimador insesgado (el parámetro verifica la esperanza media del parámetro a estimar) de la varianza de la población. En una muestra, la desviación típica se caracteriza por la varianza y la desviación típica muestral, s^2 y s, en la población por dichos parámetros con carácter poblacional, σ^2 y σ (Moncho, 2014).

Como nos indica Loosen, Lioen y Lacante (1985) y más concretamente Gordon, (1986) existe una relación entre la varianza y la media del cuadrado de la diferencia de todas las medidas entre sí. Por tanto, se puede calcular no solo como dispersión en torno a la media, sino también como dispersión de las medidas entre sí.

Cada una de ellas aporta una información diferente e interesa para según qué colección de datos, esto hace más complicada la comprensión del fenómeno de la dispersión. Además de estas medidas existen algunas con respecto a la mediana, que no se incluyen por no ser muy usuales.

1.3.5. Análisis final de los conceptos.

Se observa a lo largo de estos apartados que la variabilidad es un concepto amplio, pues se puede referir, por ejemplo, también a las diferencias existentes entre los valores de una variable determinista en análisis; es decir, no es exclusiva de la Estadística, mientras si lo es la dispersión. Sin embargo, cuando se haga referencia a la variabilidad se hará en el sentido aleatorio.

Por dispersión se entiende la variabilidad aleatoria respecto a una medida de posición central (o respecto a un modelo, en general) de una distribución de datos o de probabilidad.

Todo este análisis se realiza con dos objetivos, uno es dar cuenta de la dificultad que entraña el concepto en otras lenguas, debido a la dificultad de la terminología, ya que cuando el lenguaje es ambiguo es difícil trabajar sobre la noción que entraña. Otro objetivo es hacer notar que la traducción de documentos no es sencilla por el uso indiscriminado de términos que según unos autores son sinónimos y según otros no, y cada uno los usa en un sentido.

En castellano, en realidad, no se tiene el problema de polisemia del término dispersión que se comentaba en el apartado 1.2.2., por tanto, no se encontrarán tantos problemas como se han introducido en los apartados posteriores y se podrá usar diferenciada y claramente los conceptos dispersión y medidas de dispersión.

1.4. Características de la variabilidad aleatoria.

Una vez que se ha aclarado la terminología, se profundizará en el concepto, y en qué genera esta variabilidad aleatoria.

Moore y Cobb (1997) indican que uno de los principales motivos por los que la Estadística es necesaria es por la omnipresencia de la variabilidad, efectivamente, esa es una de sus cualidades, la omnipresencia, a continuación, se analizan todas:

- Omnipresencia: la variabilidad está presente en todos los actos de la vida cotidiana, es decir, no existen dos medidas iguales de un evento ni dos productos iguales obtenidos de un procedimiento mecánico, además de endémica del sistema la variabilidad puede ser inducida en la recogida de datos a través de la medida, de la muestra o accidentalmente.
- Tiene consecuencias prácticas: a causa de la variabilidad es difícil establecer modelos predictivos, para ello se tienen que crear modelos estadísticos basados en el principio de erradicar el "ruido" creado por la variabilidad.
- La Estadística da una forma de entender la variabilidad.

Ante este fenómeno que se da en todos los aspectos de la vida, que nos afecta, pero que se puede entender, según Wild y Pfannkuch (1999) se pueden tomar tres tipos de actitud o de respuesta:

1. Ignorarla: efectivamente, se puede hacer como que la variabilidad no existe.
2. Permitirla: si se considera y se permite en el sistema da la posibilidad de anticipar el diseño de los sistemas, productos, etc., … para que se vean lo menos afectados posibles por ella.
3. Cambiar el patrón (controlarla): se pueden buscar relaciones entre variables de manera que se controle la variabilidad, si esto no es posible se puede estimar el grado de variabilidad y trabajar con ello. Esto se puede hacer en ciertos ámbitos, por ejemplo, en las tallas de ropa o en las de zapatos.

En vista de esto, lo ideal cuando se plantea un experimento es que se sea capaz de explicar, predecir y controlar la variabilidad, pero para explicar la variabilidad se debe comprender por qué ocurre, así, a continuación, se identificarán las fuentes de variabilidad, subrayando la importancia de conocerlas.

Según Franklin et al. (2007) las fuentes de la variabilidad se pueden clasificar según cuatro criterios:

1. Variabilidad en la medida: si se repiten varias veces una medida de un mismo hecho o evento las mediciones variarán entre sí. Puede deberse a cambios en el ambiente o en las circunstancias de la media, pero principalmente la variabilidad en la medida tiene dos posibles fuentes, puede provenir del instrumento de medida o de la persona que mide.

a. Herramienta de la medida: Las herramientas de medida tienen un límite, no pueden medir de forma infinitamente precisa, es un problema tecnológico y se puede anticipar.
b. Persona que mide: Son numerosos los errores que puede cometer una persona midiendo, pero se destacarán dos, mal posicionamiento y de lectura o paralaje. Estos errores se pueden reducir tecnológicamente escogiendo métodos de medida en los que se minimiza el papel de la persona que mide.

2. Variabilidad natural: si se repite una misma medida en diferentes especímenes de una misma especie, o individuos la medida varía. Los individuos son diferentes, por ejemplo, si se mide la altura o el peso de los alumnos de un aula, difícilmente coincidirán.
3. Variabilidad inducida: la variabilidad se puede inducir también. Por ejemplo, si se plantan una serie de semillas en dos lugares diferentes se tendrá por un lado la variabilidad natural debida a que las semillas son diferentes, pero se induce un nuevo elemento de variabilidad al plantarlas en terrenos diferentes (con clima, terreno, horas de sol, … diferentes), al utilizar fertilizantes diferentes, al cuidarlas de manera diferente, por tanto, a la variabilidad natural se le han introducido nuevas variables que generarán una variabilidad inducida.
4. Variabilidad en el muestreo: el mejor ejemplo que se puede poner acerca de este tipo de variabilidad es el de los sondeos electorales, si se seleccionan dos muestras diferentes para realizar un sondeo en el que se pida el partido político al

que se va a votar, en ambas muestras se tendrán resultados diferentes. Una de las dificultades que suele presentarse en un experimento es escoger una muestra que represente apropiadamente a la población completa dentro de una variabilidad conocida.

Wild y Pfannkuch (1999) agrupan las fuentes de variabilidad de una forma diferente:

1. Real: característica del sistema o elemento a medir, sería comparable a la variabilidad natural que se enunciaba anteriormente.
2. Inducida: que divide a su vez en tres causas.
    a. De medida: es igual que la variabilidad de medida enunciada anteriormente.
    b. De muestra: es igual a la variabilidad de muestreo enunciada anteriormente.
    c. Accidental: en este caso la variabilidad vendría inducida por una mala elección de la colección de datos o del procedimiento para tratarlos.

Por tanto, cuando se plantea un experimento hay que ser capaz de explicar cuáles van a ser las fuentes de variabilidad y predecirlas si no nuestro experimento no arrojará un resultado correcto. Para cuantificar el impacto de la variabilidad en el experimento se tienen, precisamente, las medidas de dispersión.

Una vez que se explica y predice la variabilidad existen técnicas para controlar las fuentes de variabilidad en nuestros experimentos que vienen dadas por la Estadística.

Como ejemplo, para reducir la variabilidad en la medida debida al aparato de medida se aplica la teoría de errores, que viene ampliamente explicada en la mayoría de libros de ciencias de primer curso universitario y en libros específicos como Guerrero y Díaz (2007), mientras que para controlar la dependiente del sujeto que mide se realiza una formación adecuada de los técnicos de laboratorio e investigadores en general. Para controlar la variabilidad en el muestreo existen programas informáticos que introduciendo la población y las características que se desean medir dan las características de una muestra representativa con un porcentaje de certeza (95% ó 99% dependiendo del caso.) Sin embargo, con la variabilidad natural se tiene que convivir. En ocasiones se podrá reducir (que no eliminarla) en determinados experimentos como indica Utts (2014) en un ejemplo de experimento médico en el que reduce el efecto de la variabilidad natural en el resultado utilizando un doble procedimiento ciego y realizando numerosas medidas de un mismo hecho para reducir la variabilidad, aunque en otras ocasiones no se pueda reducir se puede cuantificar a través de las medidas de dispersión.

Algunas de estas técnicas de reducción o control de la variabilidad se basan en medidas de dispersión, esto se puede ver en Zuñiga (s. f.), Bureau International des Poids et Mesures (s. f.) o en Bich, Cox, y Harris (2006) donde se toma como referencia la desviación típica para la elección del número de medidas a tomar en un experimento, aumentando el número de medidas si la desviación típica es alta (para evaluar si es alta utilizan el coeficiente de variación).

Por tanto, se puede decir, que las medidas de dispersión ayudan a controlar y explicar la variabilidad aleatoria en procesos experimentales.

1.5. Desarrollo histórico de los conceptos de dispersión y medidas de dispersión

Una vez analizados la situación actual de los conceptos de variabilidad aleatoria y dispersión lo primero que se puede preguntar es cómo y cuándo se descubrieron los fenómenos asociados a la variabilidad y cómo decidieron cuantificarla. A estas preguntas trata de dar respuesta este apartado.

Los primeros que se encontraron con este problema son los Babilonios hace 2300 años en diferentes estudios astronómicos, estudiando la posición de algunos objetos celestes. Puede que se encontraran antes con este problema muy posiblemente en la agrimensura también, al no ser las herramientas de medida homogéneas y las referencias ser antropomórficas, personas diferentes o una misma persona tomaría medidas diferentes y tendrían que buscar un criterio para resolver estas disputas, pero esto no está documentado y tan sólo es una suposición.

Entre los años 500 y 300 a.C. los astrónomos babilonios desarrollaron teorías que predecían el movimiento del sol y otros astros, pero para los parámetros básicos necesitaban una correlación entre observación y predicción y aquí surge el problema Pearson, Kendall, y Plackett (1970), relatan que el problema inicial surge en torno a la media, pero evidentemente derivado del problema de la media surge el de la dispersión ya que la media es necesaria calcularla cuando se tienen diversas medidas de un mismo hecho que no dan el mismo valor, de los babilonios sólo se sabe que se encontraron con el problema, pero la historia que llega de ellos a través de las piedras con escritura cuneiforme no da información acerca de cómo lo resolvieron.

En el mismo texto se introduce también el caso de Hiparco, que investigaba el paso del sol por un punto durante el solsticio y descubrió desigualdades y entonces se cuestionó sobre si el año tropical es constante o no, sin embargo, él tenía en cuenta su error en la medida, que cuantificó como $\frac{1}{4}$ de día, para esto utilizó el semi – rango de sus observaciones, en las que él fijaba una variación máxima de $\frac{3}{4}$ de día. (Pearson et al., 1970). Como se puede ver tuvo la necesidad de caracterizar su error, ya que se percató de que no obtenía la misma medida en cada ocasión y que esto no dependía en sí del hecho de que el sol no pasase por el mismo punto, sino de la inexactitud de sus herramientas de medida. Es el primer uso de una medida de dispersión que está documentado, y aunque lo hace de manera un tanto rudimentaria, la intención es clara.

Sin embargo, no es hasta el año 1600, en el que Galileo (1564 – 1642) hace la primera descripción matemática del error, en la que describe la distribución del error como simétrica, tal y como indica Salinero (2006),

> La principal contribución de Galileo a la teoría de la Probabilidad fue la creación de la teoría de la medida de errores. Según Galileo, los errores de medida son inevitables y los clasificó en dos tipos: los errores ‘sistemáticos’, debidos a los métodos y las herramientas de medida; y los errores ‘aleatorios’, que varían impredeciblemente de una medida a otra” (p. 2).

Además, Galileo dijo que estos valores se agrupaban alrededor de un “valor verdadero” en el que ya se intuye el concepto de media. Se puede considerar que Galileo puso la primera piedra para la construcción de la Estadística. Así pues, Galileo fue quien realizó la primera discusión seria acerca del error, como resumen de esta discusión se plantean las siguientes propiedades del error aleatorio:

> La distancia de una estrella desde el centro de la Tierra es descrita por un solo número, la distancia real.
> Todas las observaciones son sensibles al error debido al observador, a los instrumentos y a las condiciones de la observación.
> Las observaciones están distribuidas simétricamente alrededor del verdadero valor, que es el cero de la distribución simétrica de errores.
> Los errores pequeños son más frecuentes que los grandes.
> Los errores aleatorios de las observaciones nos llevan a errores aleatorios de una función de las observaciones que pueden ser grandes, incluso si los errores de observación son pequeños (Hald, 1998, p. 33).

Galileo no especificó ninguna ley de errores, pero por ejemplo de lo anterior se infiere que existe una cota superior del error. En la misma obra se dice acerca de la cota del error:

> El modelo de medida de errores es un modelo biparamétrico que envuelve un parámetro localizado, el valor verdadero, y un parámetro de escala. Analizando la distribución de la media de errores los primeros probabilistas normalmente asumían que la cota superior del error es conocida, esto significa que el parámetro de escala es conocido. La asunción de una cota finita para el error creó numerosas dificultades para el análisis matemático de la distribución de la media" (Hald, 1998, p. 34).

Entre los siglos XVI y XVIII diversos científicos y matemáticos estudian la distribución de las medidas, lo que se puede considerar como el estudio de la variabilidad de los errores de medida, que en la literatura se ha llamado "las leyes de error".

Las leyes del error primero se suponen de rango limitado, a finales del siglo XVIII se considerarán con rango ilimitado.

Así pues, no es hasta el siglo XVIII cuando algunos autores comenzaron a plantearse como se distribuirían las medidas y a plantear posibles distribuciones para el error.

En 1722 se publicó póstumamente la obra de Roger Cotes (1682 – 1716) "Opera Miscellanea" que contiene un artículo con un método para determinar el resultado más probable de un número de observaciones, esta es la primera obra en la que se considera la teoría de errores. Más tarde, en 1755 (aunque la publicación de los resultados fue en 1756), Simpson (1710 – 1761) publicó los axiomas que dicen que los errores positivos y negativos son equiprobables y da una distribución de probabilidad del error que está acotada.

En esta época se consideran varios tipos de distribución (limitadas e ilimitadas, continuas y discretas) que siguiendo el desarrollo de Eisenhart (1983a) y de Estepa y Del-Pino (2013) se exponen a continuación:

1. Distribución rectangular o discreta uniforme: es de rango limitado y fue Simpson en 1756 quien la propuso y pertenece a las de rango limitado ya que está definida en el intervalo [-v, v]. La idea es tomar los errores posibles como –v, –v+1, …, -2, -1, 0, 1, 2, …, v-1, a, todos ellos con la misma probabilidad. Siendo cada uno de los valores de los errores considerados, es decir, si v es el verdadero valor y x es el valor observado, entonces e = x-v pertenece a [-v, v] La expresión, general de la función de probabilidad sería $P_r[X = x] = \frac{1}{2v+1}$ con x = [-v, v], si se considera v = 5 se obtiene el gráfico de la figura 1.

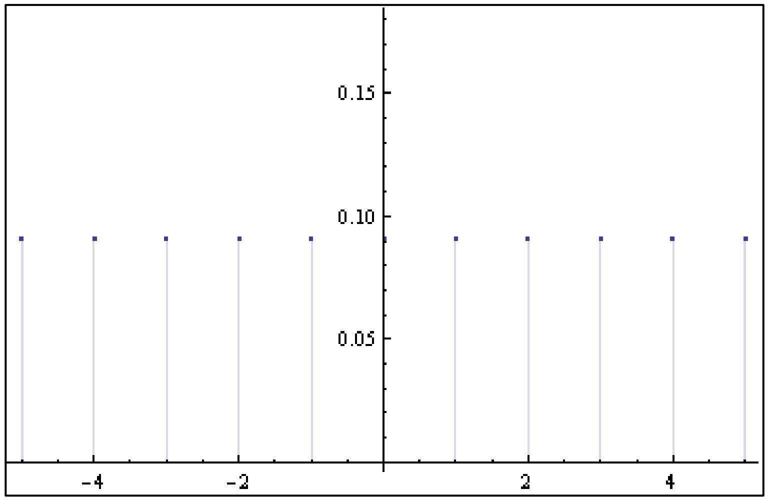


Figura 1. Distribución rectangular para v=5

2. Distribución discreta triangular isósceles: un intento de mejora de la distribución anterior vino también de la mano de Simpson casi al mismo tiempo que la anterior, en este caso supone que los errores toman los valores enteros 1, 2, …, v-1, v, v+1, ..2, 1, y las probabilidades se calcularían mediante la fórmula: $P_r[X = x] = \frac{(v+1)-|x|}{(v+1)^2}$, con x = [-v, v] para v = 5, se tiene, $P_r[X = x] = \frac{6-|x|}{36}$, cuya representación gráfica se observa en la figura 2.

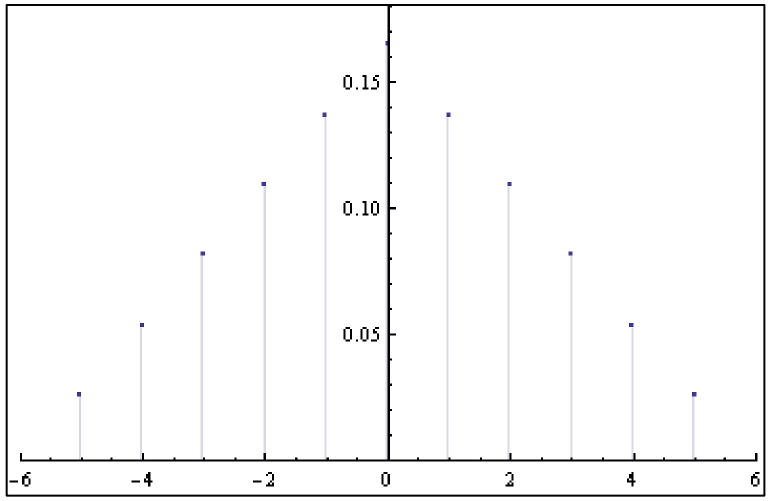


Figura 2. Distribución discreta triangular isósceles para v=5

3. Distribución continua triangular isósceles: Simpson, un año después, partiendo de la distribución discreta triangular tomando valores –kv, -k(v-1), …, -k, 0, k, …, k(v-1), kv con probabilidades proporcionales a 1/k, 2/k, …, v/k, (v+1)/k, v/k, …, 2/k, 1/k y haciendo los límites $k \to \infty$ y $v \to 0$ con $kv \to a$ obtuvo la distribución continua triangular isósceles que pertenece al grupo de las limitadas continuas. La función de distribución queda definida como $f_x(x) = \frac{a-|x|}{a^2}$ con $-a \leq x \leq a$ para a = 1 se tiene $f_x(x) = 1 - |x|$, cuya representación gráfica se muestra en la figura 3.

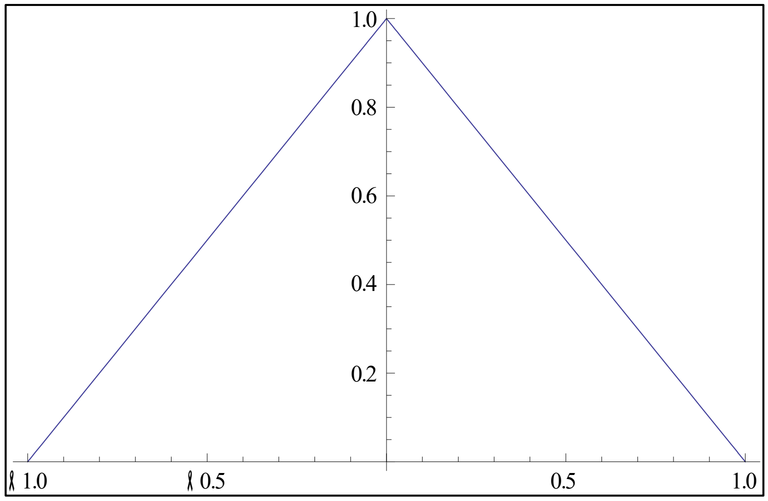


Figura 3. Distribución continua triangular isósceles para a=1.

4. Distribución rectangular continua o uniforme continua: Siguiendo las ideas de Simpson y partiendo del método de generación de funciones de probabilidad de De Moivre[1] – Simpson, Lagrange extendió esta idea a funciones continuas después de reproducir los resultados de Simpson con funciones discretas. De esta forma por el paso al límite como se ha visto en el caso anterior obtiene los resultados para las correspondientes distribuciones continuas triangular y uniforme, presentando esta última en 1776. En la figura 4 se da una

---

[1] De Moivre (1667 – 1754) trabajó en el cálculo del error profundamente en el libro “La doctrina de la probabilidad” (1718), en él desarrolla el primer método para calcular la probabilidad de un error de un tamaño determinado, cuando el error se expresa en términos de la variabilidad de la distribución como una unidad, y la primera definición de la probabilidad del error de un cálculo. Algo curioso sobre la vida de Abraham de Moivre es que acertó el día de su muerte, cierto día se percató de que dormía 15 minutos más diarios y predijo que su muerte sería el día que durmiese 24 horas, efectivamente así fue y murió el 27 de noviembre de 1754.

representación gráfica de la distribución uniforme continua $f_x(x) = \frac{1}{a+b}$, con $-a \leq x \leq b$ para a = 2 y b=3.

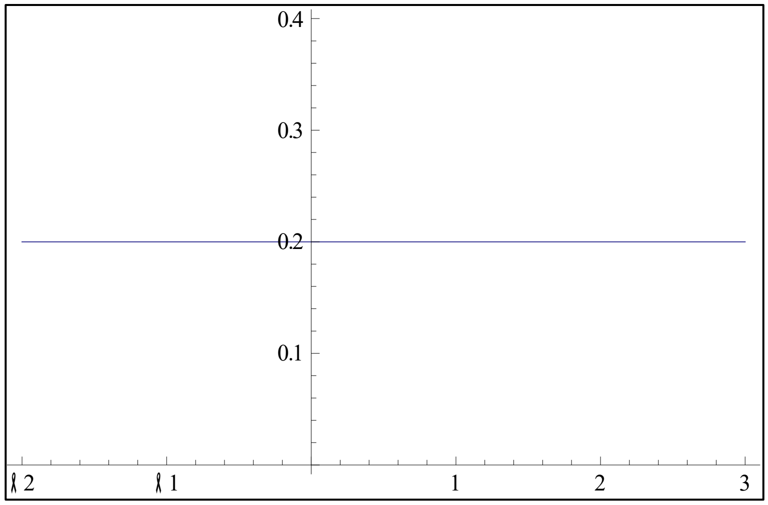


Figura 4. Distribución rectangular continua o uniforme continua con a=2 y b=3

5. Distribución semi-circular continua: Lambert (1728-1777), a través de sus observaciones en fenómenos ópticos, estudió la forma de la distribución de error de forma experimental y teórica y partiendo de una serie de hipótesis propone la distribución semi-circular. $f_x(x) = \frac{2}{\pi a^2}\sqrt{a^2 - (x-\mu)^2}$, $\mu - a \leq x \leq a + \mu$ (Hald, 1998) Si se hace μ=0 y a=1, queda la figura 5. De nuevo, llega con posterioridad a la distribución circular haciendo las siguientes consideraciones. Si se observa una estrella sin telescopía, a simple vista, se ve un punto. Si se observa con telescopio, aparece un círculo. La línea del telescopio divide al círculo, aleatoriamente, en dos partes, la probabilidad de que un punto pertenezca a una de las partes es proporcional al área de esa parte. Supongamos que esa línea es perpendicular a un diámetro horizontal del círculo, con el ojo desnudo parece un radio.

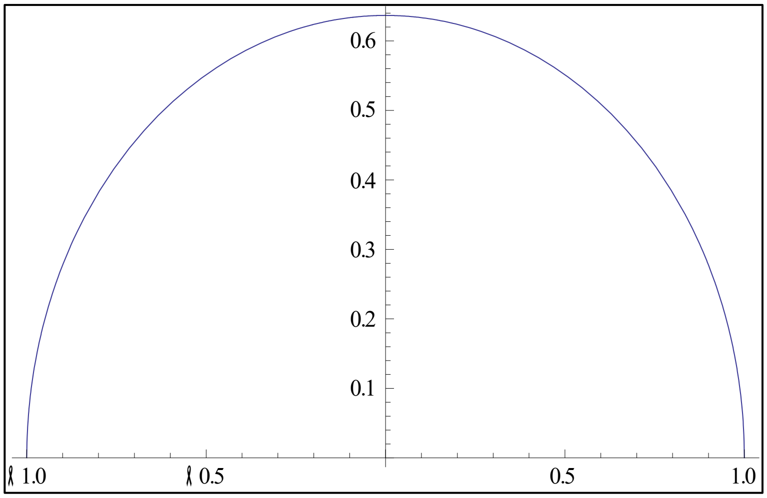


Figura 5. Distribución semi-circular continua con μ=0 y a=1

6. Distribución continua parabólica: Casi simultáneamente a las distribuciones uniforme continua, coseno y triangular continua, Lagrange La distribución parabólica fue estudiada por Lagrange, trabajó en este tipo de distribución, de la que afirmaba que es "la más simple y la más natural que uno pueda imaginar". (Eisenhart, 1983a, p.539) Laplace también trabajó en esta distribución desarrollándola aplicando el estimador del error absoluto de la media mínima a su distribución doble exponencial. $f_x(x) = \frac{6}{(a+b)^3}(a+x)(b-x), \ -a \leq x \leq b$ Que es la forma más general de la distribución (y asimétrica), si se hace a = b = 2 se obtiene la representación simétrica que se observa en la figura 6.

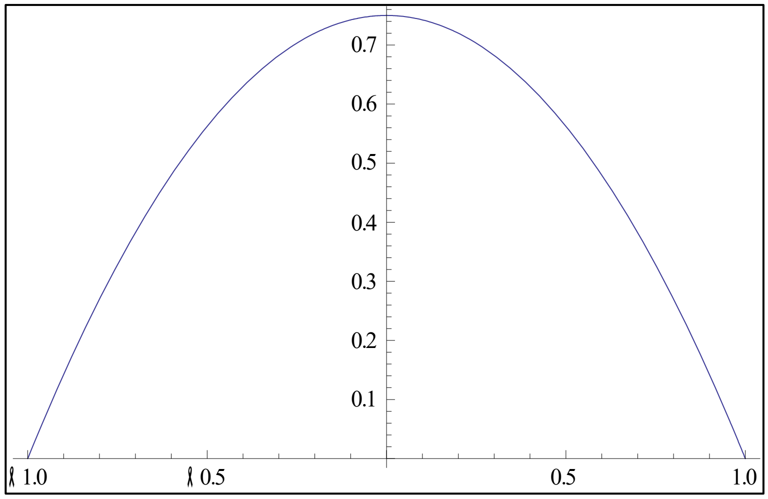


Figura 6. Distribución continua parabólica con a=b=2

7. Distribución coseno: Lagrange, a partir de 1776, año en el que publica su "Miscellanea Taurinensia" comienza a estudiar los diferentes problemas, uno que llama su atención es el problema XI, a partir del cual deriva la distribución coseno que toma la siguiente forma $f_x(x) = \frac{\pi}{4} cos\left(\frac{\pi x}{2}\right), -1 \leq x \leq 1$ y es la que está representada en la figura 7.

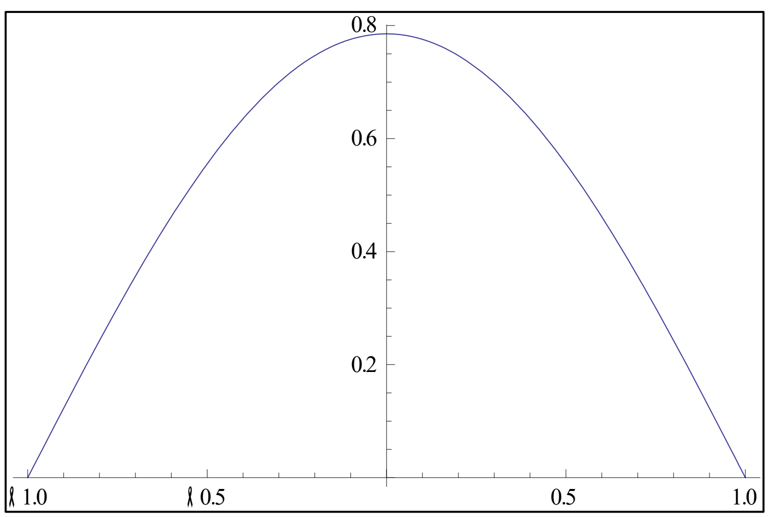


Figura 7. Distribución coseno

8. Distribución de Laplace de rango finito: En el artículo XIII de sus "Mémoires extraits des recueils de l'Académie des sciences de Paris et de la classe des sciences mathématiques et physiques de l'Institut de France" (1781) recogidas después en su obras completas, discute varias distribuciones de probabilidad, entre ellas la distribución de probabilidad de las destrezas de un jugador en un juego y de los intervalos entre puntos aleatorios en una línea de longitud a. Laplace propone, que cuando el error X de una medida individual u observación puede tomar valores solamente entre –a y a, y se ignora la ley de la probabilidad de los errores, se puede tomar $f_x(x) = \frac{1}{2a}\log\frac{a}{|x|}$, como la distribución de probabilidad de un error X. Para a = 2, se tiene la representación gráfica se da en la figura 8 (Eisenhart, 1983a; Estepa y Del-Pino, 2013).

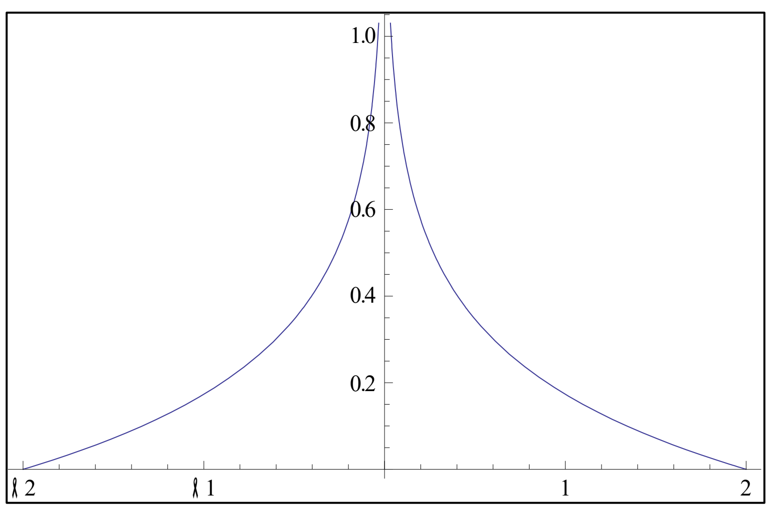


Figura 8. Distribución de Laplace de rango finito para a=2

9. Distribución de Laplace o doble distribución exponencial: Hasta 1774, las distribuciones de error que se empleaban eran finitas, como se ha mostrado en los

puntos anteriores, sin embargo, en ese año Laplace comienza a cuestionarse errores de tipo infinito, cuando la curva que los representa tiende en el infinito a 0. Como indica Hald (1998), Laplace era consciente de que la curva debía ser simétrica y hasta ese momento solo había considerado distribuciones de rango finito, sin embargo, planteó la curva más simple que era simétrica, con un máximo en el origen de coordenadas y decrece de forma asintótica: $f(x) \propto e^{-mx}, x > 0, m > 0$

> Laplace no elige la exponencial debido a su simplicidad, la obtiene por medio del principio de indiferencia (se deben asignar probabilidades iguales a cada una de varias alternativas simples, si no hay razón conocida para preferir otra cosa).
> Comienza observando que si no hay razón para suponer ningún punto en el eje más probable que otro entonces se tomaría *f(x)* constante, lo que significa que la curva de error sería "*una línea recta infinitamente cercana al eje de abscisas*". Esta hipótesis debe ser rechazada porque se opone a lo que se conoce sobre la forma de la curva de error. En un segundo intento toma *f'(x)* igual a una constante negativa, lo que le conduce a la curva de error triangular, se debe rechazar esta hipótesis porque llevaría a una acotación del error.
> Finalmente, Laplace observa que no solamente las ordenadas de *f(x)*, sino también las diferencias de las ordenadas *–d(f(x))* deben decrecer para x>0, y ya que no tenemos razones para suponer una ley diferente para las ordenadas que para las diferencias, se sigue que no debemos, de acuerdo con las leyes de las probabilidades, suponer que la razón de dos diferencias consecutivas infinitamente pequeñas sea igual que las correspondientes ordenadas, es decir $\frac{df(x+dx)}{df(x)} = \frac{f(x+dx)}{f(x)}, -\infty \leq x \leq \infty$, en consecuencia, $f'(x) = -mf(x)$, m>0, por tanto, $f(x) = \frac{m}{2} e^{-m|x|}, -\infty \leq x \leq \infty$, la constante m/2 se ha determinado por el requisito de que $\int f(x)dx = 1$ (Estepa y Del-Pino, 2013, p. 58).

Una representación gráfica para m = 2 se da en la figura 9.

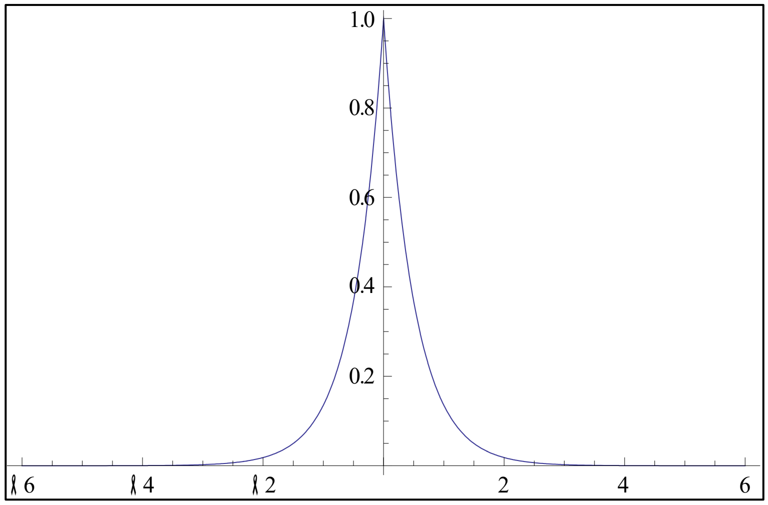


Figura 9. Distribución de Laplace o doble distribución exponencial para m=2

En honor a su autor, esta distribución del error se conoce como la de Laplace. Como se indicaba anteriormente, hasta este momento todas las distribuciones eran de rango finito y esta es la primera distribución de rango infinito.

10. Ley de error de Gauss: Cuando Gauss va a hacer la propuesta de su ley de errores se plantea varios aspectos, en primer lugar, parte de que la distribución de los errores debe ser una función unimodal y simétrica y reemplaza la condición de Laplace de continua por la condición de que sea diferenciable, además utiliza la apreciación de Laplace de que cuando tiende a infinito debe aproximarse a cero. Adicionalmente considera que la media aritmética es el valor más probable de las observaciones cuando se realizan bajo las mismas condiciones.

Con las condiciones que se han expuesto obtiene la función $f_x(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2x^2}, -\infty \leq x \leq \infty \quad 0 < h < \infty$ siendo h la medida de precisión de las observaciones y toma el valor de $h = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$, se puede ver la representación para σ = 2 en la figura 10.

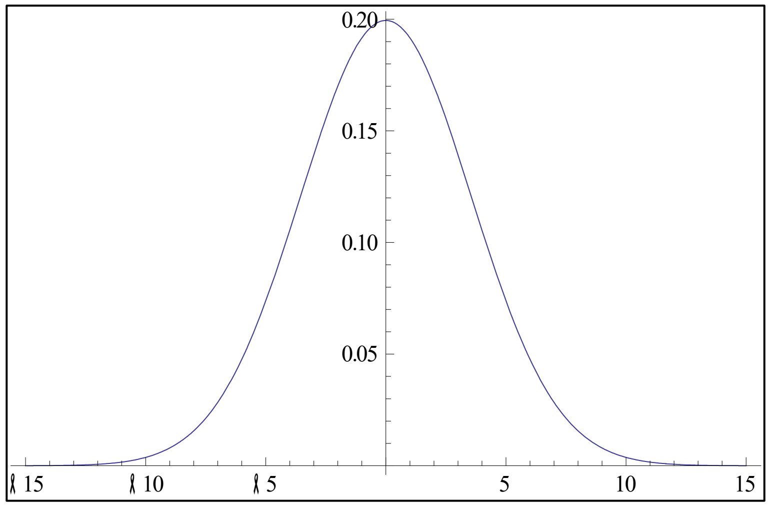


Figura 10. Ley de error de Gauss con σ = 2

11. Distribución de Cauchy: Fue propuesta por Poison en 1824, en la demostración del teorema del límite central, en un ejemplo. La fórmula general es $f_x(x) = \frac{1}{\pi\beta\left(1+\frac{x^2}{\beta^2}\right)}, -\infty \leq x \leq \infty, 0 < \beta < \infty$. Como la suma de los errores distribuidos de acuerdo con la distribución de Cauchy no tiende a la ley gaussiana del error en el límite, se concluye que la media aritmética de varias observaciones no proporciona mejor estimación del verdadero valor que si se toma una medida elegida al azar. En la figura 11 se tiene la representación para β=1

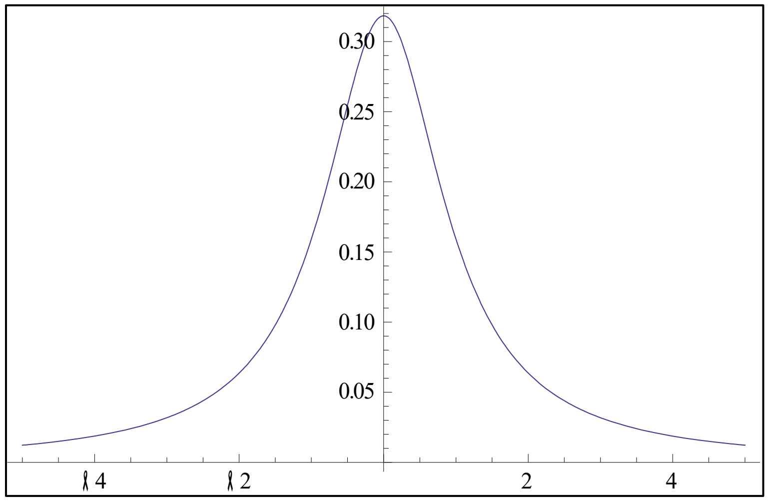


Figura 11. Distribución de Cauchy para para β=1

Posteriormente se desarrollaron otras leyes no Gaussianas, debido a que en algunos fenómenos se observaban discordancias entre la medida y la teoría, la curva de Pearson o las series de Gram-Charlier y de Edgeworth (Eisenhart, 1983b).

En 1810 Gauss (1777 – 1855) también presentó un método de mínimos cuadrados y estableció que la ecuación de la desviación estándar con respecto a la media es igual que la desviación estándar de una distribución dividida por la raíz cuadrada del número de datos (Hart, 1983). Más tarde en 1815 adoptó el termino de error probable, pero no fue el primero en utilizar este término, ya que el primero fue Bessel (1784 – 1846), también publicó las tablas de error dadas en términos de $\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ y utilizó la desviación media como medida alternativa de la dispersión.

En 1830, Encke (1791 – 1865) a través de sus trabajos en astronomía trabajó en mejoras para el método de los mínimos cuadrados (Busto y Escribano, 2006) y derivó varios errores estándar, también contribuyó al cálculo del error probable.

En la siguiente década De Morgan (1806 – 1871) propuso varias medidas para la dispersión como el balance medio que definió como $\frac{\sum \text{desviaciones}}{\text{N}}$ o el error medio que se obtiene de la siguiente expresión $\frac{\sum \text{valor numérico de las desviaciones}}{\text{N}}$ y utilizó el error estándar.

Cerca de 1860, Airy (1801 – 1892) que tenía por profesión la de astrónomo además de la de matemático (se puede observar que es característico que la mayoría de las evoluciones de la teoría de errores y de la dispersión viene de mano de astrónomos y debido a la observación celeste) introdujo los siguientes conceptos:

Modulo: $\text{C} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$
Error medio: $\frac{\text{C}}{\pi}$
Cuadrado medio: $\frac{\text{C}^2}{2} = \sigma^2$
Error cuadrático medio de la medida: $\frac{\sum(\text{error aparente})^2}{\text{N}-1}$
Error cuadrático medio de la media: $\frac{\sum(\text{error aparente})^2}{\text{N}(\text{N}-1)}$
(Hart, 1983).

Y en 1870 Chebysev (1821 – 1894) publicó su famosa desigualdad $P(|X-\mu| > k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$ que establece una cota inferior a la probabilidad P de que el valor de una variable aleatoria X con desviación típica σ esté a una distancia de la media μ.

En esta etapa son tres los autores que generan un cambio en la forma de aplicar la Estadística, Edgeworth, Galton y Pearson, que propusieron un método empírico que sustituye los experimentos en las ciencias donde no es posible realizarlos y que ya se había empleado anteriormente con éxito en la psicología. Cada uno de ellos trabajó en un área, Edgeworth era economista y matemático autodidacta (estudió derecho) y aplicó el nuevo método a la economía, Galton trabajó en antropología y Pearson en filosofía de la ciencia.

En 1885 Edgeworth (1845 – 1926) comparó medidas de dispersión para diferentes distribuciones y enunció una serie que lleva su nombre. Estas series aproximan una distribución de probabilidad a través de cumulantes, que son una alternativa a los momentos, se calculan de forma parecida y tienen propiedades similares. También trabajó en una versión del teorema central del límite que

> establece, en líneas generales, que bajo ciertas condiciones, un promedio muestral sigue aproximadamente la ley probabilística normal, sin importar que comportamiento probabilístico tiene la población de donde provienen las observaciones, si el número de observaciones es grande (Galbiati Riesco, 2002, p.2).

Cinco años antes, Galton (1822 – 1909) ajustó estadísticamente datos acerca de genética. Más exactamente, estudió la transmisión de la inteligencia, entre algunos de sus logros en la Estadística son la invención de la línea de regresión o la máquina Quincunx para demostrar la ley del error, también fue pionero en el uso de la distribución normal y en 1888 introdujo el concepto de correlación que es su trabajo más conocido y que más tarde nuestro siguiente protagonista, Pearson, desarrolló.

Karl Pearson (1857 – 1936) fue el padre de la bioestadística, trabajó como se ha dicho en la cuantificación de la correlación en forma de coeficiente e introdujo la ji-cuadrado para comparar dos tablas de frecuencias con el objetivo de probar el ajuste de un conjunto de datos de un experimento a una ley probabilística. Fue el primero en utilizar la desviación estándar como indica Hart (1983).

> El término desviación estándar fue introducido por Pearson en conferencias sobre "Las leyes del azar" en enero de 1893, pero antes de que términos tales como error probable o error estándar se utilizaran en el contexto del error experimental y las leyes del error (p.17).

Ese mismo año, 1900, Yule (1871- 1951) introdujo junto a Pearson, del que era colaborador la correlación y su gran aporte es el de relacionar la regresión con el método de mínimos cuadrados, además fue el primero en introducir el concepto de error estándar.

Poco más tarde, en 1905, Gosset (1876 – 1937) bajo el pseudónimo de Student publicó "El error probable de una media" en Biometrika, revista fundada por Pearson, más tarde introdujo la distribución t como alternativa a la distribución normal para muestras pequeñas, fue amigo de Pearson y de Fisher (1890 – 1962). Este último introdujo la inferencia estadística maximizando la función de verosimilitud, la aleatorización y otras numerosas herramientas del test de hipótesis y la creación de experimentos a través de sus trabajos en el sector agrícola, además fue el primero en emplear el término varianza.

Posteriormente se desarrollaron los ordenadores y con ellos el cálculo moderno, aunque la Estadística sigue progresando este es el momento de entender con más profundidad todos los conceptos desarrollados hasta el momento, para poder romper los límites impuestos por el cálculo convencional y aprovechar al máximo las herramientas que esta época ha dado, así se muestra como el inicio de la dispersión y de la Estadística en sí comenzó en lo más grande que conocemos, las estrellas (mediante la astronomía) para estar actualmente en lo más pequeño (microchips).

También se observa que el desarrollo de las medidas de dispersión ha venido, en gran medida, influenciado por las leyes de error, teoría de la probabilidad y un intento de toda la humanidad por ser más precisos en sus medidas.

Para concluir este apartado se va a presentar una tabla resumen que realizó Hart (1983) donde previamente señalaba que cuando estas ideas se presentan a estudiantes debe considerarse el esfuerzo que necesitaron "es poco razonable presentar una idea como intuitivamente obvia si tomó más de 50 años desarrollarla" (p.17) y mucho menos si llevó casi 300 como podemos observar en la tabla 2.

Tabla 2.Desarrollo histórico de las medidas de dispersión. (Hart, 1983, pp.18-20)

Fecha aproximada	Nombre	Resultado
1600	Galileo	Describió las distribuciones de error como simétricas con los errores grandes menos probables que los errores pequeños.
1720	De Moivre	Obtuvo la distribución normal (a partir de la expansión binomial) Fijo la ordenada máxima de la curva de error
1755	Simpson	Trabajó con dos distribuciones discretas para la ley del error (triangular y rectangular)
1780	Daniel Bernouilli	Propuso una distribución circular para la ley del error. Comenzó el trabajo de mínimos cuadrados.
1780	Laplace	Obtuvo la ley del error (normal)
1805	Legendre	Publicó el método de mínimos cuadrados sin prueba.
1810	Adrain	Probó la ley del error (normal) Dio el principio de mínimos cuadrados.
1810	Gauss	Obtuvo la ley del error, definió $h=1/\sigma\sqrt{2}$ como medida de precisión, enunció el principio de mínimos cuadrados, indicó que la desviación estándar de una media es la desviación estándar de la distribución dividida por la raíz cuadrada del número de casos
1815	Bessel	Primer uso del término "error probable", usado en contexto de geodesia, astronomía y artillería
1815	Gauss	Adoptó el término "error probable". Publicó las tablas que mostraban las probabilidades de que un error se desviara respecto a la media más de ciertas cantidades. Las desviaciones están en términos de $\sigma\sqrt{2}$ o del error probable. Dio el error probable de un momento, y **usó la**

Fecha aproximada	Nombre	Resultado
		desviación media como una medida de dispersión alternativa.
1820	Laplace	Probó la ley normal y el método de mínimos cuadrados
1825	Gauss	Descubrió la desigualdad $P(\|X-\mu\| \geq \lambda\sigma) \leq \begin{cases} 1-\lambda\sqrt{3} & (\lambda \leq 2/\sqrt{3}) \\ 4/(9\lambda) & (\lambda \geq 2/\sqrt{3}) \end{cases}$ Para algunas distribuciones continuas simétricas acerca de su modo sencillo μ. Publicó trabajos en modelos lineales
1830	Encke	Trabajó en mínimos cuadrados. Obtuvo varios errores estándar y errores probables
1840	De Morgan	Propuso varias medidas de dispersión Balance medio = $\frac{\sum \text{desviaciones}}{\text{N}}$ Error medio = $\frac{\sum \text{valor numérico de las desviaciones}}{\text{N}}$
1840	De Morgan	Usó el error estándar de la media
1860	Airy	Usó los términos Modulo: $\text{C} = \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$ Error medio: $\frac{\text{C}}{\pi}$ Cuadrado medio: $\frac{\text{C}^2}{2} = \sigma^2$ Error cuadrático medio de la medida: $\frac{\sum(\text{error aparente})^2}{\text{N}-1}$ Error cuadrático medio de la media: $\frac{\sum(\text{error aparente})^2}{\text{N}(\text{N}-1)}$ Error probable de la media = 0,6745·error cuadrático medio
1870	Chebyshev	Publicó su desigualdad, que relaciona la probabilidad de la desviación de la media.
1880	Helmert	Obtuvo la distribución de $\sum(X-\bar{X})^2$
1880	Galton	Ajustó datos genéticos a la distribución normal
1885	Edgeworth	Comparó medidas de dispersión de diferentes distribuciones. Observó el teorema central del límite
1890	Galton	Dio aplicación a la distribución normal para diferencias, desviaciones, dispersiones, etc., también errores experimentales. Desarrolló la regresión, correlación y la normal bivariante.
1895	Pearson	Trabajó en los momentos y el error probable de los momentos. Hizo analogías con estáticos gráficos
1895	Pearson	**Primer uso del término “desviación estándar”**
1900	Yule	Primer uso del término “error estándar”
1900	Pearson	Obtuvo la desviación estándar de muchos estadísticos. Introdujo el test de la chi-cuadrado
1905	Gosset (Student)	Formalizó el trabajo de la desviación estándar

Fecha aproximada	Nombre	Resultado
1920	Fisher	Obtuvo la distribución t (de Student) **Primer uso del término "varianza"**

1.6. Importancia social de la dispersión

Como se acababa indicando en el apartado anterior, esta es la época del "Big Data", es decir, del manejo de conjuntos de datos muy grandes. La Estadística tiene una presencia importante en nuestras vidas, en la prensa, en la televisión, encuestas sobre el paro, sobre las preocupaciones de los españoles, la tasa de jóvenes que emigran. Pero en muchas ocasiones esos datos se presentan de manera tendenciosa que a ojos de personas que no tengan cierta cultura estadística pueden dar impresiones falsas. Como indican Batanero, Díaz, Contreras, y Roa, (2013),

> La importancia que actualmente recibe la enseñanza de la Estadística se debe a la necesidad, reclamada por la UNESCO y otras instituciones de proporcionar una cultura estadística que permita al ciudadano participar en la sociedad de la información. Dicha cultura es necesaria en actividades tan habituales como la lectura de la prensa o la interpretación de información en Internet, la participación en encuestas o elecciones o la interpretación de un diagnóstico médico. El término "statistical literacy" ha ido surgiendo de forma espontánea entre los estadísticos y educadores estadísticos, para resaltar el hecho de que la Estadística se considera hoy día como parte de la herencia cultural necesaria para el ciudadano educado (p. 8).

Dentro de la Estadística, la comprensión del fenómeno de la dispersión y cómo cuantificarlo es fundamental, tal y como indica Ballman (1997), que haciendo referencia a otros artículos desde 1988, se hace eco de la recomendación de estos de dar un especial énfasis a la comprensión y modelado de la dispersión (Ballman, 1997), la misma opinión se lee en Ben –Zvi que incluso dice que "la educación en Estadística proporciona herramientas que los ciudadanos informados necesitan para reaccionar inteligentemente a la información cuantitativa en el mundo alrededor de ellos" (Ben-Zvi y Garfield, 2004b). Incluso el famoso escritor H.G. Wells tiene una famosa cita al respecto "el pensamiento estadístico será algún día tan necesario para el ciudadano competente como la habilidad de leer y escribir"[2] (Wilks, 1951).

De esa misma idea se hacía eco no hace mucho una revista online, llamada Xataka (Jiménez, 2016) a través de la opinión de varios expertos como Ricardo Galli, fundador de la página web http://www.meneame.net o la profesora Carmen Batanero, en la que se indica que saber analizar, resumir y discernir qué datos son importantes es el reto y la competencia fundamental del s. XXI. En este artículo dice que "la alfabetización estadística es clave para ser ciudadanos competentes en el mundo de hoy" (Jiménez, 2016), y tal y como se indicaba en la introducción del tema, la dispersión y cómo se mide son fundamentales para poseer dicha alfabetización.

Esta opinión entronca además con lo que muestra la profesora Batanero sobre el sentido estadístico, donde indica que la variabilidad aleatoria es una de las ideas estadísticas fundamentales. (Batanero et al., 2013)

[2] Esta frase literal no es de H.G. Wells, la cita pertenece al estadístico Samuel S. Wilks en su discurso de posesión presidencial de la Asociación Americana de Estadística (JASA, vol. 46, N ° 253., p. 1-18). Wilks estaba parafraseando la obra "La humanidad en el hacer" de H. G. Wells.

Es importante que el profesor sea consciente del papel destacado de la dispersión en Estadística.

(Batanero et al., 2015, p.18)

Capítulo 2

Las medidas de dispersión en el curriculum

2.1. Introducción

Como indicaba Batanero (2001), parece que la Estadística en los institutos no va por el mismo camino de mejora e implantación que a nivel universitario, existen varios motivos para que esto ocurra

> esto indica la existencia de una problemática educativa que tiene su raíz en que la incorporación de la Estadística desde la escuela no es todavía un hecho. Aunque los currículos de Educación Primaria y Secundaria la incluyen, los profesores suelen dejar este tema para el final del programa y con frecuencia lo omiten. Los alumnos llegan a la universidad sin los conocimientos básicos y es preciso comenzar el programa repitiendo los contenidos de estadística descriptiva y cálculo de probabilidades que debieran haber asimilado en la escuela (Batanero, 2001, p.11).

Esta opinión la refuerza mucho después Sánchez y Orta (2013) quienes indican que

> en la mayoría de países modernos, desde hace décadas, se ha incorporado la Estadística en los currículos de los niveles básico, medio y universitario; sin embargo, los resultados aún son pobres. En efecto, la cultura estadística de un ciudadano promedio es inferior de lo que se asienta y pretende en los diversos programas (p.65).

Por este motivo es interesante analizar cómo está distribuida la enseñanza estadística y más concretamente el estudio de la dispersión a lo largo del currículum español.

Para analizar cómo plantean las medidas de dispersión en el currículum se tendrán en cuenta dos factores. En primer lugar, cómo ha ido evolucionando el papel de las medidas de dispersión en los cursos 3º y 4º de ESO y sus equivalentes en las diferentes leyes desde 1975. En segundo lugar, se analizarán los diferentes aspectos de la variabilidad aleatoria que se estudian en el curriculum actual y cómo configuran la noción de dispersión en los estudiantes.

2.2. Las medidas de dispersión en el currículum desde 1975 hasta la actualidad

2.2.1. Las medidas de dispersión en la Ley General de Educación - LGE.

En el curriculum de la Ley General de Educación (MEC, 1970) se establecía que el bachillerato no era obligatorio, por tanto la educación obligatoria concluía a los 14 años. El bachillerato constaba de tres cursos, los dos primeros serían los equivalentes en temporización académica global a los actuales 3º y 4º de la Educación Secundaria Obligatoria que son objeto del estudio actual. Por lo cual son los cursos cuyo curriculum se va a analizar.

Unos años después de la emisión de esta nueva ley educativa, se publicó el curriculum que definía los contenidos a trabajar en 1º de Bachillerato Unificado Polivalente (en adelante BUP), curso equivalente a 3º de ESO, que son los siguientes,

> Variables Estadísticas: Medidas de posición central y dispersión … Continuar el tratamiento estadístico de los colectivos iniciado en la Educación General Básica. (MEC, 1975, p.8064)

Para el curso 2º de BUP, que sería el equivalente a 4º de ESO, no se planteaba ningún contenido estadístico. Para el curso 3º de BUP, aunque no es objeto de este estudio, se planteaban contenidos de estadística bidimensional y cálculo de parámetros y recta de regresión. (MEC, 1975)

Como se puede ver, el curriculum no era muy explícito en cuanto a contenidos, pero las medidas de dispersión tan sólo se trabajaban en el curso primero durante el bachillerato.

2.2.2. Las medidas de dispersión en la Ley de Organización General del Sistema Educativo (LOGSE).

Posteriormente, en la década de los 90, se desarrolló una nueva ley educativa, en la que se incluía la obligatoriedad de la educación hasta los 16 años. Por tanto, los niveles que se analizan en este estudio pasaban a ser obligatorios. (MEC, 1990)

Los contenidos que se trabajan durante la etapa obligatoria quedan establecidos en el Real Decreto 1345/1991 y se plantean como conceptos, dentro de la triple dimensión que se les otorgó a los contenidos, como conceptos, procedimientos y actitudes.

En dicho Real Decreto, dentro del Bloque 4, "interpretación, representación y tratamiento de la información" se indica:

> 5. Parámetros estadísticos.
> - Los parámetros centrales y de dispersión como resumen de un conjunto de datos estadísticos.
> - Algoritmos para calcular parámetros centrales y de dispersión sencillos.
>
> (MEC, 1991, p.79).

En este caso no se plantean los contenidos separados por cursos. Sin embargo, se plantean en general a partir de tercero de ESO. Para cuarto y las dos opciones que surgen en esta ley, A y B, siendo la A la destinada a aquellos que cursarán el Bachillerato de

Humanidades y Sociales y la B para los que cursen el Bachillerato Científico – Tecnológico y de Ciencias de la Salud, solo se aportan unas breves orientaciones.

Una de las novedades que implantó esta ley es el desarrollo de las capacidades, que derivarán en las competencias que veremos en el siguiente apartado.

2.2.3. Las medidas de dispersión en la Ley Orgánica de Educación (LOE).

La siguiente ley publicada e implantada en el tiempo fue la LOE (MEC, 2006), en dicha legislación desaparecía la separación de contenidos en tres bloques diferenciados, se separaban por cursos todos los elementos curriculares y aparecía la figura de competencias básicas, donde se ponía de manifiesto como una de ellas la competencia matemática, que también se analizará en este apartado.

El Real Decreto 1631/2006 en su descripción de la asignatura de Matemáticas dice sobre la Estadística

> Debido a su presencia en los medios de comunicación y el uso que de ella hacen las diferentes materias, la Estadística tiene en la actualidad una gran importancia y su estudio ha de capacitar a los estudiantes para analizar de forma crítica las presentaciones falaces, interpretaciones sesgadas y abusos que a veces contiene la información de naturaleza estadística (MEC, 2007, p.751).

Así se puede ver que la administración, al introducir la asignatura realiza una reflexión similar a la que hacemos en el apartado anterior.

Sin embargo, como tónica general, que se aprecia desde la Ley General de Educación, las medidas de dispersión no se introducen hasta el final del camino obligatorio, cuando Moore (1990) recomendaba que, para poder desarrollar el pensamiento estadístico, la dispersión debe enseñarse desde pequeños, ya que de otra forma se educa a los niños a tener un pensamiento determinista y luego es muy difícil de cambiar, así pues, se debe implantar un sistema con la meta de aprender a "tratar inteligentemente" con la variabilidad y la incertidumbre.

En la LOE la Estadística ya contaba con un bloque de contenidos propio, con los siguientes contenidos acerca de las medidas de dispersión para 3º de ESO.

> Bloque 6. Estadística y Probabilidad.
> … Media, moda, cuartiles y mediana. Significado, cálculo y aplicaciones. Análisis de la dispersión: rango y desviación típica...
> … Interpretación conjunta de la media y la desviación típica. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones. Actitud crítica ante la información de índole estadística… (MEC, 2007, p.756).

Y en el cuarto curso de E.S.O. nos encontramos, para la opción A.

> Bloque 6. Estadística y Probabilidad.
> … Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Uso de la hoja de cálculo...
> … Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones... (MEC, 2007, p.758).

Y para la opción B.

> Bloque 6. Estadística y Probabilidad.
> … Gráficas estadísticas: gráficas múltiples, diagramas de caja. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias. Representatividad de una distribución por su media y desviación típica o por otras medidas ante la presencia de descentralizaciones, asimetrías y valores atípicos. Valoración de la mejor representatividad en función de la existencia o no de valores atípicos. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones... (MEC, 2007, p.759).

Se observa que en el tercer curso se realiza una pequeña introducción y tan sólo se trabajan dos medidas de dispersión, el rango y la desviación típica, sin trabajar la varianza o las desviaciones, que como se ha mostrado en el capítulo anterior son interesantes para mostrar la varianza y la desviación típica. El mostrar solo estas dos medidas de dispersión genera además algo que veremos en el próximo capítulo, y es que los alumnos consideran la desviación típica como la única medida de dispersión. En cuarto, para la opción A, se introduce el gráfico de caja, que aparece por primera vez en secundaria, y las medidas de dispersión para comparar y valorar (distribuciones de datos) y en la opción B, mucho más completa, se trabaja el análisis de otras medidas de dispersión y su significado (descentralizaciones, asimetrías, valores atípicos, ...) y la representatividad de la media y las diferentes medidas de la dispersión en función de la existencia de valores atípicos.

Este Real Decreto es concretado por las diferentes órdenes para las comunidades autonómicas, en Andalucía, por ejemplo, se concreta a través de la Orden de 10 de agosto de 2007 de la Consejería de Educación, en el que a pesar de que a la hora de introducir la relevancia de la materia dice "la Estadística y la Probabilidad también están presentes hoy día en las diferentes materias, así como en los medios de comunicación, en los que aparecen datos que es necesario interpretar" (CEJA, 2007, p.55). Luego no suplementa lo que dice el Real Decreto y se queda en un breve

> … el desarrollo gradual comenzará, en los primeros cursos, por las técnicas para la recogida, organización y representación de los datos a través de las distintas opciones como tablas o diagramas, para continuar, en cursos sucesivos, con los procesos para la obtención de medidas de centralización y de dispersión que les permitan realizar un primer análisis de los datos (CEJA, 2007, p.56).

Se debe tener en cuenta que estos son los contenidos que se trabajan en la etapa obligatoria, que debería formar al alumno suficientemente para la vida diaria que es lo que se define como competencia matemática.

La introducción de esta competencia dice textualmente,

> Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.
> Forma parte de la competencia matemática la habilidad para interpretar y expresar con claridad y precisión informaciones, datos y argumentaciones, lo que aumenta la posibilidad real de seguir aprendiendo a lo largo de la vida, tanto en el ámbito escolar o académico como fuera de él, y favorece la participación efectiva en la vida social. (MEC, 2007, pp.686-687)

Es decir, que debe formar a los alumnos para interpretar y producir información y este objetivo se cumple formándolos adecuadamente en toda la Estadística.

A pesar de todos los comentarios, aparentemente negativos, se observa una mejora patente, en la que se pasa de una consideración escasa de la Estadística en el curriculum, a contar con un bloque de contenidos propios y un desarrollo de estos aceptable.

2.2.4. Las medidas de dispersión en la LOMCE.

Finalmente, en 2013 se publica la ley vigente en la actualidad y última ley que se analizará en este trabajo, la LOMCE (MECD, 2013) que cambia las competencias e introduce nuevos cursos, vías y un desarrollo curricular.

Se indicaba en el apartado 2.2.2. que la LOGSE incorporó la obligatoriedad de escolarización hasta los 16 años, dejando dos itinerarios en cuarto de ESO, la LOMCE introduce dos itinerarios desde tercero, el de matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas (matemáticas académicas desde ahora para facilitar el uso) que son las que cursarán los alumnos que vayan a realizar el bachillerato y el de matemáticas orientadas a las enseñanzas aplicadas (matemáticas aplicadas desde ahora para facilitar el uso) para los alumnos que en el futuro cursen un ciclo formativo. El título de graduado en secundaria se consigue con una de las dos menciones por la vía de aprobar una reválida. Las matemáticas cursadas no obligan que reválida elegir, aunque lo natural es que cada uno opte por la reválida de la vía que ha cursado. Ambos itinerarios son además excluyentes, quienes aprueben por la primera vía no podrán realizar un ciclo formativo y quienes obtengan el graduado por la segunda no podrá realizar el bachillerato. Actualmente la reválida y sus efectos están detenidos por motivos legislativos, con lo cual si se puede cursar desde cuarto de ESO de aplicadas el bachillerato.

En esta ley se mantiene un bloque de contenido específico para Estadística y Probabilidad, teniendo en cuenta los cambios en la estructura organizativa explicada anteriormente se va a estudiar primero el curriculum de la asignatura con orientación académica. Los contenidos se agrupan de la siguiente manera para tercero de ESO académico:

> Parámetros de posición. Cálculo, interpretación y propiedades.
> Parámetros de dispersión. Diagrama de caja y bigotes. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica (MECD, 2015b, p.394).

Un poco más de información se puede recabar de un nuevo elemento curricular que surge en esta ley, los estándares de aprendizaje evaluables (EAE de aquí en adelante).

> 2.1. Calcula e interpreta las medidas de posición (media, moda, mediana y cuartiles) de una variable estadística para proporcionar un resumen de los datos.
> 2.2. Calcula los parámetros de dispersión (rango, recorrido intercuartílico y desviación típica. Cálculo e interpretación) de una variable estadística (con calculadora y con hoja de cálculo) para comparar la representatividad de la media y describir los datos.
> 3.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir, analizar e interpretar información estadística de los medios de comunicación.
> 3.2. Emplea la calculadora y medios tecnológicos para organizar los datos, generar gráficos estadísticos y calcular parámetros de tendencia central y dispersión.

3.3. Emplea medios tecnológicos para comunicar información resumida y relevante sobre una variable estadística analizada (MECD, 2015b, p.394).

Para cuarto de ESO opción académica tenemos los siguientes contenidos:

Gráficas estadísticas: Distintos tipos de gráficas. Análisis crítico de tablas y gráficas estadísticas en los medios de comunicación. Detección de falacias.
Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización.
Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.
Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación (MECD, 2015b, p.398).

De nuevo, los EAE deberían dar una información más precisa acerca de lo que se pretende que el alumno aprenda, pero en este caso no es muy detallada,

4.3. Calcula e interpreta los parámetros estadísticos de una distribución de datos utilizando los medios más adecuados (lápiz y papel, calculadora u ordenador).
4.4. Selecciona una muestra aleatoria y valora la representatividad de la misma en muestras muy pequeñas.
4.5. Representa diagramas de dispersión e interpreta la relación existente entre las variables (MECD, 2015b, p.398).

A continuación, se analizan los contenidos y EAE del itinerario aplicado, comenzando por el tercer curso de ESO.

Los contenidos de tercero de aplicadas son,

Parámetros de posición: media, moda, mediana y cuartiles. Cálculo, interpretación y propiedades.
Parámetros de dispersión: rango, recorrido intercuartílico y desviación típica. Cálculo e interpretación.
Diagrama de caja y bigotes.
Interpretación conjunta de la media y la desviación típica (MECD, 2015b, p.403).

Y los EAE son,

> 2.1. Calcula e interpreta las medidas de posición de una variable estadística para proporcionar un resumen de los datos.
> 2.2. Calcula los parámetros de dispersión de una variable estadística (con calculadora y con hoja de cálculo) para comparar la representatividad de la media y describir los datos.
> 3.1. Utiliza un vocabulario adecuado para describir, analizar e interpretar información estadística en los medios de comunicación.
> 3.2. Emplea la calculadora y medios tecnológicos para organizar los datos, generar gráficos estadísticos y calcular parámetros de tendencia central y dispersión.
> 3.3. Emplea medios tecnológicos para comunicar información resumida y relevante sobre una variable estadística que haya analizado (MECD, 2015b, p.403).

Para cuarto de ESO opción aplicada los contenidos serán,

> Interpretación, análisis y utilidad de las medidas de centralización y dispersión.
> Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.
> Construcción e interpretación de diagramas de dispersión. Introducción a la correlación (MECD, 2015b, p.407).

Y los correspondientes EAE,

> 2.1. Discrimina si los datos recogidos en un estudio estadístico corresponden a una variable discreta o continua.
> 2.2. Elabora tablas de frecuencias a partir de los datos de un estudio estadístico, con variables discretas y continuas.
> 2.3. Calcula los parámetros estadísticos (media aritmética, recorrido, desviación típica, cuartiles, ...), en variables discretas y continuas, con la ayuda de la calculadora o de una hoja de cálculo.
> 2.4. Representa gráficamente datos estadísticos recogidos en tablas de frecuencias, mediante diagramas de barras e histogramas (MECD, 2015b, p.407).

Incluso en la competencia matemática se hace una alusión directa a la dispersión, aunque la engloba dentro de algo más global, ya que hace referencia a la incertidumbre y la variación.

> La incertidumbre y los datos: son un fenómeno central del análisis matemático presente en distintos momentos del proceso de resolución de problemas en el que resulta clave la presentación e interpretación de datos. Esta categoría incluye el reconocimiento del lugar de la variación en los procesos, la posesión de un sentido de cuantificación de esa variación, la admisión de incertidumbre y error en las mediciones y los conocimientos sobre el azar. Asimismo, comprende la elaboración, interpretación y valoración de las

conclusiones extraídas en situaciones donde la incertidumbre y los datos son fundamentales (MECD, 2015a, p.6994).

Con este análisis se observa que la inclusión de contenidos relacionados con la Estadística y en concreto con la dispersión y la variabilidad aleatoria ha ido creciendo con la evolución de la legislación, llegando a ser un elemento importante dentro de la descripción de la competencia matemática.

Para clarificar esta evolución se va a realizar una comparación en el siguiente apartado.

2.2.5. Comparación y evolución de las medidas de dispersión en el curriculum.

En la tabla 3 se va a mostrar, a modo de resumen, las diferentes medidas de dispersión y los ámbitos que se indican en los contenidos de las diferentes normas que ha habido a lo largo del tiempo.

Tabla 3. Contenidos de medidas de dispersión en el curriculum por curso de 1975 a la actualidad.

Curso	Ley	Contenidos
3º académicas	LGE	Variables Estadísticas: Medidas de posición central y dispersión.
	LOGSE	Los parámetros centrales y de dispersión como resumen de un conjunto de datos estadísticos. Algoritmos para calcular parámetros centrales y de dispersión sencillos.
	LOE	Análisis de la dispersión: rango y desviación típica. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones
	LOMCE	Parámetros de dispersión. Diagrama de caja y bigotes. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica
3º aplicadas	LOMCE	Parámetros de dispersión: rango, recorrido intercuartílico y desviación típica. Cálculo e interpretación.

Curso	Ley	Contenidos
		Diagrama de caja y bigotes. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica
4º académicas	LGE	No se definen contenidos.
	LOGSE	No se definen contenidos.
	LOE	Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones. Diagrama de caja
	LOMCE	Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización. Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión. Construcción e interpretación de diagramas de dispersión.
4º aplicadas	LOE	Representatividad de una distribución por su media y desviación típica o por otras medidas ante la presencia de descentralizaciones, asimetrías y valores atípicos. Valoración de la mejor representatividad en función de la existencia o no de valores atípicos. Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones. Diagramas de caja.
	LOMCE	Interpretación, análisis y utilidad de las medidas de centralización y dispersión. Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión. Construcción e interpretación de diagramas de dispersión.

Nota. Para la LGE 3º de ESO opción académica es equivalente a 1º de BUP y 4º de ESO opción académica a 2º de BUP. Para los cursos de nueva creación solo se han comparado los contenidos de las leyes en los que existen.

Se observa en la tabla 3 que la evolución en la definición del curriculum ha sido importante, de la definición vaga que teníamos en la LGE a la definición totalmente exhaustiva que se da en la LOMCE, no sólo a través de los contenidos, sino a través, también de los estándares de aprendizaje evaluables y la competencia clave (aunque estos dos elementos curriculares no se han incluido en la tabla).

Otra evolución positiva es la consideración de las medidas de dispersión en los dos cursos, 3º y 4º en una primera etapa y en 1º y 2º de ESO en la LOMCE. Sin embargo, como el cambio es reciente se centrará el foco de atención del estudio en los cursos 3º y 4º de ESO.

Entre la LOE y la LOMCE se han producido algunos cambios, se ha introducido el diagrama de caja en 3º, en las dos opciones, que en la LOE se trabaja en 4º. Y en 4º se ha introducido la estadística bidimensional y con ella los diagramas de dispersión y otros parámetros.

Hasta el presente curso que acaba no se han cambiado algunos textos, manteniéndose los libros de la LOE aún en los cursos pares y habiéndose reemplazado los libros por los nuevos en los cursos impares.

Por tanto, dentro de los cursos en estudio, se analizarán los libros de texto LOE y se hará además bajo el prisma adecuado, que es la legislación anterior. Sin embargo, una pregunta que puede surgir en este plano es cómo dar cabida a los nuevos contenidos si los libros de texto no se han modificado en 2º y 4º de ESO.

2.6. La dispersión en el curriculum actual

Hasta este punto se ha analizado el curriculum específico de los cursos que se van a estudiar en esta tesis, pero es interesante analizar también la presencia actual de la dispersión a lo largo del curriculum en general. Este trabajo lo realizaron Batanero et al. (2015) y resulta pertinente traer aquí algunos de sus resultados.

Así pues, entre los resultados del análisis presenta una tabla resumen, donde se incluyen los contenidos LOMCE, extraídos de la normativa de primaria (MECD, 2014) y secundaria (MECD, 2015b) sobre dispersión en estadística unidimensional para la etapa obligatoria, véase la tabla 4.

Tabla 4. Contenidos relacionados con el significado descriptivo univariante de la dispersión en el currículo (Batanero et al., 2015, p.10).

Curso	*Contenidos relacionados con la dispersión*
Educación primaria	*Iniciación intuitiva a las medidas de centralización: la media aritmética, la moda y el rango. Realización e interpretación de gráficos sencillos: diagramas de barras, poligonales y sectoriales.*
1º y 2º ESO	*Organización en tablas de datos recogidos en una experiencia. Diagramas de barras, y de sectores. Polígonos de frecuencias. Medidas de tendencia central. Medidas de dispersión.*
3º ESO, enseñanzas académicas	*Frecuencias absolutas, relativas y acumuladas. Agrupación de datos en intervalos. Gráficas estadísticas. Parámetros de posición. Cálculo, interpretación y propiedades. Parámetros de dispersión. Diagrama de caja y bigotes. Interpretación conjunta de la media y la desviación típica*
3º ESO, enseñanzas aplicadas	Igual que en Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas. Se añade: Rango, recorrido intercuartílico y desviación típica. Cálculo e interpretación.
4º ESO, enseñanzas académicas	Medidas de centralización y dispersión: interpretación, análisis y utilización. Comparación de distribuciones mediante el uso conjunto de medidas de posición y dispersión.
4º ESO, enseñanzas aplicadas[3]	*Similar al anterior*

[3] Se ha corregido este apartado teniendo en cuenta el sentido de la tabla, el texto original de esta casilla era “4º ESO, enseñanzas académicas”

Como se indicaba en el apartado anterior, con la LOMCE (MECD, 2013) se han incluido contenidos relativos a la dispersión que no aparecían en la LOE (MEC, 2006), lo que manifiesta una progresión en la inclusión de contenidos estadísticos en el currículum.

La verdad matemática prefiere palabras simples, ya que el lenguaje de la verdad es simple en sí mismo. (Brahe y Brahe, 1972).

Capítulo 3

La investigación sobre libros de texto

3.1. Introducción

Los libros de texto son uno de los pilares educativos en este país, siendo prácticamente obligatorios en la Educación no universitaria, de hecho, muchas comunidades, como la andaluza, los ofrecen de manera gratuita en la educación obligatoria a través de diversos programas.

Pero ¿qué es un libro de texto de matemáticas? Una definición muy simple la encontramos en Kilpatrick, (2014, p. 4)

> La definición usual de libro de texto es algo como lo siguiente: un libro usado para el estudio de un tema. Con esa definición, un libro de texto de matemáticas se convierte en un libro utilizado para el estudio de las matemáticas.

Sin embargo, en el mismo texto, Kilpatrick (2014) nos indica que esa definición ha ido evolucionando y que por ejemplo en el Estado de Indiana modificaron la ley para definir un libro de texto como sigue:

> "Libro de texto" significa material organizado sistemáticamente diseñado para proporcionar un nivel específico de instrucción en una categoría temática, que incluye:
> (1) libros;
> (2) el hardware que un solo estudiante consumirá, accederá o usará durante un semestre o año escolar;
> (3) software informático; y
> (4) contenido digital. (Indiana House Bill 1429, 2011, art. 3)

Por tanto, la definición de libro de texto de matemáticas ya no es solo la de un libro para aprender matemáticas, sino que engloba los diferentes productos digitales (software, hardware y contenidos) que se emplearán para que los estudiantes trabajen la asignatura. Parece claro lo que algunas administraciones consideran libro de texto y libro de texto de matemáticas, pero a continuación ahondaremos en esas ideas desde la perspectiva de la Didáctica y de la Didáctica de las Matemáticas.

Según Love y Pimm (1996) los libros matemáticos son tan antiguos como la propia escritura, y la frontera entre un libro de matemáticas y un libro escolar de matemáticas no era fácil de identificar. Ya que todos los libros, escolares o no, tienen el mismo objetivo comunicar o mostrar algo que el autor desea contar. Sin embargo, la noción de transposición didáctica de Chevallard es la diferencia entre un libro de matemáticas y un libro de texto de matemáticas. La transposición didáctica que planteaba Chevallard (1991b) es el proceso por el que se adaptan las matemáticas formales o científicas es decir, el saber sabio, al nivel de enseñanza del que va a aprender, en este caso, a la secundaria. Esta adaptación la hace el profesor, pero también la hace el libro de texto, como podemos ver en la figura 12.

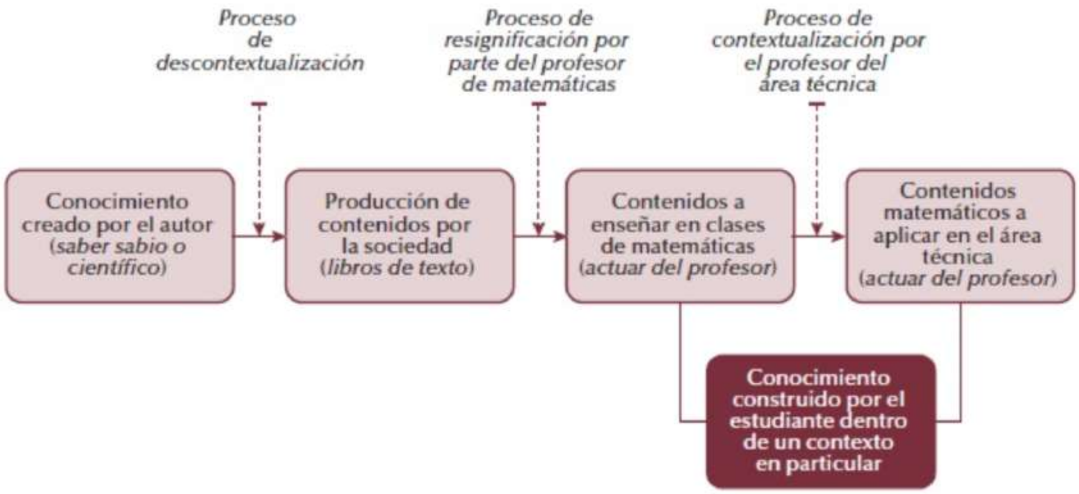


Figura 12. Procesos de transposición didáctica y transposición contextualizada (Trejo y Trejo, 2013)

Una imagen más clara de la relación entre el conocimiento, el alumno y el libro la tenemos en la figura 13.

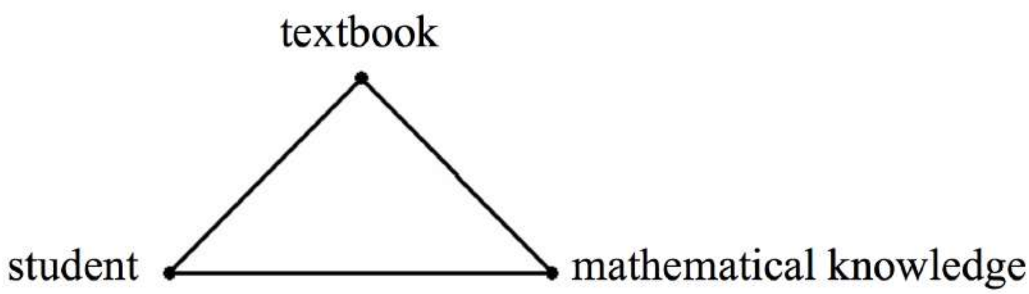


Figura 13. Representación del uso de los libros de texto por los alumnos (Rezat, 2006a, p.411).

Esta idea es similar a la que transmiten Valverde, Bianchi, Wolfe, Schmidt, y Houang (2002), "los libros de texto ayudan a definir las materias académicas a medida que los estudiantes los experimentan" (p.1), es decir, la materia que se enseña está fuertemente influenciada por la perspectiva que ofrecen los libros de texto. Esta misma opinión la muestra también Cordero y Flores (2007). Incluso hay estudios que analizan cómo influyen los libros de texto en profesores en formación, observando que cuando existe alguna carencia en el contenido matemático de estos sujetos, ellos también se apoyan en el libro de texto para suplir dichos problemas (Davis, 2009).

Es más, se puede incluso llegar a pensar que los libros de texto son la extensión del curriculum en el aula, y como tales dejen ver otros problemas de los que adolece el mismo tal y como indica Crawford (2003) “los libros de texto son la definición dominante del plan de estudios en las escuelas y representan las batallas y compromisos políticos, culturales y económicos” (p.5).

Incluso hay autores, que en una profunda reflexión sobre el contenido actual de los libros de texto piensan que en ocasiones los libros son más dañinos que beneficiosos, como es el caso de Ceglie y Olivares (2012) ya que las nuevas ediciones incorporan material sobre metodología y evaluación que llegan a anular en cierta manera el papel del profesor.

El libro de texto además juega un papel crucial en la vida educativa de las personas, siendo en muchas ocasiones el referente considerado autoridad del conocimiento humano, como advierten en la introducción de su libro De Castell, Luke, y Luke (1989).

En definitiva, como indican Reys, Reys, y Chavez (2004) “la elección de los libros de texto a menudo determina lo que los profesores enseñarán, cómo lo enseñarán y cómo los estudiantes los aprenderán” (p. 61).

Como señalaba Glasnović, (2014, p.252)

> Una minuciosa lectura de la literatura disponible pone de relieve las razones por las que los libros de texto son objetos adecuados de investigación:
> a) Los libros de texto son objetos y medios tangibles;

b) Los libros de texto contienen texto de manera significativa;
c) Los libros de texto son ampliamente utilizados por los estudiantes y los profesores;
d) Los libros de texto están profundamente integrados en el currículo;
e) Los libros de texto reflejan las tradiciones culturales y educativas.

Por tanto, tras estudiar en el primer capítulo el concepto de dispersión y sus medidas y en el segundo el papel de las medidas de dispersión en el curriculum vigente, el siguiente paso lógico es estudiar el libro de texto, previo a ese análisis de libros de texto se va a exponer en este capítulo las diferentes investigaciones que existen sobre libros y los diferentes marcos teóricos existentes para su análisis.

3.2. Historia de los libros de texto de matemáticas

Se datan libros con contenido matemático desde la antigüedad. Desde que el ser humano empieza a escribir las matemáticas forman parte de esa escritura, por ejemplo, tenemos textos como el "Plimpton 322" (Babilonia, 1900 a.C.), considerado el texto matemático más antiguo como afirma Maor (1998), "el papiro de Rhind" (Egipto, 1650 a.C.) o los "Sulva Sutras" (India, 800 a.C.), estos antiguos textos recopilaban problemas sobre capacidades, áreas dimensiones de terraplenes, etc., …, es decir, el conocimiento de geometría y cálculo que existía a modo de normas. Se pueden considerar como de transmisión entre pares, y también a personas que se iban a iniciar en el sacerdocio o el uso de las matemáticas, funcionarios reales, etc., … según la cultura.

Sin embargo, el primer libro de Matemáticas propiamente dicho, en el sentido de que partiendo de unos axiomas se desarrolla una teoría matemática, es los "*Elementos*" de Euclides, escrito alrededor del siglo III a. C. (Aleksandrov, Kolmogorov, y Laurentiev, 1988), aunque considerada por muchos una obra de carácter geométrico incluye varios volúmenes (VII, VIII y IX) al estudio del número y otros tantos (II y V) son de carácter algebraico, esta obra es fundamental ya que fue parte de la educación académica de los jóvenes durante muchos siglos formando parte del Quadrivium en la formación en la edad media en Europa, aún hoy día es empleado por numerosos educadores para introducir, a nivel básico, la geometría. De hecho, el Quadrivium fue también un invento griego, en concreto de Arquitas de Tarento, como señala la obra "Historia de la matemática" (Boyer, 1986).

En Asia también se desarrollaron libros de texto, por ejemplo, el libro "Los nueve capítulos en el arte matemático", desarrollado en China cerca del año 150 a.C. y que pudo servir de libro de texto no sólo en China sino en otros países del entorno.(Shen, Crossley, Lun, y Liu, 1999, a través de Fan, Zhu, y Miao, 2013).

Durante la edad media fueron los musulmanes, sin embargo, quienes más impulsaron el conocimiento de la matemática, a través de la traducción de obras clásicas y la creación de obras nuevas, como "Sobre los cálculos con números arábigos" (800 d.C.) de Al – Khowarizmi, que introdujo en Europa el método de numeración actual, aunque no consiguió una gran difusión hasta varios siglos después, también se le considera el verdadero padre del álgebra. Como dato anecdótico de esta época podemos destacar al giennense Ibn Muad, cadí de Jaén (taifa de Jaén, siglo IX), que fue el autor del libro de trigonometría esférica más antiguo de Occidente (Veguin, 2010).

Durante esta época y hasta el siglo XV la educación estuvo dominada por las instituciones religiosas, que normalmente utilizaban obras en latín o traducciones realizadas del árabe y el griego al latín, sin embargo, entre quienes podían permitirse una educación superior, la formación en matemáticas no era la más importante, ya que no podían ganarse la vida de esta manera, siendo el derecho y la medicina las formaciones y traducciones más requeridas. A pesar de ello los manuscritos de Ripoll (900-1100), del monasterio de Cluny de la misma localidad, tuvieron bastante influencia, destacando el manuscrito 106, donde se describe cómo medir caminos, ciudades, parcelas de tierra, etc., … En cambio, las matemáticas sí que eran importantes en las escuelas públicas que impulsaron la burguesía en la baja edad media, donde se enseñaba el cálculo mercantil, en este ámbito, el texto más antiguo en nuestra lengua es el manuscrito 46 de la Colegiata de San Isidoro de León, que data del siglo XV y es anónimo (aunque se sospecha que el autor era judío y por ese motivo prefirió mantenerse en el anonimato), este tratado de matemáticas mercantiles incluye diferentes problemas de herencias y aleaciones entre otros (Veguin, 2010).

"Summa de l'art d'Arimètica" de Frances Santcliment, que fue profesor de Aritmética en Barcelona y Zaragoza, escrito en el 1482, fue el primer libro de Matemáticas escrito en lengua popular en España, en este caso en catalán y traducido unos años más tarde al castellano. Posteriormente se realizaron traducciones al castellano de obras latinas como "Los Elementos", la primera fue la de Ricardo Zamorano en 1574, no exenta de crítica, ya que muchos estudiosos pensaban que este tipo de textos solo podían ser estudiados en latín (Veguin, 2010). Desde estos textos a los actuales, se ha ido configurando la cultura escolar del libro de texto. Existen dentro de los estudios de textos escolares algunas revisiones históricas acerca de los libros empleados a primeros del siglo

pasado como las realizadas por de Oca Navas (2016) en México, Xu (2013) en China, Ceglie y Olivares (2012) en Estados Unidos o da Ponte (2015) en Portugal, que se remonta a los libros de texto de finales del siglo XIX, porque la evolución de la Educación Matemática y de la matemática escolar y su enseñanza, en gran medida, se puede estudiar a través de los libros de texto que la han apoyado, ya que, el desarrollo curricular siempre ha estado liderado por los libros de texto (Howson, 2013).

El futuro que nos espera, como cuenta Kilpatrick, (2014) está basado en libros interactivos y digitales que se puedan portar en una Tablet, libros que generen una retroalimentación inmediata y en los que el conocimiento no sea puramente el del libro, sino que la consulta en Internet sea inmediata.

3.3. Investigación didáctica sobre libros de texto

Las investigaciones didácticas sobre libros de matemáticas tomaron cierto auge en la década de los años 80 del siglo pasado, surgiendo obras específicas en Francia en 1981 o en el Reino Unido en 1984 (Howson, 2013), esto a pesar de que, tal y como hemos visto en el apartado anterior, el libro de texto ha estado presente en la enseñanza de las Matemáticas desde hace mucho tiempo, posteriormente este tipo de estudios ha crecido rápidamente en las tres décadas siguientes (Fan et al., 2013).

Sin embargo, sí que existía un foco de atención sobre libros de otras áreas, como la historia o la lengua que arranca en los años 20 del siglo pasado bajo el auspicio de la Liga de Naciones, antecesor de la Organización de Naciones Unidas, ya que se temió que tras la I Guerra Mundial ciertas naciones empleasen los libros de texto con fines tendenciosos para crear una falsa imagen de los países vecinos. Este papel fue asumido por la UNESCO posteriormente y en 1974 se solicitaba colaboración internacional para la evaluación de libros de texto como se indica a continuación

> Los Estados miembros deben fomentar un intercambio más amplio de libros de texto, especialmente los libros de texto sobre historia y geografía, y adoptar, cuando proceda, medidas, celebrando, si es posible, acuerdos bilaterales y multilaterales, para el estudio recíproco y la revisión de libros de texto y otros materiales educativos. A fin de garantizar que sean exactos, equilibrados, actualizados y sin prejuicios y que fomenten el conocimiento mutuo y la comprensión entre los diferentes pueblos (Pingel, 2010, p.13).

En matemáticas, dicho interés se mantiene, ya que, por ejemplo, en el ICME-10 se realiza un grupo de discusión llamado “Focus on the development and research of mathematics textbooks”, este tipo de grupos de discusión continua en el ICME-11, en el 2008, a través del grupo llamado ‘‘The changing nature and roles of mathematics textbooks: form, use, access’’, más tarde la revista “ZDM. The International Journal on Mathematics Education”, ha dedicado su volumen 45, número 5 del año 2013 al tema monográfico “*Investigar libros de texto en Educación Matemática*”. En este número se hace una recopilación de la investigación pasada, presente y las perspectivas de futuro. Igualmente, en el ICME-13 hubo un grupo de discusión focalizado en libros digitales llamado “Exploring and making online creative digital maths books for CMT” (Fan, 2013).

Consultando webs especializadas en Educación Estadística como la de la “International Association for Statistical Education” los artículos, tesis, etc… encontrados sobre análisis de libros de texto apenas llegan a la veintena, un número pequeño de trabajos comparándolos con los que existen en el resto de los temas de interés.

En España esta tendencia es creciente desde 2009, a partir del XIII Simposio de la SEIEM en el que se realizó un seminario sobre libros de texto como indican Marco-Buzunáriz, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2016) en un trabajo presentado en el pasado XX Simposio de la SEIEM en Málaga en el que recopilaban los trabajos sobre libros de texto realizados entre 1997 y 2015. En este mismo congreso se presentaron varios trabajos muy interesantes, entre ellos Ortiz, Albanese y Serrano (2016), que trataba del lenguaje empleado en los textos de secundaria.

Una de las universidades que más trabajos acerca de análisis de libros de texto en el campo de la Estadística ha generado es la Universidad de Granada, donde se han analizado libros de Educación Primaria, Secundaria y Universidad, algunos trabajos que se pueden destacar en orden cronológico son Ortiz (1999) hasta algunos de los últimos como Gea, Batanero, Cañadas, y Arteaga (2013), Gómez-Torres, Ortiz, y Gea (2014), Batanero, Díaz-Levicoy, Arteaga, y Gea (2014), Arteaga y Díaz-Levicoy (2016) o Díaz-Levicoy, Giacomone, López-Martín, y Piñeiro (2016), el trabajo fin de máster de Díaz-Levicoy (2014) y también se pueden destacar algunas tesis doctorales como las de Gea (2014) y Gómez-Torres (2014). En el ámbito internacional se pueden destacar las tesis de Johansson (2003), la de O'Keeffe (2011) o la de Capiral (2012).

Un claro signo de que la escasa atención a los libros de texto está cambiando es que el pasado Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (CIVEOS, 2017) de 90 comunicaciones presentadas 7 trataban directamente los libros de texto directamente y algunas otras tangencialmente, eso supone cerca de un 8% de los trabajos que se están produciendo, y aunque puede ser anecdótico poner el foco en un solo congreso, sí que se puede pensar que este tipo de estudios está en auge.

3.4. El libro de texto en Matemáticas

El libro de texto, como se indicaba anteriormente es fundamental en educación, además como se observaba en la introducción en palabras de Crawford (2003) es una representación del curriculum, esta misma opinión manifestaba Rico (1990)

> Hasta el presente el saber matemático ha estado institucionalizado, seleccionado, secuenciado y debidamente estructurado en el libro de texto, proporcionando seguridad al enseñante. El libro de texto supone un esfuerzo de síntesis, planificación estructuración y acomodación de los contenidos dispuestos por el curriculum, en consecuencia, el libro de texto se ha considerado como el paradigma del conocimiento que se debe trasmitir a los estudiantes (Rico, 1990 a través de Del-Pino y Estepa, 2015, p.2).

Pero ¿se puede hablar de unas características comunes o propias de los libros de matemáticas? Varios autores han intentado establecer unas características que le sean propias, ya sea por la propia opinión, experiencia o experiencia compartida a través de entrevistas y encuestas. Existen dos características que son comunes, la apariencia, lenguaje y contenido que se agrupan en un bloque llamado función didáctica y la estructura, en este caso microestructura, exposición-ejemplo-ejercicios que detallan Love y Pimm (1996).

En los siguientes apartados se describen algunas características comunes y análisis de la estructura del libro de matemáticas y la relación que tiene este con el curriculum.

3.4.1. Características del libro de texto de matemáticas.

En diferentes blogs se pueden encontrar algunas sugerencias para hacer un buen libro de matemáticas, así en Nirmal (2011) se indica:

> Un libro de matemáticas debe ser escrito de acuerdo con las metas y objetivos de la enseñanza del tema en esa clase en particular.
> Debe estar bien ilustrado.
> Debe haber diagramas y figuras donde sea necesario.
> El libro de texto debe estar escrito en un lenguaje sencillo y comprensible.
> Debe estar libre de errores.
> Debe estar escrito al alcance de los niños.
> Debe proporcionar materiales suficientes para motivar a los estudiantes a resolver problemas.
> Los estudiantes deben tener una oportunidad adecuada de aprender a través de su propia iniciativa y esfuerzo.
> Los problemas deben relacionarse con las necesidades de la vida real y los ambientes físicos y sociales de los estudiantes.
> Debe fomentar la actitud correcta hacia el autoaprendizaje y la autosuficiencia entre los alumnos y debe hacerse mediante la promoción de proyectos, trabajos de campo y trabajos de laboratorio.
> Debe promover el uso de enfoques analíticos, sintéticos, inductivos-deductivos, de resolución de problemas y heurísticos para la enseñanza.
> El contenido debe estar actualizado.
> Los ejercicios deben apuntar a todos los niveles de los estudiantes. Debe ser un reto para los estudiantes inteligentes y debe dar la oportunidad de promedio y por debajo de los estudiantes promedio también.
> Debe satisfacer la diferencia individual en los estudiantes y debe satisfacer las diversas habilidades, intereses y actitudes.
> Debe promover la estructura lógica y psicológica de los contenidos.
> Debe prever la práctica, la revisión y satisfacer las exigencias del examen.
> También el libro de texto debe ser atractivo y debe tener las cualidades externas necesarias, es decir, su levantamiento, el papel y la impresión, etc., debe ser bueno. (Nirmal, 2011).

Otro blog da cuenta de su propia receta:

> La apariencia del libro de texto y la portada atractiva deben ser atractivas. El papel utilizado en el libro de texto debe ser de calidad superior. Debe tener impresión de la calidad y la encuadernación del libro debe ser fuerte y durable. La impresión debe ser audaz y fácilmente legible.
> El libro de texto debe ser de la última edición con las modificaciones necesarias.
> El libro de texto debe tener un precio moderado y estar disponible en el mercado.

Deberá ser escrito por maestros calificados, experimentados y competentes de matemáticas o por un comité de expertos constituido por el gobierno estatal.
El libro de texto debe ser escrito de acuerdo con el programa prescrito y cada aspecto del programa debe ser cubierto adecuadamente.
Debe estar de acuerdo con los objetivos y metas a enseñar en esa clase particular.
Debe prever las diferencias individuales. Debe satisfacer las necesidades de los estudiantes de diferentes habilidades, intereses y actitudes.
Deberán existir suficientes disposiciones para la revisión, la práctica y el examen.
El libro de texto debe relacionar el aprendizaje en el aula con las necesidades de la vida real y los entornos físicos y sociales de los alumnos.
El contenido presentado en el libro de texto debe ser exacto y actualizado. Debe incluir los desarrollos recientes en matemáticas relacionados con el contenido tratado.
El tema del libro de texto debe organizarse cuidadosamente con referencia a las consideraciones tanto lógicas como psicológicas que hacen que la enseñanza sea efectiva.
El contenido del libro de texto debe tener un valor directo, práctico y social.
El contenido debe organizarse en orden creciente de dificultad. Se debe seguir el principio de correlación vertical para relacionar los conocimientos actuales con el pasado y el futuro.
El lenguaje utilizado en el libro de texto debe ser simple y fácilmente comprensible y al alcance de los alumnos. El estilo y el vocabulario utilizados deben ser adecuados para el grupo de edad de los estudiantes para quienes el libro está escrito.
Los términos y símbolos utilizados deben ser los que sean populares y aceptados internacionalmente. Todos los términos, conceptos y principios utilizados en el texto deben ser claramente definidos.
La presentación del tema debe ser atractiva e interesante con ilustraciones apropiadas en términos de imágenes, diagramas y figuras.
Los diagramas utilizados en el libro de texto deben ser fácilmente reconocibles y las construcciones geométricas deben ser proporcionales a las medidas prescritas por el problema.
Debe fomentar la actitud correcta hacia el autoaprendizaje y la autosuficiencia entre los alumnos al sugerir trabajo de proyecto, trabajo de campo y trabajo de laboratorio.
Debe proporcionar oportunidades adecuadas para motivar a los estudiantes a resolver problemas presentando un número adecuado de problemas elaborados a partir de situaciones de la vida cotidiana que requieren que el estudiante aplique los principios matemáticos y la fórmula para su solución.
Debe facilitar el uso de enfoques analíticos, sintéticos, inductivos, de resolución de problemas y heurísticos de la enseñanza.
El libro de texto debe contener algunos problemas difíciles o ejercicios para desafiar a los estudiantes dotados para las matemáticas.
Debe haber ejercicios bien graduados dados al final de cada tema para satisfacer las necesidades de todo tipo de estudiantes.
El libro de texto debe estimular la iniciativa y la originalidad de los estudiantes.
La matemática oral debe encontrar su lugar apropiado en el libro de texto.
Las respuestas dadas al final de cada sección deben ser correctas.
Debe ofrecer sugerencias para mejorar los hábitos de estudio.
Debe satisfacer las exigencias del examen. (ANCY, 2015).

Otro estudio interesante es el realizado por Shield (1989), donde cuestionaba a una serie de profesores acerca de los atributos deseables en un libro de texto, obtuvo trece características ordenadas por orden de preferencia:

> 1. Proporciona problemas reales para que los estudiantes piensen.
> 2. Los términos están expresados correctamente.
> 3.Tiene nuevas palabras y símbolos.
> 4. Se proporcionan explicaciones legibles para los estudiantes.
> 5. Las ideas, reglas y definiciones importantes están destacadas.
> 6. La secuencia de temas en el libro puede ser variada.
> 7. Proporciona temas adicionales para que los estudiantes investiguen.
> 8. Atiende a una amplia gama de habilidades estudiantiles.
> 9. Proporciona instrucciones para que los estudiantes realicen las actividades y experimentos.
> 10. Contiene muchos ejemplos.
> 11. Se ve atractivo.
> 12.El contenido se ajusta al programa.
> 13. Proporciona todo lo necesario para enseñar el curso (Shield, 1989, p.13).

Howson (2013) basándose en su larga experiencia de escribir y revisar libros de texto apunta que para poder considerarse que tiene cierta calidad, un libro debe tener los siguientes atributos:

> Coherencia matemática. Claridad y precisión de las explicaciones.
> Claridad en la presentación de núcleos. El rango, cantidad y calidad de los ejercicios.
> Conexión con la vida real y con otras asignaturas tanto en la explicación como en los ejercicios.
> Balance de género, racial y social.
> El uso de lenguaje apropiado para desarrollar las habilidades lecto-escritoras.
> Se tiene en cuenta la evidencia de resultados de investigaciones y la experiencia profesional acumulada.
> Previsión de las diferentes capacidades de los estudiantes que van a emplear el libro.
> Atractivo físico del libro: formato, letra, color, ilustraciones...
> Algunos signos de originalidad en el material, ejemplos o ejercicios.
> La previsión de guías del profesor que vayan más allá de un libro de respuestas y compense la doble demanda de desarrollo de la comprensión matemática de los profesores y apoyo en la gestión de las lecciones (Howson, 2013, p. 654).

Además de estas características se podría incluir también que haga uso del humor, este aspecto se destaca en Berisha (2015), siguiendo pautas como las recomendadas por Flores (2003) y Guitart-Coria y Flores (2003).

Similares características son las que se le piden a un libro electrónico como se observa en Reints, (2015) que se resumen en diseño atractivo y buena visualización en todo tipo de pantallas, coherencia, claridad, amplitud de ejercicios y ejemplos, los aspectos más innovadores son, que pide que estos ejercicios se adapten a la taxonomía de Bloom y las inteligencias múltiples de Gardner, y que además el libro sea interactivo, es decir, cuando un concepto se quiere definir mejor el libro te lleve a internet incluyendo la idea de que se pueda conocer de forma instantánea si un ejercicio está bien o mal resuelto.

Tras analizar estos criterios expuestos por diferentes autores se pueden extraer unas características comunes que se esperan, o que son deseables en los libros para poder decir que tienen cierta calidad.

- En cuanto al aspecto. Debe ser atractivo, debe incluir variedad de fuentes tipográficas y estar editado en color.
- En cuanto al lenguaje. Debe ser conciso, utilizar un lenguaje conocido y si no lo es definir los nuevos conceptos claramente. Debe respetar la equidad de género, raza y social.
- En cuanto a los gráficos. Debe utilizar gráficos e imágenes abundantes y adecuadas que no presten a confusión.

- En cuanto al contenido. Debe cumplir con los objetivos y metas a enseñar, favoreciendo la lecto-escritura y el autoaprendizaje. Debe estar basado en problemas y proyectos, siendo estos cercanos al estudiante. Los ejercicios deben ser multinivel, adaptados a los diferentes ritmos de aprendizaje del aula.
- En cuanto a su confección. Los escritores deben ser especialistas en el ámbito y debe estar puesto al día conforme a las últimas investigaciones en matemáticas y didáctica.
- En cuanto a su uso. Debe servir de apoyo al docente y debe ser asequible al estudiante.

3.4.2. Estructura del libro de texto de matemáticas.

Otro aspecto que estudiar en los libros de texto es la estructura que, contra lo que se pueda pensar es diferente en cada país, aunque en España sea más o menos homogénea. En este apartado se va a analizar la estructura en varios países, como Reino Unido, Alemania y Francia y después se comentará la estructura general de los libros de texto de matemáticas en España.

Haggarty y Pepin (2002) realizan un análisis de textos en el Reino Unido, Francia y Alemania. En este estudio observan que la estructura no es igual en los tres países.

En Francia, según los autores, los libros están redactados por la figura del "inspector matemático" y que consta cada tema de la siguiente estructura: actividades cognitivas que introducen la noción, el núcleo de la lección (“le cours”) y una serie de ejercicios.

En el caso de Reino Unido los alumnos son separados en grupos clasificados en función de su puntuación en el Test de Curriculum Nacional, este tipo de organización se conoce como “tiers”, esto hace que, aunque después tienen que trabajar todos el mismo curriculum, no lo hacen partiendo del mismo punto ni con la misma profundidad y finalidad. Por tanto, los libros no son esenciales en el Reino Unido, ya que su uso está restringido y la pretensión no es que lo utilicen, el aspecto que dan de las matemáticas estos libros es que “parecen ser un conjunto de reglas y hechos no relacionados pero utilitarios” (Haggarty y Pepin, 2002, p.586), de hecho nos ofrecen en Pepin y Haggarty (2001) una estadística donde indican que solo el 67% de las escuelas británicas emplean libros para los cursos 7 y 8, donde además un 20% de ese alumnado utiliza el libro menos del 50% del tiempo. Esto hace que la estructura en los libros ingleses sea más utilitarista.

En el caso de los libros alemanes, existe un análisis más en profundidad elaborado por Rezat (2006b), en este caso distingue entre la macroestructura y la microestructura. En el primer caso se habla de la estructura a lo largo de todo el libro, mientras en el segundo caso se hace referencia a la estructura de un capítulo o lección concreta. Esta definición estructural la extrae de Valverde et al. (2002) en el análisis que hacen de una amplia muestra de libros matemáticos y se analizará más adelante en este apartado. Rezat (2006b) no analiza la macroestructura, pero si la microestructura y lo hace en profundidad, destacando cinco partes que contiene cada capítulo del libro: tareas introductorias, exposición, núcleo, ejercicios resueltos y ejercicios finales.

Valverde et al. (2002) analizaron la estructura esquemática, más compleja, de los libros españoles, coreanos, rusos y mejicanos. Anteriormente se hacía referencia a estos autores cuando se hablaba de las diferencias entre las estructuras generales y concretas que definen de la siguiente manera, las macroestructuras son

> características estructurales que recorren todo el libro. Estas características más omnipresentes representan un aspecto importante de los libros de texto que parece influir en las oportunidades de aprendizaje que los libros de texto están destinados a promover a lo largo de todo un año escolar… Las macroestructuras forman el contexto básico en el que cada libro de texto construye la visión de la matemática o la ciencia que pretende transmitir. Parecen ser claramente una parte de la visión de la ciencia o de las matemáticas incorporadas en el libro de texto (Valverde et al., 2002, p.21).

Y las microestructuras son

> las estructuras asociadas con lecciones específicas destinadas a ser utilizadas en un pequeño número de sesiones de instrucción en el aula que denominamos "micro" estructuras… las microestructuras encarnan intenciones pedagógicas para una sola lección (Valverde et al., 2002, p.21).

En los libros de texto de matemáticas españoles podemos observar los dos tipos de estructuras.

La macroestructura es un fiel reflejo de los bloques de contenidos que dictan los reales decretos, de tal manera que los libros están divididos en unidades didácticas y estas ordenadas según los bloques de contenidos que aparecen en la legislación. Por tanto, para tercero y cuarto de ESO, que son los cursos que se van a analizar, tendremos aproximadamente la estructura que sigue:

1. Bloque de problemas. Una unidad. En esta unidad se introducen diferentes heurísticas para la resolución de problemas.

2. Bloque de números. De una a tres unidades didácticas, que incluyen los diferentes conjuntos numéricos y sus operaciones. En el tercer curso de ESO incluye una unidad dedicada a sucesiones.
3. Bloque de álgebra. Dos o tres unidades. Contiene una unidad dedicada a las expresiones algebraicas y otra u otras dos dedicadas a las ecuaciones y sistemas.
4. Bloque de análisis. Dos o tres unidades. Contiene una unidad dedicada al análisis de funciones en general y una o dos dedicadas a funciones específicas.
5. Bloque de geometría. Dos o tres unidades. Contiene una unidad dedicada a la geometría plana, otra a geometría en el espacio y en algunos casos otra dedicada a transformaciones.
6. Bloque de Estadística y Probabilidad. Dos unidades. Una unidad dedicada a la estadística y otra a la probabilidad y azar.

Esta estructura, además, está ordenada en ese preciso orden, relegando el bloque de estadística, al igual que la legislación, al último lugar, esto genera algo que ya advirtió Batanero (2001).

> Pensamos que esto indica la existencia de una problemática educativa que tiene su raíz en que la incorporación de la estadística desde la escuela no es todavía un hecho. Aunque los currículos de Educación Primaria y Secundaria la incluyen, los profesores suelen dejar este tema para el final del programa y con frecuencia lo omiten. Los alumnos llegan a la universidad sin los conocimientos básicos y es preciso comenzar el programa repitiendo los contenidos de estadística descriptiva y cálculo de probabilidades que debieran haber asimilado en la escuela (p. 11).

Es decir, que los libros perpetúan en su macroestructura algo que ya hacen las disposiciones legales, y es que, salvo cambios en la programación de la asignatura que son infrecuentes, aunque cada vez se dan más, la estadística está al final de libro. Por tanto, en un currículum cada vez más denso, como hemos podido observar en la evolución de éste en el capítulo anterior, si algún tema no se imparte es el de estadística. Este hecho se puede observar en la decisión tomada por las comisiones de la prueba de acceso a la universidad en este curso, 2016-2017, donde se ha incluido por primera vez la Estadística en la asignatura Matemáticas II, ya de por sí muy densa, y ante la falta de tiempo para impartir todo el temario se ha optado por excluir la estadística de la prueba selectiva, lo que genera que en la práctica tampoco se vea en los centros.

La microestructuctura es similar entre textos y en el capítulo 6 se profundizará un poco más sobre ella, ya que nos permite delimitar las unidades de análisis correspondientes.

Desde una perspectiva general la microestructura de los temas es la siguiente:

1. Una lectura introductoria, que suele tener como tema central algún pasaje de la historia del desarrollo del concepto contado de forma amena, o una relación con conceptos previos del alumnado.
2. Unas actividades introductorias que indagan sobre los conocimientos previos del alumnado.
3. Exposición de los contenidos de forma ordenada.
    a. Se expone el concepto.
    b. Se exponen los procedimientos asociados al concepto.
    c. Se introduce un ejercicio resuelto.
    d. Se proponen varios ejercicios o problemas.

4. Mapa conceptual o esquema y breve propuesta de repaso.
5. Ejercicios finales del tema.
6. Recursos online y propuestas de investigación.

Como se observa en la microestructura genérica de los capítulos de los libros, en muchas ocasiones se desconectan unos conceptos y procedimientos de otros hasta el final del tema, donde sí existen ejercicios o actividades que trabajan simultáneamente varios conceptos o procedimientos. Esto puede producir que los alumnos separen ciertos conceptos (medidas de tendencia central y de dispersión en nuestro caso) y no los relacionen.

Para concluir este apartado, como indicaban Valverde et al. (2002), la estructura del libro se hace fundamental, porque dependiendo de la macro y la microestructura se producen modelos didácticos diferentes que afectan al aprendizaje del alumno.

3.4.3. El libro de matemáticas y el curriculum.

Como se observa en la macroestructura de los libros de matemáticas, el texto es una extensión del curriculum en el aula, es decir, sigue el mismo orden que los bloques indicados en la legislación y trata de dar voz a la metodología propuesta en la legislación.

En cierto sentido los libros de texto son los que coordinan el curriculum en el aula,

> Los libros de texto son la característica más importante de la enseñanza de las matemáticas debido a su estrecha relación con la instrucción en el aula. Los libros de texto identifican los temas y los ordenan de la manera que los estudiantes deben explorarlos. También intentan especificar cómo se pueden estructurar las clases en el aula con ejercicios y actividades adecuadas. Por lo tanto, los libros de texto están diseñados con el fin de ayudar a los profesores a organizar su enseñanza (Johansson, 2005, p.119).

En palabras de Valverde et al. (2002).

> En la mediación entre los objetivos del sistema educativo y las realidades de las aulas, los libros de texto son un factor crítico en la caracterización de las oportunidades educativas. Muchos participantes del sistema educativo se preocupan por establecer las metas del sistema. Sin embargo, es una responsabilidad fundamental y profesional de los docentes preocuparse por su implementación… los libros de texto se escriben para apoyar y guiar la instrucción en el aula. (p.167)

De hecho Valverde et al. (2002) indican que

> Los libros de texto están diseñados para traducir las abstracciones de la política curricular en operaciones que los profesores y los estudiantes pueden llevar a cabo. Se pretende que sean mediadores entre las intenciones de los diseñadores de la política curricular y los profesores que imparten instrucción en las aulas. Su función mediadora precisa puede variar de acuerdo con las especificidades de diferentes naciones, sistemas educativos, escuelas y aulas. Su gran importancia es constante (p.2).

Por tanto, se puede ver que los libros de texto, como se indicaba en la introducción del capítulo, juegan un papel fundamental de relación no sólo entre el saber científico y el enseñado, sino también entre el curriculum y el estudiante.

De hecho Valverde et al. (2002) modifican el modelo tripartito de curriculum de la Asociación Internacional para la Evaluación del Logro Educativo (IEA por sus siglas en inglés) insertando un cuarto elemento, que es el propio libro de texto, tal y como se puede observar en la figura 14. El modelo original era definido tomando partes de otros autores por Törnroos (2005, p.316) como sigue,

> En este modelo, los sistemas educativos se describen a través de tres niveles de currículo: el previsto, el plan de estudios implementado y el alcanzado. El plan de estudios previsto se refiere al currículo tal y como existe a nivel de sistema y cubre las metas y objetivos establecidos en los documentos oficiales del currículo. El plan de estudios aplicado es el currículo tal como se aplica en las escuelas y las aulas. En el caso de las matemáticas, el currículo implementado significa la instrucción de matemáticas que los estudiantes reciben en clase. El currículo alcanzado es simplemente los resultados de la educación. Este nivel incluye no sólo los conocimientos y habilidades que los estudiantes han adquirido en la escuela, sino también los resultados afectivos de la escolarización, como la motivación para el estudio y las actitudes hacia el estudio de las matemáticas.

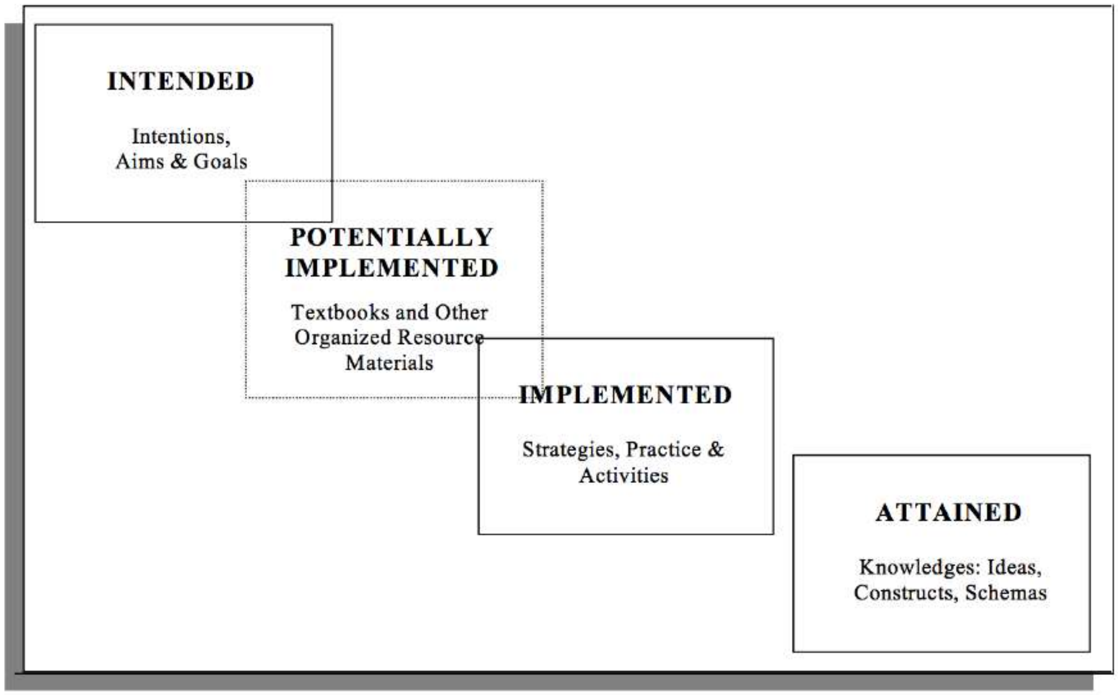


Figura 14. Libros de texto y el modelo tripartito. (Valverde et al., 2002, p.13)

En la figura se observa en un primer nivel el curriculum previsto o pretendido, es decir, el que da la administración educativa, el elemento que se inserta en el modelo tripartito original es el punteado, en este caso es el papel del curriculum potencialmente implementado, que lo conforman los libros de texto y otros recursos, en el siguiente nivel el curriculum implementado, que es el que el profesor lleva a cabo, y por último el conseguido o implementado, que lo conforman las ideas y conocimientos que adquiere el alumno como ya se indicaba previamente. Esta estructura es muy similar a la del EOS que se mostrará en el capítulo 5, donde se distinguirá entre significado pretendido e implementado, teniendo también el significado de institucional y el personal, donde el libro ayudará al tránsito de unos significados a otros.

Pero no es el único modelo de curriculum en el que el libro juega un papel fundamental, otro modelo lo presenta esquematizado Johansson (2003) en su tesis doctoral a partir de estudios previos de Porter y Smithson (2001) que distingue cuatro niveles, el curriculum previsto, el promulgado, el evaluado y el aprendido. Con curriculum previsto se refieren a "promulgaciones políticas tales como estándares curriculares, marcos o guías que describen el currículo que se espera que los maestros enseñen" (Porter y Smithson, 2001, p.2) Por curriculum promulgado se entiende "el contenido curricular real que los estudiantes trabajan en el aula" (Porter y Smithson, 2001, p.2) El curriculum evaluado es representado por los test de alto impacto sobre el alumnado, porque definen su futuro, la figura equivalente en España sería la selectividad o la reválida que se quería implantar con la LOMCE. El curriculum aprendido sería lo que el alumno aprende.

Además de estos cuatro niveles, Johansson (2003) introduce el concepto de curriculum oculto

> el currículo oculto es una expresión ampliamente conocida - una metáfora para describir el currículo no deseado, que es lo que los estudiantes aprenden de la cultura y el clima de las escuelas…Los libros de texto pueden, en cierta medida y en varias aulas, ser considerados como el currículo implementado y asociarse al currículo promulgado… Por lo tanto, si los libros de texto son el currículo implementado, el análisis de libros de texto puede decirnos algo sobre el currículo oculto. (pp. 8-9).

Como ya indicó Crawford (2003) dando su punto de vista,

> Los libros de texto escolares son construcciones sociales y durante su proceso de fabricación los autores y los editores se encuentran inevitablemente incluyendo y excluyendo las expectativas de las partes interesadas acerca de lo que constituye el conocimiento legítimo del curriculum. (p.6).

Incluso algunos autores como Herbel-Eisenmann (2007) lo consideran curriculum propiamente dicho, poniéndole la etiqueta de "curriculum escrito".

Como se observa en los modelos anteriores, el libro es una referencia del curriculum y en muchos casos se considera un nivel más del mismo, por tanto, se analizará con estos modelos e ideas en mente, pero bajo un prisma algo diferente la influencia del curriculum en el libro y de este en el aula, además de su papel como mediador necesario del curriculum y el alumno.

3.5. Algunos marcos teóricos para el análisis de libros de texto en matemáticas

Aunque han existido diferentes trabajos en el sentido de unificar y estandarizar la metodología para analizar libros de texto , en Didáctica de las Matemáticas existen varios marcos teóricos que desarrollan herramientas y constructos para analizar libros de texto, entre ellos vamos a destacar tres, el Tetraedro Socio-Didáctico, el método basado en el Estudio Internacional de Tendencias en Matemática y Ciencias y el Enfoque Onto-Semiótico, de este último solo se realizará una breve descripción, ya que será el marco teórico a emplear en esta tesis y se le dedicará un capítulo posteriormente.

Antes de dar paso a los diferentes modelos teóricos de análisis de libros es conveniente destacar un concepto que se va a dar en todas las teorías, el de *artefacto*. Norman (1991) los define como "un artefacto cognitivo es un dispositivo artificial diseñado para mantener, mostrar u operar con información con el fin de dar una función representativa" (p.17). Es necesario dar esta definición y otras más profundas ya que el libro se va a considerar en la mayoría de las teorías un artefacto. En un sentido más amplio se puede utilizar la definición de Sträßer (2012).

> El artefacto se utiliza en un sentido amplio, apoyándose en la noción de Wartofsky (1979) (XIII: "todo lo que los seres humanos crean por la transformación de la naturaleza y de sí mismos") que difiere del entendimiento tradicional de los recursos curriculares. Los textos de este libro no sólo analizan los recursos materiales, sino que prestan la debida atención a las fuentes inmateriales disponibles para los profesores (de matemáticas). Además de los recursos materiales, un análisis exhaustivo de los recursos de los docentes también debe tener en cuenta los recursos inmateriales como los colegas y las comunidades de prácticas docentes (p.vi).

Recurriendo a la fuente original, Wartofsky (1979) dedica la introducción de su libro a definir el concepto de artefacto, indicando que el primer artefacto que diferenció al ser humano del resto de animales fue el lenguaje, y que a partir de ese momento se dedicó a crear otro tipo de artefactos artificiales y teóricos. En este sentido Wartofsky (1979) le da a los artefactos una dimensión social y los clasifica en tres niveles, primarios, secundarios y terciarios.

> Lo que constituye una forma de acción distintivamente humana es la creación y uso de artefactos, como herramientas, en la producción de los medios de existencia y en la reproducción de la especie… Los artefactos primarios son los que se utilizan directamente en esta producción; Los artefactos secundarios son los utilizados para la preservación y transmisión de las habilidades adquiridas o modos de acción o praxis por los que se realiza esta producción (p.202).

Los artefactos terciarios serían una derivación de los secundarios, ese papel lo ocupan las teorías y los modelos.

Así pues, aunque la noción de artefacto puede ser limitada o muy amplia, en general, se considera el libro de texto como un artefacto cultural. (Crawford, 2003; Ferguson, Collison, Power, y Stevenson, 2006; Rezat, 2006a).

El libro como artefacto es un ente complejo, por eso es necesario un análisis y definir un marco teórico determinado para su análisis, tal y como indica Rezat (2013) “el libro de texto de matemáticas es un artefacto complejo, que ofrece formas particulares de ser utilizado y otras restricciones” (p.669).

Además, hay que tener en cuenta la diferencia entre instrumento y artefacto, que son dos ideas, que por su parecido en el lenguaje cotidiano tienden a confundirse “la diferenciación entre artefactos e instrumentos está en el núcleo de la teoría del instrumento. El instrumento no es una entidad dada, sino que es creado por el usuario en el curso de la utilización de un artefacto” (Rezat, 2013, p.661).

3.5.1. El tetraedro socio-didáctico (SDT).

Es un modelo socio-cultural basado en el triángulo didáctico alumno-maestro-saber, que amplia este triángulo para poder analizar otros elementos intervinientes en el proceso educativo. Este modelo ya estaba presente desde Chevallard, quien lo llama *sistema didáctico* (Chevallard, 1997). Desarrollado por Rezat y Sträßer (2012) tiene como uno de los objetivos poder analizar *artefactos*, uno de ellos es el libro de texto como se ha presentado en la introducción, y que como se ha indicado previamente es una creación humana para mostrar información y tiene carácter social y cultural.

El primer tetraedro fue pensado para analizar libros de textos y material TIC diseñado por Rezat y posteriormente Sträßer lo generalizó para los artefactos en general. La perspectiva que aporta es el papel del profesor como mediador entre los libros de texto y los alumnos haciendo énfasis en que el alumno no elige el libro de texto, sino el profesor, que utiliza uno u otro libro con un objetivo concreto y esto estructura el proceso de aprendizaje de las matemáticas. La configuración del tetraedro se puede ver en la figura 15.

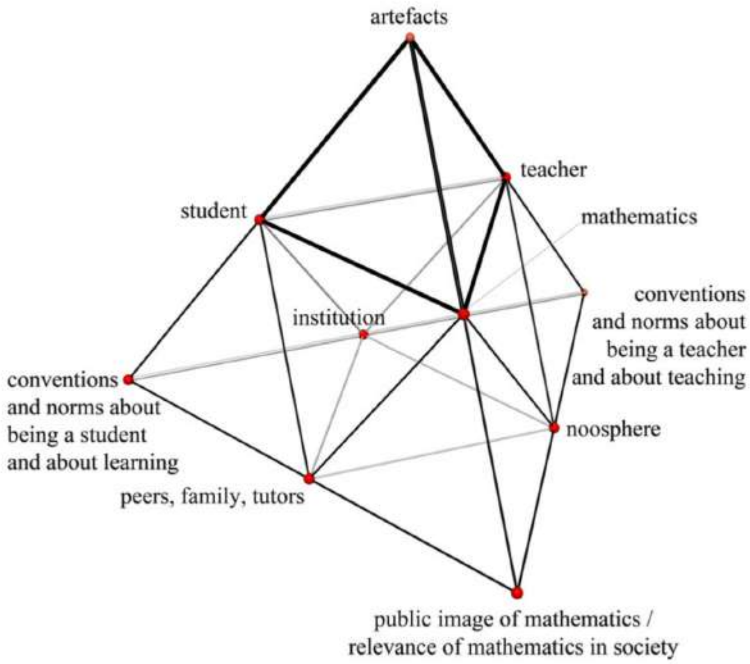


Figura 15. Tetraedro socio-didáctico. (Rezat y Sträßer, 2012, p.648)

El desarrollo de todas las caras del tetraedro genera una imagen de cómo se relacionan todos los elementos que intervienen en el proceso didáctico, que entre otros incluyen los que ya estaban en el triángulo didáctico, y a los que se añaden diferentes convenciones, sobre enseñar y sobre aprender, la función de las familias y los compañeros, la imagen pública de las matemáticas y su importancia en la sociedad, la noosfera, la institución y los artefactos. La noosfera es un concepto que al igual que el de sistema didáctico definió Chevallard (1997) y lo hace indicado que la noosfera es

> la esfera donde se piensa -según modalidades tal vez muy diferentes- el funcionamiento didáctico. Para esta instancia sugerí el nombre paródico de noosfera. En la noosfera, pues, los representantes del sistema de enseñanza, con o sin mandato (desde el presidente de una asociación de enseñantes hasta el simple profesor militante), se encuentran, directa o indirectamente (a través del libelo denunciador, la demanda conminatoria, el proyecto

transaccional o los debates ensordecidos de una comisión ministerial), con los representantes de la sociedad (los padres de los alumnos, los especialistas de la disciplina que militan en torno de su enseñanza, los emisarios del órgano político) (p.28).

Este modelo y se puede observar en la figura 16.

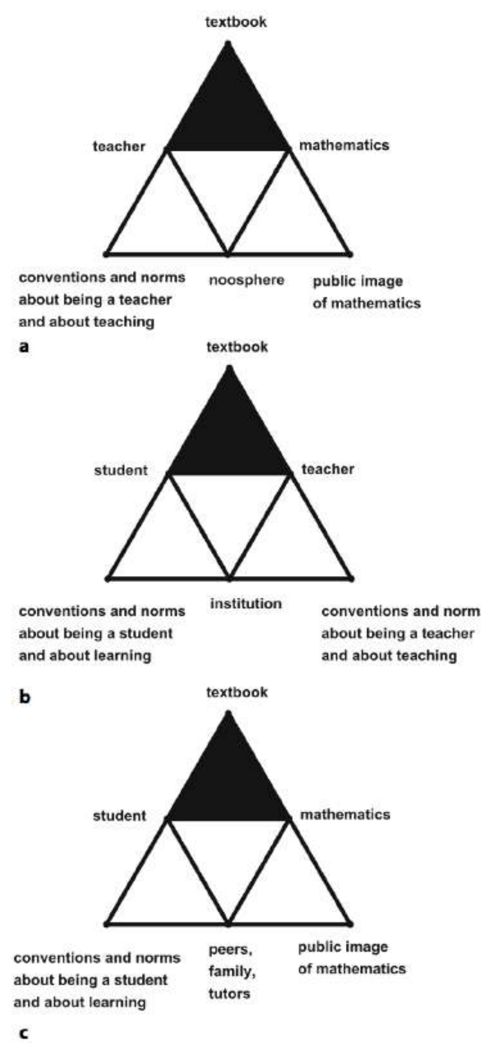


Figura 16. Desarrollo de la caras del tetraedro socio-didáctico. (Jukić y Glasnović, 2016, p.366)

El objetivo de este modelo es analizar la interacción entre los profesores, los alumnos, y los artefactos principalmente, ya se ha hablado del libro de texto, pero como indican (Rezat y Sträßer, 2012) y en especial el segundo “los artefactos mediadores pueden ser libros de texto de matemáticas, tecnologías digitales, así como tareas y problemas, lenguaje.” (p. 644) Su potencia radica en que nos permite analizar el libro de texto como el nexo entre las personas y las matemáticas, como elemento social y cultural y como indicábamos en la introducción como transposición didáctica de la ciencia matemática, es decir, como matemáticas que pueden ser comprendidas por la institución que conforman los alumnos de una escuela.

A pesar de toda la ampliación que se hace, la estructura del tetraedro permite que para analizar los libros se puede centrar la atención en el tetraedro superior que se presenta en la figura 17.

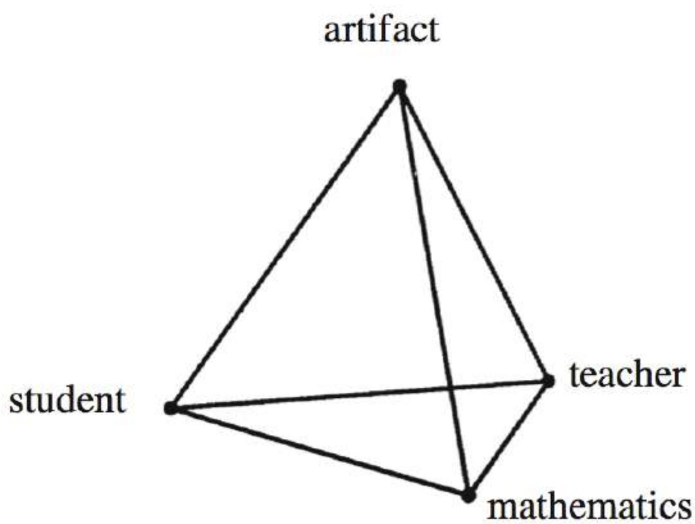


Figura 17. Tetraedro de la situación didáctica. (Rezat y Sträßer, 2012, p.645)

De esta manera se analiza solo la relación entre el triángulo didáctico con la añadidura de los artefactos, desarrollado queda como se muestra en la figura 18.

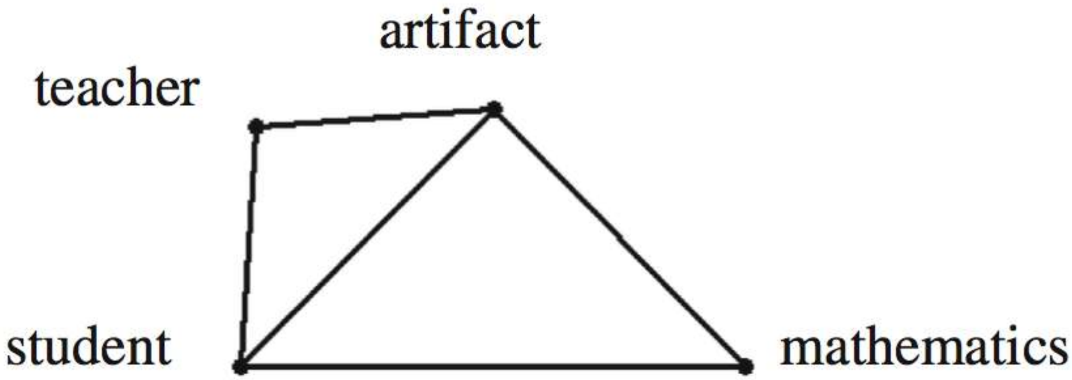


Figura 18. Mediación del profesor en el uso de los artefactos por los alumnos. (Rezat y Sträßer, 2012, p.645)

Por último, teniendo en cuenta la estructura original del tetraedro

> los modelos SDT utilizan el libro de texto con sus influencias sociales y culturales (Rezat y Sträßer 2012). Se basa en el modelo de Engeström del sistema de actividades y comprende no sólo maestros, estudiantes, matemáticas y herramientas involucradas en el aprendizaje, sino también parámetros institucionales, sociales y culturales que influyen en la educación matemática. Con todos sus vértices y puntos destacados, el modelo SDT es lo suficientemente poderoso como para proporcionar una estructura de uso de libros de texto, con los profesores y estudiantes como los principales usuarios y para mostrar la interacción cultural entre el contexto institucional y social. (Rezat, 2013) (Jukić y Glasnović, 2016, p.356).

Por tanto, para analizar los libros, este marco teórico no trabaja solo sobre ellos, sino que también se trabaja a través de entrevistas a los alumnos y profesores y tiene en cuenta la institución en la que se trabaja y el papel en la sociedad de las matemáticas.

3.5.2. Método basado en el Tercer Estudio Internacional en Matemáticas y Ciencias (TIMMS).

El TIMMS (Third International Mathematics and Science Study) es una evaluación internacional que se realizó a finales de la década de los 90 donde se analizaba el currículum. En este estudio participaron 44 países, entre los que se encontraba España, como se puede consultar en https://www.nap.edu/read/5508/chapter/8. El análisis se llevó a cabo en los cursos que incorporaban alumnos de 9, 13 años y el curso final de secundaria.

Este estudio analiza el curriculum basándose en el modelo tripartito que exponían Valverde et al. (2002), y que se ha expuesto en el apartado 3.4.3. Es por tanto un marco teórico de análisis de curriculum y esta es la pieza clave del sistema, presenta un modelo de tres niveles de curriculum: el curriculum pretendido, el curriculum implementado y el curriculum conseguido. Como se ha expuesto, en este marco teórico los autores modificaron el modelo de la IEA para incluir los libros de texto a medio camino entre el curriculum pretendido y el implementado, como piedra angular de transmisión entre ambos niveles del curriculum. Para el estudiar los libros de texto, en el TIMSS se utilizó una combinación de diferentes tipos de análisis que sintetizan O'Keeffe y O'Donoghue, (2011b) en la tabla 5.

Tabla 5. Marcos teóricos su influencia y aportaciones. (p.2)

Marco teórico	Influencia	Aportaciones
TIMSS, 2002	Provee la estructura para el análisis de libros de texto	Análisis de contenido Análisis de estructura Análisis de expectativas
Rivers, 1990	Refuerza el marco del TIMSS	Análisis de contenido Análisis de expectativas
Mikk, 2000	Refuerza el marco del TIMSS	Análisis de estructura
Morgan, 2004	Provee el marco para el análisis del lenguaje	Análisis del lenguaje

Por tanto, para estudiar los libros se desarrolla el instrumento TIMMS+ combinando el marco teórico inicial, que se basa en el análisis de contenido y de estructura expuesto en apartados anteriores, con la matriz de Rivers (1990) y Mikk

(2000), que desarrolló el primero en el SIMMS (Segundo Estudio Internacional en Matemáticas y Ciencias) y en el que analiza los siguientes elementos de los libros de texto: la motivación, las claves de comprensión, las ayudas técnicas y la orientación filosófica.

Para la motivación presta atención a que el texto presente notas históricas, biografías de matemáticos, información sobre el desarrollo profesional, resolución de problemas, imágenes y citas, anécdotas o alguna viñeta humorística. Para las claves de comprensión los ítems que analiza son el color específico de los cuadros, y de las páginas, si se emplean colores para resaltar el texto y el uso de diagramas y gráficos. Para las ayudas técnicas observa si indica el uso de la calculadora y lo explica y si se utilizan, se da formación y se explica cómo se utiliza software matemático específico. Por último, en la orientación filosófica, se fija en el énfasis, que se puede traducir cómo la utilidad que se le dan a los conceptos matemáticos (relacionados con el mundo real, puramente académicos, etc., …) y la filosofía pedagógica predominante. En estudios posteriores que emplean la matriz de Rivers se han descompuesto algunos de estos elementos para realizar un análisis más amplio como en O'Keeffe y O'Donoghue (2011a).

El TIMMS+ además cuenta con el análisis lingüístico de Morgan (1998) que le añadió al método los elementos para el análisis lingüístico. En este libro, Morgan analiza el lenguaje matemático y como es la escritura específica de los libros de texto matemáticos, analizando entre otros elementos el tipo de registro y la notación que se emplea en los libros de texto.

La evolución del modelo se concretó en la tesis doctoral de O'Keeffe (2011) y se resume en la figura 19, donde condensó la forma de estudiar la estructura, el contenido y las expectativas.

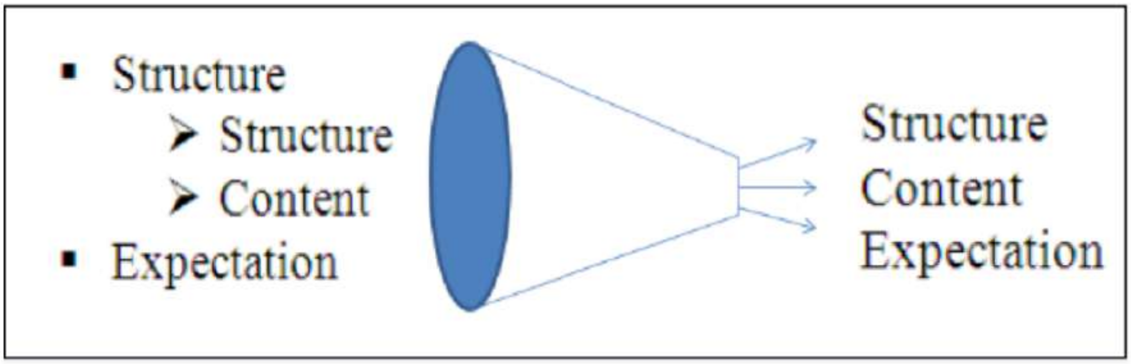


Figura 19. Desarrollo del instrumento TIMMS+. (O'Keeffe y O'Donoghue, 2011a, p. 3.)

La potencia de este marco es que analiza varios niveles de concreción a la vez ya que estudia la conexión entre curriculum y libros de texto, cuando otros marcos se concentran solamente en el propio libro, aunque en este resumen solo se han tratado las herramientas acerca de los libros.

3.5.3. Método basado en el Enfoque Onto-Semiótico (EOS).

En el capítulo 5 se verá este marco teórico con total amplitud, en este apartado se realiza un breve avance de los conceptos más destacados y de las herramientas más interesantes del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) que fue desarrollado por Godino y colaboradores en diferentes trabajos desde principios de los 90 (Godino y Batanero, 1994); (Godino, Bencomo, Font, y Wilhelmi, 2006); Godino, Contreras, y Font, 2006; Godino y Font, 2007; entre otros).

En este marco se analizan los significados de los objetos matemáticos, para establecer el significado global de referencia se basa en dos ideas, la de significado global del objeto, que está formado por diferentes significados parciales, y el significado de referencia. Este último concepto es muy interesante y aunque se analizará en el capítulo 5 se avanza la siguiente definición,

> Los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio. Para una institución de enseñanza concreta, el significado de referencia será una parte del significado holístico del objeto matemático (Pino-Fan, Godino, y Moll, 2011, p.147).

A los significados parciales de los objetos se llega tras el análisis de seis facetas: epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica (Godino et al., 2007).

Sin embargo, como indican Godino y Font (2007) los sistemas de prácticas no son sencillos de analizar, por eso utiliza el análisis de seis entidades u objetos matemáticos primarios (Godino, 2002; Godino y Font, 2007) que son:

> - Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos, ...) en sus diversos registros (escrito, oral, gestual, ...)
> - Situaciones-problemas (aplicaciones extra-matemáticas, ejercicios, ...)
> - Conceptos- definición (introducidos mediante definiciones o descripciones) (recta, punto, número, media, función, ...)
> - Proposiciones (enunciados sobre conceptos, ...)
> - Procedimientos (algoritmos, operaciones, técnicas de cálculo, ...)
> - Argumentos (enunciados usados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, deductivos o de otro tipo, ...) (Godino y Font, 2007, p.327).

Para analizar libros de texto, que es el objetivo final de esta tesis el EOS provee una herramienta, que se llama Guía de Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS)(Godino, Rivas, et al., 2008).

> Es una herramienta que da cuenta de un proceso complejo y dinámico, - la emergencia de objetos y significados- y que puede ser cumplimentada de varias maneras; lo cual pone de manifiesto la relatividad de los objetos y significados matemáticos (Castro, Godino, y Rivas, 2010, p. 267).

Esta herramienta clasifica los objetos según su tipo primario, como se mostraba unas líneas más arriba, en tablas en las que se indica el objeto y su significado. “La ventaja de utilizar esta herramienta es que sistematiza el análisis de objetos y significados permitiendo un gran margen de maniobra.” (Del-Pino y Estepa, 2015, p.5) Por tanto, cuando se analicen los libros de texto se hará a través de los 6 objetos matemáticos primarios.

3.5.4. Otras teorías semióticas.

3.5.4.1. Teoría de la mediación semiótica. (TSM)

La teoría de la mediación semiótica trabaja de nuevo con la noción de artefacto que se exponía en la introducción, sólo que ahora se pone el foco sobre más elementos del tetraedro didáctico, en este caso el profesor y el alumno. Se basa en las teorías de la mediación semiótica de Vygotsky y en la de las teorías de las situaciones didácticas de Brousseau.

> La TSM se centra en torno a la idea seminal de la mediación semiótica introducida por Vygotsky (1978) y tiene como objetivo describir y explicar el proceso que comienza con el uso de un artefacto por el estudiante y conduce a la apropiación de un contenido matemático particular por parte del mismo (Mariotti y Maracci, 2011, p.60).

Dos conceptos son base en esta teoría, el de potencial semiótico de un artefacto y el de ciclo didáctico.

El potencial semiótico de un objeto se define como

> Por potencial semiótico de un artefacto nos referimos al doble enlace semiótico que puede ocurrir entre un artefacto y los significados personales que emanan de su uso para realizar una tarea y al mismo tiempo los significados matemáticos evocados por su uso y reconocibles como matemáticos por un experto… La distinción entre significados personales y significados matemáticos puede recordar la distinción de Brousseau entre conocimiento (en francés: connaissance) y conocimiento (en francés: savoir) (Brousseau, 1997). Incluso si no están en antítesis, las dos perspectivas no pueden ser reducidas entre sí: la primera subraya la dimensión semiótica de los procesos de enseñanza - aprendizaje, que está a la sombra de estos últimos (Mariotti y Maracci, 2011, p.61).

El aprendizaje se realiza a través de lo que en esta teoría se llama el ciclo didáctico, es decir, la evolución de los significados adquiridos por el alumno está marcada por el uso del artefacto, sin embargo, en este ciclo es fundamental el papel del profesor, no solo el del artefacto, como se aprecia en la figura 20.

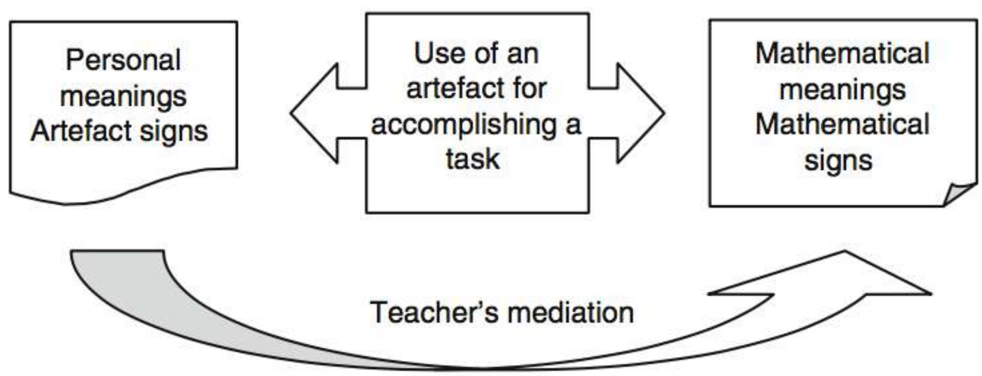


Figura 20. Potencial semiótico de un artefacto y mediación del profesor. (Mariotti y Maracci, 2011, p.62)

Mientras que el ciclo didáctico que produce el uso del artefacto y se observa en la figura 21, explica cómo evolucionan los significados a través del uso del artefacto.

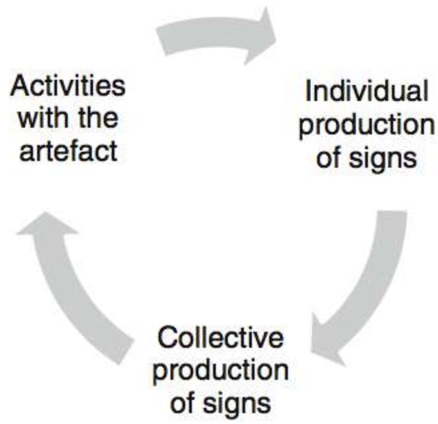


Figura 21. Ciclo didáctico.

Así pues, en este caso ya solo queda explicitar un poco más el papel del libro, que en este caso es el de artefacto tal y como indicaba Wartofsky (1979) pero que se matiza levemente para esta teoría.

> Consideramos el término "texto" en un sentido amplio incluyendo cualquier tipo de conjunto organizado de signos, también pertenecientes a diferentes sistemas semióticos, aunque en lo siguiente nos limitaremos a considerar la mayoría de los textos verbales escritos. Un texto proporciona una serie de signos organizados en una estructura estable que puede convertirse en objeto de reflexión y discusión, y por esta razón el texto tiene el potencial de desencadenar la producción de nuevos signos (Mariotti y Maracci, 2011, p.63).

3.5.4.2. Teoría semiótica de Greimas.

En este marco se analiza el texto desde una perspectiva semiótica, en concreto los cuatro niveles narrativos, manipulación, competencia, actuación y sanción, para estudiar qué es lo que da significado al texto (Ricoeur, Collins, y Perron, 1989).

Se basa en el modelo de análisis que diseño Algidus Julen Greimas, que fue profesor en la Escuela de Semiótica de París, cuyo principal elemento es el cuadrado semiótico,

> El cuadrado semiótico, desarrollado por Greimas y Rastier, es un medio de refinar los análisis de oposición al aumentar el número de clases analíticas derivadas de una oposición dada de dos (vida / muerte, por ejemplo) a cuatro (por ejemplo, vida, muerte, vida y la muerte (los muertos vivientes), ni la vida ni la muerte (ángeles)) a ocho o incluso diez. (Hébert, 2006)

La oposición de estos términos se muestra en la figura 22.

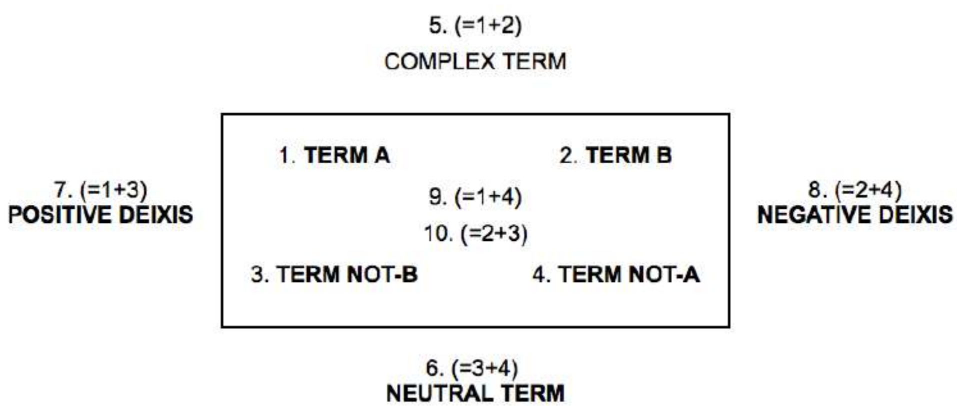


Figura 22. Estructura del cuadrado semiótico. (Hébert, 2006)

Como se puede observar en la figura 22, con la combinación de las clases analíticas simples se conforman hasta diez clases derivadas.

3.4.5.3. Otras teorías.

Existen otras teorías que no se desarrollarán en esta tesis, como la de la cadena semiótica de Presmeg (2001), basada en el modelo diádico de Saussure (significante y significado) y del modelo tríadico de Peirce (objeto, representante e interpretante.)

Otros autores han utilizado la teoría semiótica a partir de los trabajos de Peirce incluyendo otros de Habermas para completar el marco teórico como Ongstad (2006).

De hecho, algunos otros autores elaboran su marco haciendo aportaciones de otros filósofos o lingüistas al signo triádico de Peirce.

3.6. Futuro del libro de texto

El auge de los e-books es imparable, cada día más editoriales ofertan lo que se llama "mochila digital" como un paso más del inicio que se dio con la digitalización del aula a través de las pizarras digitales. Como se indicaba en la introducción el libro de texto ha significado un apoyo inestimable en la enseñanza no universitaria, en la actualidad, en la era de la información, nos podíamos plantear sobre la continuidad en el sistema escolar del libro de texto de papel.

Se han indicado previamente algunas características de los libros de texto, y estas y otras nos la aportan las nuevas tecnologías que presentan textos de la misma calidad o superior a los escritos en papel, superan a estos en que pueden introducir textos o representaciones dinámicas, almacenar cientos de libros en el soporte (Ipad, libro electrónico, portátil...), fácil actualización, ahorro de papel y, en consecuencia, de árboles, etc., ... Además, si los estudiantes usan soporte electrónico no tendrán que cargar con varios libros de camino al colegio, se eliminan problemas futuros de espalda, etc., ...

Love y Pimm (1996) realizan una propuesta de hacia dónde deben ir los libros de texto, mostrando varias directrices:

- Los ejercicios deben ser interactivos.
- Los libros deben de apoyarse en Cd-roms o internet.
- La estructura debe ser no-lineal.
- Las imágenes deben ser dinámicas y los videos deben tomar relevancia.

En consecuencia, con estas ventajas y viendo que cada vez son más las editoriales que consiguen propuestas muy adecuadas, parece probable que, en pocos años, el libro de texto en papel será sustituido por su equivalente electrónico. Sin embargo, el libro en papel y el libro electrónico coexistirán durante un tiempo al menos, ya que esto es lo ocurre con el resto de literatura, los periódicos en papel y su edición electrónica, los artefactos de cálculo y el cálculo con lápiz y papel, ... Sin embargo, la elección de los libros de texto en papel o formato electrónico será siempre una decisión difícil…

> Se realizarán estudios de comparación de libros de texto y medios electrónicos, pero las decisiones sobre su uso tenderán a hacerse independientemente de los estudios. La dificultad de comparar los programas de estudio de cualquier tipo, combinada con la dificultad de determinar con precisión qué es lo que los estudiantes encuentran en un entorno electrónico, obstaculizará la mayor parte de las investigaciones comparativas del currículo de este tipo. Como resultado, las decisiones sobre cómo proceder se basarán más en la confianza en una plataforma que en otra, en lugar de en la evidencia pura y dura. (Usiskin, 2013, p.722).

Los errores y dificultades no resueltas en el pasado de las matemáticas siempre han sido las oportunidades de su futuro.

Bell, E.T.

Capítulo 4

La investigación didáctica sobre dispersión

4.1. Introducción.

Una de las dificultades que se puede encontrar al realizar una revisión bibliográfica es cómo categorizar o clasificar todos los estudios previos. Tras realizar el análisis lingüístico que se expone en el capítulo 1 y el análisis del curriculum que se muestra en el capítulo 2, se ha pensado que la mejor manera de organizar la investigación previa es bajo los diferentes significados de la dispersión que aparecen en el curriculum y que muestran Batanero et al. (2015) tal y cómo se hizo de forma resumida en Del-Pino (2017) y que sintetizan en la tabla 6, tras un análisis mediante el EOS, que se ha mostrado al final del capítulo 3.

Tabla 6. Significados diferenciados de la dispersión. (Batanero et al. 2015, p.17)

	Descriptivo univariante	Descriptivo bivariante	Probabilístico	Inferencial
Situaciones problemas	Análisis de variabilidad producida en los datos.	Estudiar relación entre variables. Analizar la bondad de ajuste de un modelo.	Análisis de variabilidad probable en un modelo.	Precisión de una estimación. Riesgo de error en un contraste
Lenguaje	Gráficos estadísticos univariantes Símbolos: $\bar{x}$, S.	Gráficos estadísticos bivariantes Símbolos: r; S_{xy}	Representación gráfica de distribuciones. Tablas de distribuciones.	Representación de distribuciones muestrales. Símbolos:

	Descriptivo univariante	Descriptivo bivariante	Probabilístico	Inferencial
			Símbolos: σ, ξ, N (μ, σ)	$N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$
Conceptos	Resúmenes estadísticos descriptivos	Covarianza, Correlación, Coeficiente de determinación	Distribuciones de probabilidad Parámetro	Distribución muestral, estimación, intervalo de confianza, error tipo I y II
Propiedades	La suma de la distancia de datos a la media es cero. Las medidas de dispersión siempre son positivas	Partición de la varianza en parte explicada y no explicada por la regresión	Desigualdad de Tchebycheff	Insesgadez (de un estimador) Relación entre confianza, precisión y tamaño de la muestra
Procedimientos	Cálculo numérico de estadísticos	Mínimos cuadrados Otros modelos de ajuste	Cálculo de probabilidades Simulación	Muestreo Contraste de hipótesis Simulación
Argumentos	Similares a otras ramas de la matemática	Similares a otras ramas de la matemática	Incluyen expresiones de probabilidad	Incluyen expresiones de probabilidad. No simétricos (en el rechazo o aceptación de una hipótesis)

Por tanto, las investigaciones existentes se organizarán bajo estos cuatro significados, descriptivo univariante, bivariante, probabilístico e inferencial, añadiendo además un apartado fundamental, sobre razonamiento, cultura y sentido estadísticos y otros potencialmente interesantes como el uso de software y nuevas tecnologías en el aula o la representación gráfica en Estadística y su relación con las medidas de dispersión.

4.2. Razonamiento, cultura y sentido estadísticos

El término *cultura estadística* es una traducción del inglés *statistical literacy* que se puede traducir más literalmente como *alfabetismo estadístico*. Se va a tomar la traducción que realiza Batanero et al. (2013) y que es la de *cultura estadística*, que en palabras de Gal (2004) se define como la

> Concepción de la alfabetización estadística que se refiere a lo que se espera de los adultos (en oposición a los estudiantes que aprenden activamente Estadística), en particular los que viven en las sociedades industrializadas. En este contexto, el término alfabetismo estadístico se refiere ampliamente a dos componentes interrelacionados, principalmente (a) la capacidad de las personas para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos relacionados con los datos o los fenómenos estocásticos, que pueden encontrar en diversos contextos (b) su capacidad para debatir o comunicar sus reacciones a dicha información estadística, tales como su comprensión del significado de la información, sus opiniones sobre las implicaciones de esta información, o sus preocupaciones con respecto a la aceptabilidad de las conclusiones dadas. (p.49)

Por tanto, son dos ideas las que se destacan en la definición, por una parte, la de que la cultura estadística está relacionada con las herramientas que tenemos para interpretar y evaluar todo lo que nos rodea que está relacionado con la Estadística, y por otra parte la capacidad comunicativa, que permite formar una opinión a partir de la información estadística y defenderla o criticarla.

Este concepto ha ido tomando fuerza en los últimos 15-20 años y diferentes autores como Watson (2006), Garfield o Franklin et al. (2007) han ido confeccionando partes del todo que puede ser una definición de *cultura estadística*, por ejemplo Franklin et al. (2007) indican

> La cultura estadística es necesaria para las elecciones personales diarias ... La cultura estadística implica una dosis saludable de escepticismo acerca de los hallazgos "científicos" ... La cultura estadística es esencial en nuestras vidas personales como consumidores, ciudadanos y profesionales. Las estadísticas juegan un papel en nuestra salud y felicidad. Las sólidas habilidades de razonamiento estadístico tardan mucho tiempo en desarrollarse ... Pero el diseño de la recopilación de datos, la exploración de datos y la interpretación de los resultados deben enfatizarse en la educación estadística para la cultura estadística (pp. 2-9)

Otra definición es la que da Watson (2006) indicando que piensa que la cultura estadística no quedaba completamente definida por los aspectos que señalaba Gal (2004) y que se indican unas líneas más arriba, para ella la cultura estadística debe incluir

> En particular la interpretación de gráficos y de tablas, además con la apreciación de porcentajes y medias dentro de la alfabetización cualitativa… La cultura estadística es además el punto de encuentro del curriculum basado en datos y el de probabilidad …(pp.10-11)

Esta opinión ya la expresaba (Garfield, 1999) que daba especial énfasis a la interpretación de tablas y gráficos.

La profesora Batanero et al. (2013) sintetizaba la opinión de Watson (2006) en tres puntos de la siguiente manera,

> (a) El desarrollo del conocimiento básico de los conceptos estadísticos y probabilísticos; (b) La comprensión de los razonamientos y argumentos estadísticos cuando se presentan dentro de un contexto más amplio de algún informe en los medios de comunicación o en el trabajo; (c) Una actitud crítica que se asume al cuestionar argumentos que estén basados en evidencia estadística. (p.9)

Watson (2006) además expone la figura 23 para sintetizar los retos que hay por delante para conseguir alcanzar una formación que trabaje la cultura estadística.

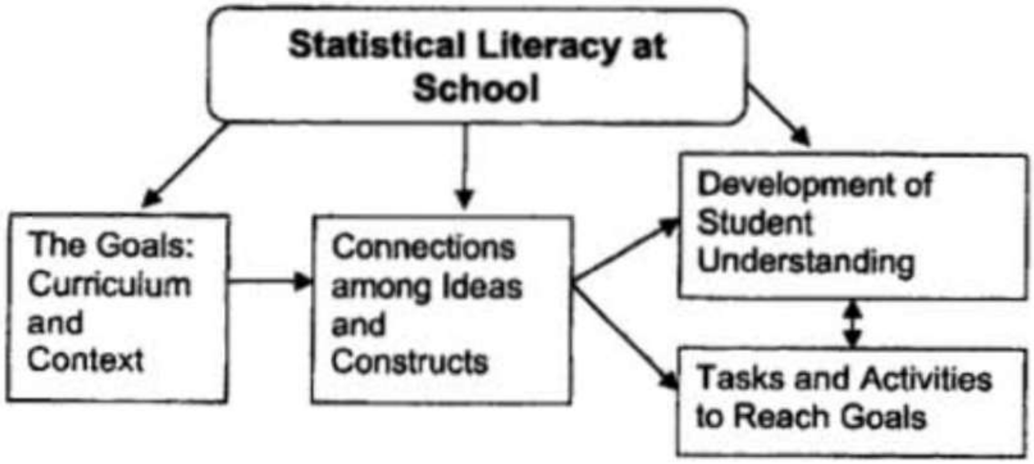


Figura 23. Retos para alcanzar la cultura estadística. (Watson, 2006, p.viii)

Por último, se tiene la noción de *razonamiento estadístico* que es un concepto que se define como "la encarnación estadística del <<sentido común>>" (Wild y Pfannkuch, 1999, p.223) Para el desarrollo de este *sentido común* Wild y Pfannkuch apuestan por integrar los proyectos.

Otra definición interesante es la de (Garfield y Ben-Zvi, 2008),

> El razonamiento estadístico es la forma en que la gente razona con las ideas estadísticas y le da sentido a la información estadística [...] puede involucrar conexiones de un concepto a otro (por ejemplo, medidas de tendencia central y dispersión) o combinar ideas acerca de datos y azar. El razonamiento estadístico también significa entender y ser capaz de explicar procesos estadísticos y de interpretar sus resultados. (p.34)

Wild y Pfannkuch (1999) indican que el razonamiento estadístico incluye cinco tipos de pensamiento fundamentales que se observan en la figura 24 y que son,

- Reconocer la necesidad de los datos. Es decir, reconocer que la experiencia o las anécdotas no sirven para tomar decisiones.

- Transnumeración. Es decir, convertir los datos en otras formas de expresión, como tablas o gráficos, que nos permitan analizar mejor la situación.
- Considerar la variación. Tener en cuenta, como se indicaba en el capítulo 1 que la variabilidad aleatoria está presente en todos los ámbitos, saber reconocerla y predecir sus efectos.
- Uso de modelos estadísticos. Los modelos son fundamentales en muchos aspectos de las matemáticas, en Estadística también, ya que al aparecer la aleatoriedad se hacen imprescindibles.
- Conocimiento del contexto, sobre Estadística y de síntesis.

(b) DIMENSION 2 : TYPES OF THINKING

GENERAL TYPES
- **Strategic**
  - — planning, anticipating problems
  - — awareness of practical constraints
- **Seeking Explanations**
- **Modelling**
  - — construction followed by use
- **Applying Techniques**
  - — following precedents
  - — recognition and use of archetypes
  - — use of problem solving tools

TYPES FUNDAMENTAL TO *STATISTICAL* THINKING (Foundations)
- **Recognition of need for data**
- **Transnumeration**
  (Changing representations to engender understanding)
  - — capturing "measures" from real system
  - — changing data representations
  - — communicating messages in data
- **Consideration of variation**
  - — noticing and acknowledging
  - — measuring and modelling for the purposes of prediction, explanation, or control
  - — explaining and dealing with
  - — investigative strategies
- **Reasoning with statistical models**
- **Integrating the statistical and contextual**
  - — information, knowledge, conceptions

Figura 24. Tipos de pensamiento estadístico. (Wild y Pfannkuch, 1999, p.226)

Incluso Garfield (2002) ahonda más en el problema y dice que un correcto razonamiento estadístico debe incluir,

> Entender por qué las medidas de centro, dispersión y posición dicen cosas diferentes sobre un conjunto de datos; Saber cuáles son los mejores medidas de cada tipo que se deben usar bajo diferentes condiciones, y por qué representan o no a un conjunto de datos; Saber por qué el uso de resúmenes para predicciones será más preciso para muestras grandes que para muestras pequeñas; Sabiendo por qué un buen resumen de los datos incluye una medida de centro, así como una medida de dispersión y por qué los resúmenes de centro y dispersión puede ser útil para comparar conjuntos de datos. (Apt. 3, párr. 11)

Por tanto, se debe entender que cómo se indicaba en el capítulo 1, las medidas de dispersión son necesarias y complementan a las de tendencia central y Garfield (2002) sitúa esta idea como uno de los puntos más importantes sobre el razonamiento estadístico.

Dentro de los estudios acerca del razonamiento estadístico, una serie de los más importantes son los que tratan sobre los heurísticos, se puede definir el término como un método para buscar una solución a un problema que no es exhaustivo, pero da buen resultado, el problema es que se generan reglas sobre problemas basadas en la experiencia, falible, pero que se verifica la mayoría de las veces. Es decir, son soluciones a problemas, que se basan en la experiencia y no en los datos, que en ocasiones funcionan, que se utilizan por rapidez o economía, pero que al no basarse en datos pueden fallar. Esto genera lo que se conoce como sesgo.

Tversky y Kahneman (1975) indican que cuando necesitamos sacar conclusiones o hacer juicios sobre conjuntos de datos en los que hay variabilidad, no se usan métodos formales, sino reglas heurísticas, lo que genera sesgos.

Algunos sesgos de los más conocidos son los siguientes:

a) *Ideas erróneas sobre la media.* Las personas tienden a ignorar la posibilidad de la existencia de valores atípicos y piensan que, para encontrar el centro de un conjunto de datos, siempre hay que sumar todos los números y dividir por el número de valores de datos. Esto implica que no tienen en cuenta la variabilidad. (Meletiou, 2000)

b) *La orientación hacia los resultados*. Este enfoque fue identificado por Konold (1989) que se dio cuenta de que las personas tienden a interpretar los fenómenos aleatorios en términos deterministas. Por ejemplo, una probabilidad del 50% se asigna a menudo cuando no hay predicción razonable posible. Por lo tanto, para las personas que adoptan el enfoque de resultados, la información de que hay una probabilidad del 50% de que mañana llueva no les sirve, una probabilidad del 30% implica que no hay posibilidad de lluvia, mientras que una probabilidad del 70% significa que definitivamente lloverá.

c) *Las buenas muestras deben representar un alto porcentaje de la población.* Implícito en la concepción de multiplicación de la muestra y el muestreo están las nociones de representatividad de la muestra, la idea de que una muestra tendrá características similares a las de la población y la variabilidad de la muestra da la idea de que las muestras no son todas idénticas y por lo tanto no coinciden con la población exactamente. Para mostrar la concepción de multiplicación, las ideas de la representatividad de la muestra y la variabilidad de la muestra deben estar en equilibrio, lo que significa que un individuo reconoce implícitamente que una muestra representativa debe producir estadísticas similares a los parámetros de población y las diferentes muestras deberían estar compuestas por los valores de diferentes observaciones y (probablemente) tienen diferentes estadísticas resumen. (Peters, 2009)

d) *La ley de los números pequeños.* La gente a menudo tiende a pensar que las muestras pequeñas se asemejan a las poblaciones de las que se extraen y las usan como base para la inferencia y la generalización Tversky y Kahneman, (1975) El problema es que erróneamente aplican la "ley de los grandes números" para muestras pequeñas y muestran una confianza injustificada en la validez de las conclusiones extraídas a partir de muestras pequeñas. Como Shaughnessy (1992) señala, para la gente estadísticamente ingenua, el efecto del tamaño de la muestra sobre la variación no es un factor a tener en cuenta.

e) *La idea errónea de la representatividad.* Existe el pensamiento extendido de que una muestra al azar cumple con todas las características de la población general, es decir, que es muy representativa. (Kahneman y Tversky, 1972)

f) *El sesgo de equiprobabilidad*. Consiste en pensar que si en una caja tenemos dos fichas rojas y una blanca existe la misma probabilidad de sacar dos rojas que una blanca. (Lecoutre, 1992)

Una vez definidos lo que son el razonamiento y la cultura estadística, es pertinente definir lo que es el sentido estadístico, que la profesora Batanero et al. (2013) describen como "unión de la cultura estadística y el razonamiento estadístico" (p.8)

Además de la noción de sentido estadístico Batanero et al. (2013) plantean una serie de ideas que son fundamentales en la Estadística, que son las siguientes:

- Datos.
- Gráficos.
- Variabilidad aleatoria.
- Distribución.
- Asociación y correlación.
- Probabilidad. (Los tres enfoques, clásico, frecuencial y subjetivo)
- Muestreo e inferencia.

Por tanto, el sistema educativo debería, en consecuencia, programar el curriculum, y las editoriales, los libros, como extensión del curriculum, para que fomenten y desarrollen la cultura y el razonamiento estadístico. De esta manera, la forma de enseñar los diferentes significados de la dispersión y sus medidas deben estar encaminados a favorecer el desarrollo del sentido estadístico. Para desarrollarlo tenemos dos opciones, una es, como propone Batanero (2000)

> si queremos que el alumno valore el papel de la probabilidad y estadística, es importante que los ejemplos que mostramos en la clase hagan ver de la forma más amplia posible esta fenomenología, e incluyan aplicaciones de su mundo biológico, físico, social y político, como las descritas en Tanur (1989). Sin renunciar a los juegos de azar, aplicaciones como las características genéticas, la previsión atmosférica, el resultado de las elecciones, el crecimiento de la población, la extinción de las especies, el efecto del tabaco o drogas sobre la salud, la extensión de epidemias, los resultados deportivos, el índice de precios o el censo de la población son cercanas a los intereses de los alumnos. (p.9)

Otra es, como proponen Wild y Pfannkuch (1999) o Batanero y Díaz, (2004) trabajar por proyectos, es este sentido las profesoras Batanero y Díaz, (2011) han desarrollado un libro de proyectos que se puede encontrar en http://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/Libroproyectos.pdf

Como se puede observar, es de especial interés en esta tesis, los datos y la variabilidad aleatoria, concretada en las medidas de dispersión, pero en este capítulo se hablará también de otros significados de la dispersión, aplicados al resto de ideas fundamentales en la Estadística que se describen en este apartado.

4.3. Dispersión descriptiva univariante

4.3.1. Introducción

Lo primero que se debe hacer para analizar la dispersión en conjuntos de datos es manejar correctamente estos datos, ¿y en qué consiste el manejo de datos? Pues el manejo de datos incorpora *el "organizar, describir, representar y analizar los datos, con una fuerte dependencia de pantallas visuales, como diagramas, gráficas, tablas y gráficos"* (Shaughnessy, Garfield, y Greer, 1996, p.205) El manejo de datos implica encontrar formas de reducir los datos, manteniendo las características principales del conjunto de datos. (Canada, 2004)

Para hacer esto correctamente hay que centrarse tanto en las medidas de centro como en las de dispersión y establecer correctamente la representatividad, que consiste en tener en cuenta las diferencias entre colección de datos y distribución,

> un conjunto de datos es un conjunto de mediciones de una o más características (de objetos o personas). Una distribución es un atributo de un conjunto de datos que muestra cómo están distribuidas las medidas en un conjunto de datos a través de su rango de valores (Mellissinos, Ford, y McLeod, 1997, p.179)

Ciertamente, las características de una distribución pueden ser representadas a través de parámetros representativos (de tendencia central y dispersión), pero los gráficos también proporcionan una representación. Por lo tanto, la investigación Mellissinos et al. (1997) pone de relieve las conexiones en el pensamiento estadístico entre las concepciones de gráficos, medidas de tendencia central, y medidas de dispersión, a través del tema común y unificador de la distribución. (Canada, 2004)

Como se veía en el capítulo 1 y como nos indican Franklin et al. (2007)una buena educación estadística debe partir de comprender, medir, explicar y en los casos en los que sea posible evitar la variabilidad aleatoria. Para los dos primeros componentes, lo más importante es saber reconocer y cuantificar la dispersión. Así, en primer lugar, el próximo apartado se va a centrar en los diferentes estudios que se han hecho sobre la enseñanza de las medidas de dispersión.

4.3.2. Medidas de dispersión

Una cita de hace 35 años de la profesora Hart (1983) es muy llamativa "el concepto fundamental de desviación estándar es de las primeras áreas de dificultad que un estudiante de estadística encuentra" (p.16)

Sin embargo, como indican Garfield (1995) y Garfield y Ben-Zvi (2007) los profesores suelen subestimar la dificultad de estos conceptos.

Efectivamente, cuando se intenta formalizar el cómo se mide la dispersión surgen una serie de problemas. Cuando un estudiante se plantea cómo medir cuán dispersos están unos datos en torno a una medida de tendencia central, por ejemplo, la media, la primera consideración que puede tener es la de sumar todas las distancias de estos datos a la media, pero encontrará que se compensan y que sale cero. Por tanto, una nueva idea que surge es utilizar un operador que convierta todas las desviaciones en positivas, en este caso se puede utilizar el valor absoluto, como interesa la distancia promedio, se realiza la media. De esta forma se obtiene la desviación absoluta media. Pero cuando se trata de operar con esa fórmula surgen algunas dificultades de manipulación, debido al uso del valor absoluto, que no es derivable, entre otros problemas, por lo tanto, se acude a otro operador que convierte todas las diferencias en positivas, elevar al cuadrado. La nueva situación continúa siendo problemática, ya que la varianza está expresada en unidades de medida al cuadrado, y es interesante para comparar que la medida de dispersión y la medida de tendencia central estén en las mismas unidades, con lo cual se recurre a realizar la raíz cuadrada positiva. Y así es como se obtiene la desviación típica o desviación estándar. (Yap, 2008)

Pero para los alumnos de secundaria, todos estos pasos no son evidentes, al principio no entienden la necesidad de medir la dispersión, ya que consideran las medidas de tendencia central como absolutas (Shaughnessy, 2006). Cuando posteriormente entienden esta necesidad, el uso de diferentes unidades o los problemas del valor absoluto y ventajas de elevar al cuadrado son difícilmente entendidas, planteándoselas y no llegando a entenderlas (Hart, 1983). Por tanto, como señalaba Hart (1983), la desviación estándar es una noción que genera grandes dificultades cuando los estudiantes se enfrentan por primera vez a ella.

Sobre la desviación absoluta media se han llevado a cabo algunos estudios para relacionarla, aunque sea por sus límites, con la desviación estándar, en este caso puede destacarse el trabajo de Boyd, (1985) pero la mayor parte de los trabajos se centran fundamentalmente en dos temas, la desviación estándar y su relación con la media.

Sobre la desviación típica existen dos tipos de trabajos, los que son más matemáticos que didácticos, aunque se aborden desde los dos ámbitos, y los que son sobre la enseñanza y concepciones del alumnado.

Centrándonos en el primer foco, uno de los más antiguos es el de Harding, (1996) donde a partir de un error que percibió dando clases extrajo la relación entre el rango y la desviación típica.

También podemos destacar los trabajos de Yap, (2008) que describe la desviación típica, cómo surge y cómo se enfrentan a ellos algunos ejercicios, además diferencia entre la desviación típica de una población y la de una muestra, como ya se indicaba previamente en la tabla 1.

En otro artículo Pingel, (1993) valora la adecuación de la desviación típica para ser una buena medida de la dispersión en todos los casos. En dicho artículo se concluye que la desviación típica no es un buen estimador de la dispersión cuando la distribución de datos no es simétrica y centrada con respecto a la media, siendo otras medidas de dispersión como el rango, el recorrido intercuartílico o la desviación absoluta media, mejores estimadores. Además, indicaba que los alumnos deberían comprender que la dispersión no se puede medir con un solo parámetro como es la desviación típica, sino que existen diferentes medidas que, dependiendo de la situación, pueden medir de una forma más adecuada la dispersión.

Otro trabajo destacable es el de Jones y Scariano (2014) que analiza dos formas de medir la dispersión. Una de ellas con la media de las diferencias cuadradas entre los datos, y otra con la varianza (diferencias cuadradas con respecto a la media) demostrando que ambas medidas son cuantitativamente idénticas, indicando que ambas perspectivas pueden ser útiles para la enseñanza de cómo cuantificar la dispersión.

En el segundo tipo, lo conveniente es remontarse a los trabajos de Hart (1984) y Loosen, Lioen, y Lacante (1985) en los que se analiza la desviación típica, su enseñanza y cómo explicarla de manera intuitiva. En el primero de ellos, Hart (1984) se plantea por qué los alumnos relacionan la desviación típica con la "medida de la dispersión" y no sucede esto con la desviación absoluta media, por ejemplo. Plantea varias posibilidades, una de ellas es que la varianza es un estimador útil y que se emplea en otros cálculos estadísticos como la distribución normal, el otro es que las calculadoras ayudan a su obtención cuando no la dan directamente. La alternativa que propone Hart (1984) es la de "enfatizar la desviación absoluta media como introducción a la desviación estándar, apuntando las ventajas y desventajas relativas" (p.24) En el segundo de ellos, Loosen et al. (1985) parten de las premisas de Hart (1984) indicando que ellos son aún más pesimistas que la profesora Hart y que creen que los estudiantes no entienden lo específica que es la desviación típica como medida de dispersión.

> Nuestra duda ha sido inducida por la forma en que muchos libros de texto introducen el concepto de dispersión. La mayoría de las introducciones ponen un mayor énfasis en la

heterogeneidad entre las observaciones que en sus desviaciones de la tendencia central. (Loosen et al., 1985, p.2)

Así pues, partiendo de cómo los libros de texto introducen el concepto (aunque si realizaron un estudio riguroso de estos no es localizable) exponen los dos puntos de vista que para ellos son aconsejables para enseñar la desviación típica, poniendo el énfasis en la heterogeneidad de las medidas, o en la heterogeneidad de las desviaciones. Para ello realizaron un experimento con 154 alumnos de la carrera de psicología sin formación específica en dispersión, en las que le pedían que del gráfico de la figura 25 identificaran cuales era menos diferentes, en primer lugar en los gráfico A y B, y luego entre C y D.

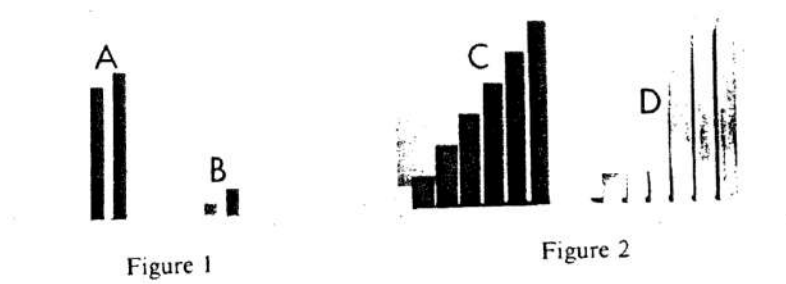


Figura 25. Test de heterogeneidad con barras. (Loosen et al., 1985, p.3)

El resultado del experimento mostró que los alumnos ponían el foco en las medidas y no en las diferencias, al no darse cuenta de cuando la desviación típica era la misma, ya que para ellos la desviación típica era mayor cuando las diferencias entre medidas eran mayores, sin embargo, no consideraban la desviación típica como la diferencia a un punto común.

A pesar de esto, si los gráficos se mostraban de la forma en las que se hace en la figura 26, sí que veían rápidamente la desviación típica.

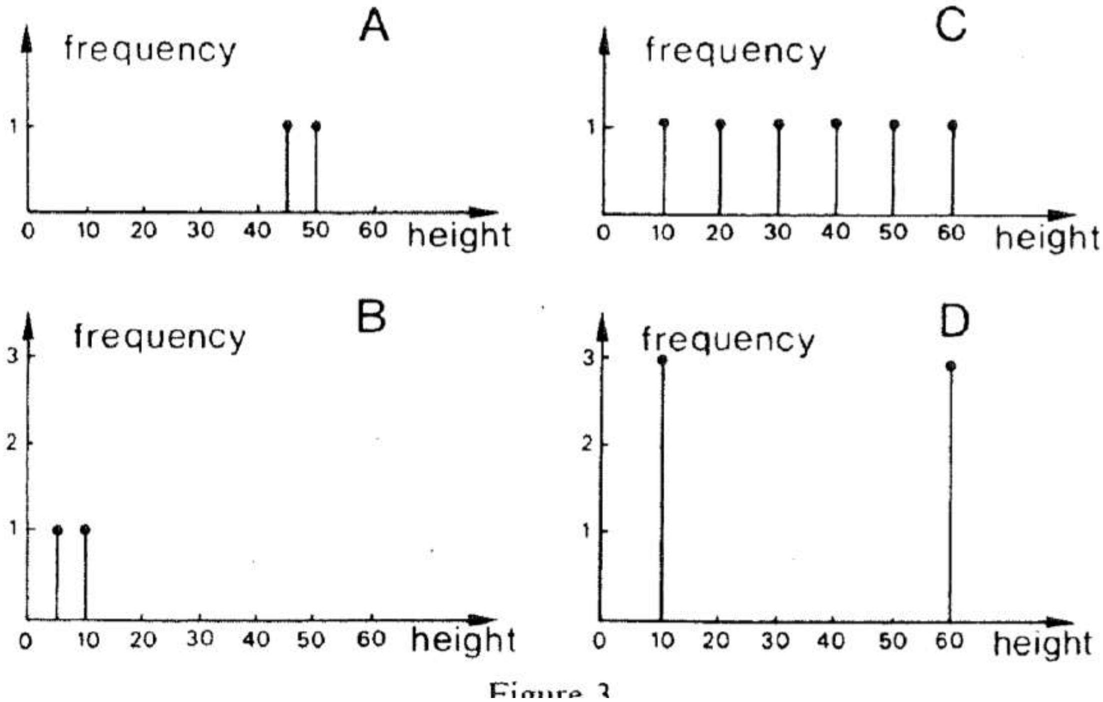


Figura 26. Test de heterogeneidad con puntos. (Loosen et al., 1985, p.4)

Concluyen que, en su opinión, deben separarse dos ideas, por una parte, la idea intuitiva de dispersión y por otra el concepto de desviación típica.

Más tarde Batanero, Godino, Vallecillos, Green, y Holmes (1994) y Shaughnessy (1997) analizaban los puntos débiles y carencias de la enseñanza estadística. Shaughnessy (1997) las llamaba *oportunidades perdidas*, una de ellas es la investigación sobre la variabilidad aleatoria, indicaba que apenas existía y que lo poco que había es lo que se ha mostrado en los artículos presentados unos párrafos antes. Él aportaba su opinión al respecto,

> Una razón es que los estadísticos han estado tradicionalmente muy enamorados de la desviación estándar como medida de la dispersión o variabilidad, y los profesores y los desarrolladores del plan de estudios a menudo evitaban lidiar con la dispersión porque sentían que no podían hacerlo sin introducir una desviación estándar. La desviación

> estándar no es sólo operacionalmente dificultosa, sino que es difícil de explicar por qué es una buena opción para medir la dispersión, especialmente con los estudiantes novatos. Otra razón para la falta de atención a la dispersión es que las medidas de tendencia central o promedios se utilizan a menudo para predecir lo que sucederá en el futuro, o para comparar dos grupos diferentes - no siempre se utiliza correctamente a este respecto, por supuesto, pero sin embargo se utiliza. La incorporación de dispersiones o variación en estos procesos de predicción o comparación sólo confunde la capacidad de las personas para hacer predicciones o comparaciones limpias (Shaughnessy, 1997, p.11)

Batanero et al. (1994) también hacían una revisión de lo que había sido la investigación en Estadística en general y de la variabilidad en uno de sus apartados, señalando que,

> a) la estadística ha recibido hasta la fecha menos atención que otras ramas de las matemáticas;
> b) la mayor parte de la investigación se ha llevado a cabo en situaciones experimentales, en lugar de en situaciones escolares;
> c) muchos estudios se centran en niños muy pequeños o en estudiantes de universidad, siendo escasa la investigación en las edades 11 a 16 años;
> d) las primeras investigaciones en el campo han sido efectuadas por psicólogos en lugar de por educadores matemáticos, aunque este aspecto está empezando a cambiar. (p. 528)

Otro trabajo interesante es el realizado por Clark, Kraut, Mathews, y Wimbish (2007) en el que analizaban la comprensión de estudiantes de cursos de estadística de tres conceptos, la media, la desviación típica y el teorema central del límite. Para el estudio seleccionaron a 17 estudiantes de cuatro campus diferentes que habían obtenido una calificación de A (la más alta) en un curso de estadística elemental, utilizaron un sistema de entrevistas para ello. En este trabajo repetían el trabajo de Mathews y Clark (2007) que realizaron con 7 alumnos utilizando el mismo mecanismo de selección y trabajo. En este primer artículo concluían que los alumnos no comprendían que significaba la desviación típica, a pesar de haber obtenido sobresaliente en un curso introductorio de probabilidad y estadística.

La conclusión de (Clark et al., 2007) era la siguiente,

> Con respecto a la desviación estándar, los resultados de este estudio sugieren que las desalentadoras interpretaciones cognitivas de los estudiantes de nivel "A" observadas en (Mathews y Clark, 2007) pueden, de hecho, ser representativas de los resultados de la mayoría de los cursos tradicionales a nivel nacional. Más de un tercio de los estudiantes en ambos estudios no habían progresado más allá de las concepciones de acción de la desviación estándar, y en algunos casos estas concepciones de acción no se demostraron en las entrevistas, sino que sólo se dedujo del éxito de los estudiantes en sus cursos. (p.11)

Por tanto, en estos dos estudios se observa que, a pesar de ser alumnos sobresalientes en cursos específicos de estadística, las dificultades para comprender y manejar el concepto de desviación estándar son persistentes.

Otro de los estudios más interesantes acerca de la desviación estándar es el que realizaron (delMas y Liu, 2005) sobre las concepciones de los estudiantes de un curso introductorio de estadística acerca de la desviación estándar. Lo hacen motivados por varios estudios compartidos con Garfield y Chance durante diez años que arrojan problemas de comprensión en tres conceptos fundamentales, las medidas de tendencia central, las distribuciones y la dispersión. Además, hasta ese momento no existían apenas estudios sobre las concepciones de los estudiantes acerca de la dispersión.

> Poco se sabe, sin embargo, acerca de la comprensión de los estudiantes de las medidas de dispersión, cómo se desarrolla esta comprensión, o cómo los estudiantes pueden aplicar su comprensión para hacer comparaciones de la variación entre dos o más distribuciones… Una comprensión incompleta de la desviación estándar puede limitar la comprensión de los estudiantes de estos temas más avanzados. (delMas y Liu, 2005)

En dicho artículo también apuntan dos ideas o conceptos fundamentales para la comprensión del concepto de desviación típica, el primer concepto es el de distribución de datos, como ya se indicaba en la introducción de este apartado, sobre la otra indican,

> Un segundo concepto fundamental es el de la media aritmética. Una comprensión conceptual de la desviación estándar requiere más que el conocimiento de un procedimiento para calcular la media, ya sea en forma de procedimiento o simbólica (por ejemplo, $\Sigma x_i/n$). Las imágenes que metafóricamente consideran que la media se comporta como un punto de apoyo autoajustable en un equilibrio se acerca a la concepción necesaria. (delMas y Liu, 2005, p.56)

Para trabajar estos conceptos desarrollaron un programa en java que compilaron para Macintosh, donde se podían visualizar los conceptos fundamentales que intervienen en la desviación típica y modificarlos para tratar de predecir sus cambios, el resultado se puede ver en la figura 27, donde se puede observar una distribución en la que se analiza qué sucede si desplazamos varios datos.

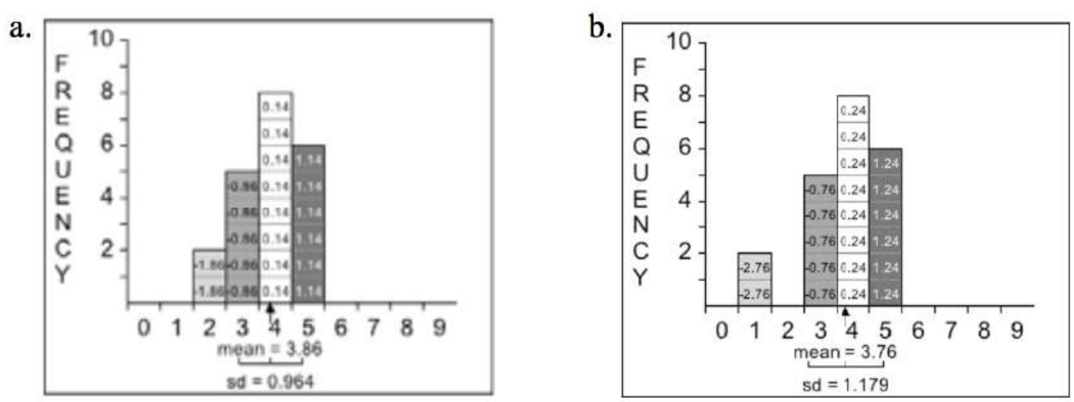


Figura 27. Representación gráfica de la desviación típica y sus conceptos relacionados. (delMas y Liu, 2005, p.57)

Para estudiar las concepciones de los estudiantes seleccionaron 129 alumnos de cuatro secciones de un curso introductorio de estadística, tres de ellos trabajaron con un profesor que tenía un máster en educación matemática y cuatro años de experiencia, la otra sección trabajó con un profesor que era estudiante de doctorado en educación matemática, con mención en estadística, y tenía un año de experiencia. Finalmente, de los 129 estudiantes 27 participaron voluntariamente en el estudio y 13 accedieron a la entrevista final. La formación era específica "con respecto a la desviación estándar, los estudiantes habían participado en una actividad que exploraba factores que afectaban el tamaño de la desviación estándar." (delMas y Liu, 2005, p.59)

La formación consistió en jugar con el software, moviendo de diferentes maneras las barras de la distribución, para ser conscientes de cómo cambia la desviación típica al mover los diferentes datos, de esta manera se mezcla la instrucción directa con el aprendizaje por descubrimiento que permite facilitar el cambio conceptual, haciendo que los alumnos presten atención a aspectos que, por algún motivo, antes obviaban.

> Se promovió una concepción centrada en la media de la desviación estándar, llamando la atención sobre los valores de las desviaciones, preguntando a los estudiantes cómo los movimientos hipotéticos de las barras podrían afectar la media y entrevistándolos acerca del modelo de razonamiento sobre cómo afectó la distribución de las desviaciones a los valores de la media y la desviación estándar. El segundo objetivo era promover una comprensión sobre cómo la forma de distribución está relacionada con el tamaño de la desviación estándar. Se les pidió a los estudiantes que predijesen cómo la media y la desviación estándar estarían afectadas por las distribuciones en forma de campana y asimétricas de los mismos conjuntos de barras. (delMas y Liu, 2005, p.60)

En la fase de test se cuestionó a los alumnos acerca de la desviación típica de pares de histogramas y tenían que indicar cuál de los dos tenía mayor desviación estándar, la propuesta se puede ver en la figura 28 y a continuación se dará información sobre lo que pretende cada ítem.

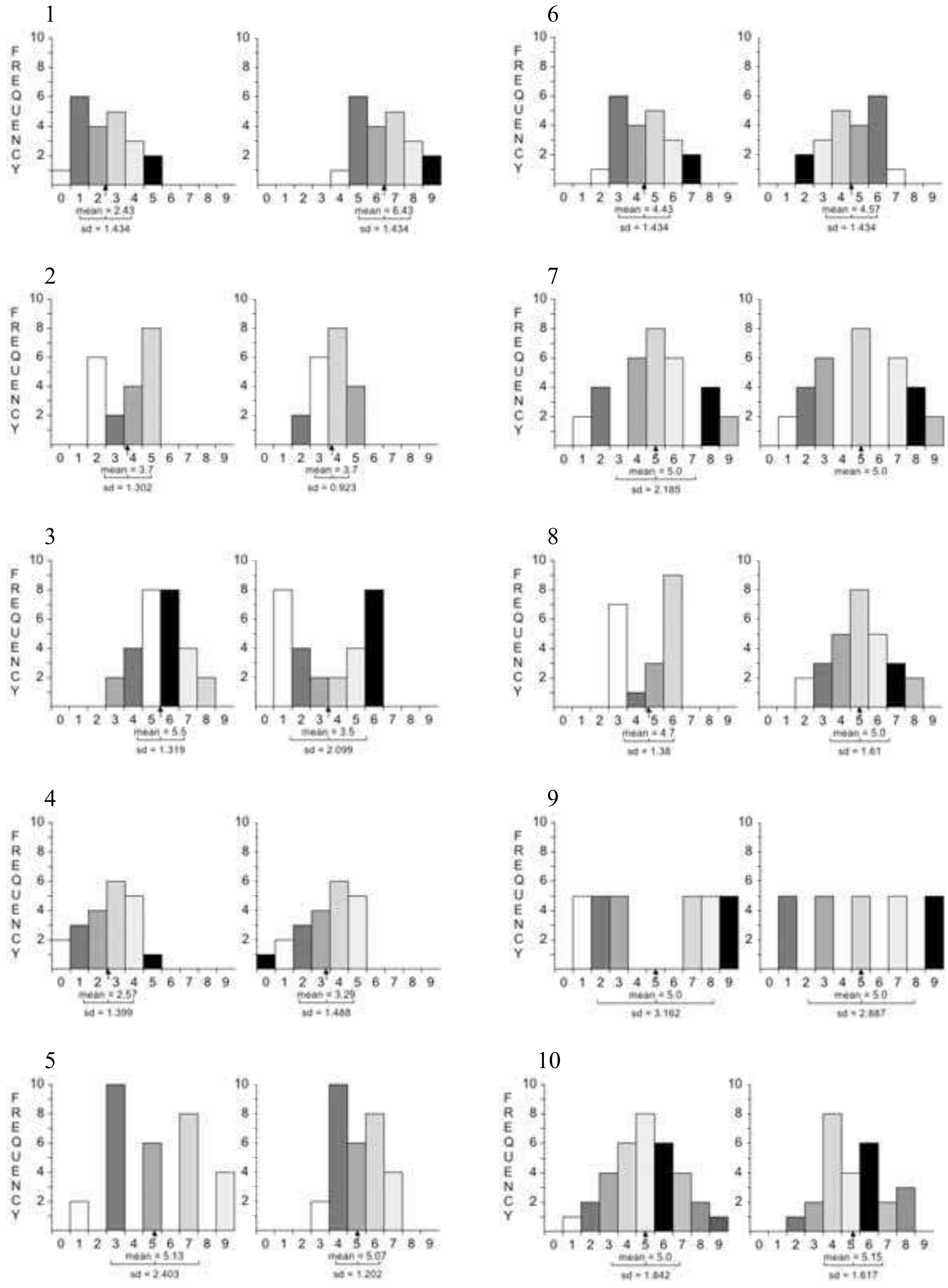


Figura 28. Test sobre desviación típica. (delMas y Liu, 2005, p.62)

El ítem 1 buscaba que los estudiantes se diesen cuenta que ambos gráficos tenían las mismas barras en diferentes lugares. Los ítems 2 y 3 probaron la sensibilidad de los estudiantes a la densidad de valores alrededor de la media. El ítem 4 fue diseñado específicamente para ver si los estudiantes comprendían que, con las mismas frecuencias y rango, una distribución con un sesgo más fuerte tiende a tener una mayor desviación estándar. El ítem 6 muestra dos distribuciones que son un reflejo especular. Los ítems de prueba 5 y 7 buscaban una percepción sobre la agrupación, estos dos ítems fueron diseñados para identificar estudiantes que pudieran prestar atención sólo al orden de las barras y no a la densidad relativa de desviaciones de la media. El par de gráficos en los ítems 8, 9 y 10 no tenían las barras idénticas y tampoco tenía los mismos valores representados en cada gráfico. Los ítems de prueba 8 y 10 fueron diseñados para desafiar la creencia de que una distribución perfectamente simétrica y en forma de campana siempre tendrá una desviación estándar menor. (delMas y Liu, 2005)

Debido a que fue un estudio exploratorio no se realizan consideraciones sobre la instrucción se puede mejorar, aunque hace algunas propuestas, sin embargo, a la hora de analizar las respuestas de los alumnos, aunque hay cierta mejoría siguen persistiendo ciertos problemas.

> Esto sugiere que los estudiantes tienden a adoptar un enfoque de reconocimiento de patrones basado en reglas al comparar distribuciones. Si este es el caso, es necesario abordar dos preguntas. ¿Qué tipo de experiencias se requieren para que los estudiantes pasen de un enfoque basado en reglas a un entendimiento más integral que se pueda generalizar a una variedad de contextos? Además de la experiencia interactiva presentada en el presente estudio, ¿necesitan los estudiantes un apoyo adicional para reflexionar sobre las relaciones entre los diferentes factores y para atender y coordinar los cambios relacionados? Un enfoque de reconocimiento de patrones basado en reglas es consistente con el objetivo de encontrar la respuesta correcta al darse cuenta de las características que

> diferencian una distribución de otra y percatándose de la correspondencia con el tamaño de la desviación estándar […] Se podrían introducir varios cambios en el programa para apoyar la construcción de modelos y estudiar cómo afecta a la comprensión de la desviación estándar. El software actualmente llama la atención a una sola barra en lugar de enfatizar visualmente cómo cambian las características simultáneamente. Una segunda visualización sobre el área gráfica del histograma que presenta barras de desviación horizontales coloreadas para coincidir con los correspondientes colores de barra de frecuencia verticales puede facilitar la coordinación de cambios simultáneos de valores, la media, las desviaciones y la desviación estándar. (delMas y Liu, 2005, p.80)

Otro trabajo interesante sobre las medidas de dispersión en general y sobre la desviación típica en particular es Garfield, DelMas, y Chance (2007), donde indican que

> la comprensión de la variabilidad tiene aspectos informales y formales, desde la comprensión de que los datos varían (por ejemplo, las diferencias en los valores de los datos) hasta la comprensión e interpretación de las medidas formales de variabilidad (por ejemplo, rango, desviación típica) (p.118)

En este trabajo se afianza el uso del vocabulario en el sentido de Reading y Shaughnessy (2004) en el que *variability* hacía referencia al fenómeno de la dispersión y *variation* a cómo se mide, siendo el concepto *measures of variability* equivalente a *variation*. Durante el trabajo indican que la forma en la que está distribuido el curriculum afecta a cómo se enseñan estos conceptos y a cómo se aborda el trabajo sobre razonamiento estadístico.

> Luego se introducen medidas de variabilidad (o dispersión), y los estudiantes aprenden a calcularlas y a interpretarlas brevemente. Normalmente, sólo se enseña la noción formal de variabilidad medida por tres estadísticos diferentes (es decir, el rango, el intervalo intercuartílico y la desviación estándar.) (Garfield, DelMas, y Chance, 2007, p.119)

Indicaban que los cuatro motivos por los que no se desarrolla un razonamiento estadístico son: mismo contenido y estructuración en todos los cursos, clases basadas en lectura del libro y ejercicios, uso de la tecnología solo en escasas demostraciones sin que los alumnos lo manipulen, ausencia de evaluación formativa, la única evaluación que se realiza es la final.

Para paliar esto desarrollaron un estudio de lecciones japonesas que consistía en la entrega de un CD con pequeñas conferencias, videos breves en los que se explica cómo se utilizan los conceptos estadísticos de la lección en contextos reales, herramientas de simulación o applets interactivos, actividades que utilizan el software DataDesk para analizar datos y ejercicios de revisión / evaluación. El libro utilizado fue *Práctica Estadística Activa* de Moore (1997), además se empleó una metodología colaborativa donde los alumnos trabajaban a menudo en grupo.

Se realizaron tres experimentos de enseñanza o lecciones, al final de cada uno se hacía una pequeña evaluación que marcaba el ritmo y tipo de trabajo del siguiente. En el primer experimento de enseñanza, que se realizó mediante el trabajo de conjuntos de datos sin agrupar, el resultado no fue el esperado y los alumnos seguían presentando bastantes problemas para manejarse con la interpretación de la dispersión y sus medidas, con lo que cambiaron el trabajo a datos agrupados para un segundo experimento de enseñanza. Tras este segundo intento hubo una mejora, en la que los alumnos identificaban mejor la desviación típica y el rango, pero obviaban el recorrido intercuartílico, Garfield, DelMas, y Chance (2007) lo achacan a que los estudiantes lo relacionan con los diagramas de caja. En el tercero propusieron tras mucho meditarlo una tarea compleja, donde debían comparar tres medidas de dispersión, rango, desviación estándar y recorrido intercuartílico de diferentes variables a través de histogramas y diagramas de caja, en ellos debían de ordenar los gráficos de mayor a menor medida de cada uno de los tres estadísticos. Sin embargo, la mejoría no se notó hasta el final, como ellos mismo indican, "es quizás sorprendente observar que, a pesar de las múltiples lecciones sobre las medidas de dispersión, la mayoría de los estudiantes no demostraron una comprensión conceptual de estas ideas hasta el final del curso" (Garfield, DelMas, y Chance, 2007, p.141)

Finalmente realizan una propuesta de trayectoria didáctica o de aprendizaje, una forma de cronograma de cómo presentar los diferentes conceptos,

> • Comience con la comprensión básica de los estudiantes de que los datos varían.
> • Investigar por qué las mediciones varían y los procesos que conducen a la variación en los datos.
> • Examinar las representaciones gráficas de la dispersión; Utilizar gráficos para comparar la dispersión de más de un conjunto de datos.
> • Enfocarse en las diferencias que aparecen en algunos gráficos y lo que indican acerca de la dispersión en el medio de un conjunto de datos.
> • Promover la toma de conciencia tanto de la extensión general como de la distribución de la mayoría de los datos.
> • Examinar las medidas del centro y cómo las medidas de dispersión se basan en las diferencias desde el centro, reconociendo cómo las medidas de dispersión son más informativas en el contexto de una medida de centro.
> • Determinar las características relativas (por ejemplo, resistencia) de diferentes medidas de dispersión para diferentes tipos de distribuciones, y cuando tiene sentido usar medidas particulares como resúmenes de dispersión para distribuciones particulares. (Garfield, DelMas, y Chance, 2007, p.142)

Como se observa en las sugerencias de estos autores, relacionar la desviación típica con la media es un camino a una mejor comprensión de este tipo de medida de dispersión, siguiendo esta línea los siguientes trabajos que se van a presentar abordan este tipo de ideas, es decir, la interacción entre la desviación típica y la media.

Uno de los primeros textos que se pueden presentar en este sentido es el que propone Gordon (1986) en él se plantea si la media y la desviación típica son conceptos ligados, y trata de demostrar a un compañero que no lo son, lo hace reportando el mismo resultado que se mostraba al inicio de este sub apartado por Jones y Scariano (2014) donde se manifestaba que es equivalente calcular la varianza (y por ende la desviación típica) con la diferencias cuadradas entre todos los datos entre sí, y las diferencias cuadradas entre los datos y la media. Por tanto, una primera conclusión es que se puede utilizar este doble enfoque para enseñar a trabajar con estas dos medidas de dispersión. Sin embargo, en la enseñanza tradicional siempre se tiende a enseñar la varianza y la desviación típica como resultado de operar con las diferencias cuadradas de los datos con respecto a la media.

Un artículo muy interesante es el de Lee y Lee (2011) donde hacen una revisión de la coordinación entre las medidas de tendencia central y las de dispersión, y además hacen una propuesta de materiales curriculares para trabajar estas ideas tanto en análisis de datos como en muestreo. Parten de las ideas que se expresaban en el apartado 4.2 y en este mismo sub apartado de Garfield (2002) y Shaughnessy (2006) acerca de que las medidas de dispersión completan las medidas de tendencia central y las de posición para resumir una distribución de datos. En este trabajo los alumnos son profesores en prácticas a los que van guiando. Para analizar el método de enseñanza las clases se grabaron y se realizó un diseño cuasi experimental pre-post.

En este caso la formación lleva 6 capítulos o lecciones, en la primera el objetivo es que los profesores comprendan la importancia de las medidas de centro y dispersión de forma conjunta en el contexto de comparación de distribuciones de datos, en la segunda visionan un video sobre el mismo contenido, pero realizado por alumnos de secundaria. En la tercera se les forma sobre el uso de las desviaciones para calcular algunas medidas de dispersión, como la desviación típica. En el siguiente capítulo se extienden los cálculos realizados en conjuntos de datos unidimensionales a datos bivariados. En las dos siguientes lecciones se utilizan simulaciones para introducir situaciones de muestreo.

El resultado final no es muy bueno, se necesita una formación más amplia para desarrollar estas ideas estadísticas consistentemente, como indican los propios autores "Por lo tanto, no es de extrañar que en un período de tiempo tan corto los futuros profesores de nuestro estudio no desarrollaran sus propias ideas de forma que pudieran implementarlas en situaciones pedagógicas" (Lee y Lee, 2011, p.44)

Posteriormente Sánchez y Orta (2013) publicaron un trabajo donde de nuevo se trabaja de forma conjunta los conceptos de medidas de tendencia central y de dispersión en un contexto de comparación de distribuciones. El objetivo de este artículo es el de exponer tres actividades para secundaria donde se trabajen ambos conceptos. Antes de esto analiza la media, algunas medidas de dispersión y su relación, indica algunos tipos de problemas en los que aparece el problema de la media, como la estimación de una cantidad cuando los valores no coinciden debido a un error de medida, cuando se reparten de forma igualitaria un cierto número de cantidades diferentes, se utiliza como resumen de un conjunto de valores que conforman una distribución que es aproximadamente simétrica y para predecir el valor más probable al seleccionar un elemento de una distribución al azar. (Sánchez y Orta, 2013)

Sobre la dispersión indica textualmente,

> es una característica de un conjunto de datos numéricos. Hay diferentes medidas de la dispersión, donde las más usadas son: rango, desviación media, desviación estándar, y cuartiles. El cálculo de algunas medidas de dispersión es algo más difícil que el de la media, sin embargo, con cualquier calculadora científica se obtienen fácilmente, una vez que se le introducen los datos. Un significado que se suele dar a las medidas de dispersión es como indicadores de qué tan separados están los datos entre sí. Basta ordenar los datos o hacer su gráfica de frecuencias para percibir intuitivamente la dispersión; en contraste, la dispersión como un número específico es para la mayoría un misterio. Las ideas de separación y la interpretación del valor numérico están en un terreno abstracto, y aunque importantes, faltaría interpretar la dispersión en los contextos en los que se presenta. (Sánchez y Orta, 2013, p.68)

Para trabajar estos conceptos proponen dos contextos, en primer lugar, un contexto de medidas repetidas y, en segundo lugar, contexto de riesgos.

El primer tipo de contexto se centra en la realización de medidas de una magnitud física, de las cuales se pretende saber cuál es la mejor aproximación al *valor verdadero*. Para que la media sea un buen estimador de ese valor se deben dar dos condiciones, las medidas deben ser independientes y la frecuencia de errores por exceso y defecto similar, de esta manera y cuánto mayor sea el número de medidas, mejor estimador será la media. En este contexto se propone un problema donde dos grupos miden la altura de un poste mediante dos métodos diferentes, y realizan nueve medidas. A los alumnos se les hace dos cuestiones. La primera de ellas pide a los alumnos que indiquen que número propondrían para indicar la altura lo más exactamente posible, en este caso la respuesta esperada es la media. La segunda es que evalúen la precisión de cada método, para ello necesitan utilizar las medidas de dispersión y propone el artículo el posible uso de cuatro de ellas, el rango, la desviación media, la desviación típica y el error cuadrático. (Sánchez y Orta, 2013)

El segundo tipo de contexto habla del riesgo, que se define en el artículo como

> El riesgo se presenta cuando hay potenciales resultados no deseados que pueden traer como consecuencia pérdidas o daños. Definir el riesgo significa especificar los resultados valiosos y los no deseados en un orden que refleje el valor que se les atribuye […]Una vez que se identifican los riesgos, el problema es determinar qué tan grandes o perjudiciales son y cuáles son las posibles causas que los gobiernan […] El análisis del riesgo ofrece información para la toma de decisiones. La teoría de la toma de decisiones en situaciones de riesgo tiene dos aspectos; por un lado, define reglas abstractas sobre lo que debería hacer la gente en situaciones de riesgo, por otro, estudia lo que hace la gente cuando se enfrenta realmente a tales situaciones. (Sánchez y Orta, 2013, pp. 71-72)

Los dos problemas propuestos en este contexto son uno referente al juego y otro referente a un problema salud-enfermedad. En el primero se dan las listas de ganancias y pérdidas de dos juegos, y se pide la elección de uno de ellos para jugar. En este caso los datos están seleccionados para que las medias coincidan, y una primera aproximación sea que da igual jugar a cualquiera de los dos juegos, pero un análisis más concienzudo le hará utilizar alguna medida de dispersión. El segundo problema da los datos de tiempo de vida de varias personas que se han sometido a tres tratamientos diferentes debido a que tienen una enfermedad incurable, el problema pide elegir uno de los tres posibles tratamientos de forma razonada, de nuevo los tres tratamientos ofrecen la misma media, pero no así la misma dispersión, por tanto, de nuevo se necesitará calcular alguna medida de dispersión o representar los datos para tomar una decisión correcta.

Dentro de la realización de materiales curriculares, cabe destacar también un trabajo de delMas (2001) en el que diseñaba una serie de actividades para trabajar la desviación estándar relacionándola con la media, más en concreto como una medida de la densidad de los datos alrededor de la media.

Por último, dentro del tratamiento conjunto de la media y la desviación típica se puede destacar el trabajo de Dubreil-Frémont, Chevallier-Gaté, y Zendrera (2014) en el pasado ICOTS-9. En este trabajo analizan la evolución de 352 estudiantes universitarios en la comprensión de la media y la desviación típica, mediante un diseño pre-post. En el pre-test los alumnos mostraban una caracterización algorítmica de la media y no comprendían la desviación típica. Tras el curso de estadística los alumnos comprendían el concepto de media y mejoraban en el de desviación típica, es muy interesante la categorización de las concepciones de la desviación típica que realizan para las pruebas y que se pueden observar en la figura 29.

Conceptions of standard deviation	Before the course		After the course	
	Total	Percentage	Total	Percentage
measure of dispersion	9	8.3	34	14.3
square root of variance	11	10.2	109	45.8
tautology	1	0.9		
variance			3	1.3
range	28	25.9	9	3.8
midrange	1	0.9		
interdecile range	2	1.9	1	0.4
interquartile range	2	1.9	3	1.3
other	54	50	79	33.2
Total	108	100	238	100

Figura 29. Concepciones de los estudiantes sobre la desviación típica. ((Dubreil-Frémont et al., 2014, p.3)

Sin embargo, la comprensión del concepto de desviación típica sigue siendo dificultoso, como los propios autores indican

> este estudio trató con las concepciones de los estudiantes de la media y la desviación estándar antes y después del curso de estadística. Los resultados mostraron que los estudiantes tienen una mejor comprensión de la media que de la desviación estándar

> siempre que se realizan test. Los resultados confirmaron que los estudiantes mejoraron sus concepciones de media y desviación estándar al final del curso. ((Dubreil-Frémont et al., 2014, p.4)

Otro tipo de estudios abarcan todas las medidas de dispersión en general, sin centrarse específicamente en alguna de ellas.

De hecho, uno de los más interesantes, por novedoso y diferente es el de Lehrer y Kim (2009) donde para trabajar la dispersión y sus medidas piden a los alumnos, en este caso de 10-11 años, equivalente a 6º de primaria, que se inventen unas medidas para medir la dispersión. Esto da lugar a métodos como el de distancia entre pares, que consiste en ordenar los valores y medir la distancia entre un valor y el anterior, en el que los alumnos evidencian que cerca de una medida de tendencia central estos valores se reducen. Otra alumna se inventó un método de desviaciones con respecto a la mediana. Otros alumnos presentaron métodos gráficos a través de la herramienta TinkerPlots. Es una actividad que permite desarrollar el razonamiento acerca de la dispersión y su medida y que como indican los autores,

> La medición se concibe a menudo como una actividad mundana, y en la escuela llega a menudo con ideas preconcebidas. Los estudiantes pueden aprender "habilidades" para medir, pero rara vez se les pide que lidien con la problemática fundamental de la relación entre una medida y un fenómeno particular. Sugerimos una táctica alternativa, en la que los estudiantes inventen y revisen las medidas, porque inventar medidas implica inherentemente estructurar fenómenos. En este caso, posicionamos a los estudiantes para inventar y revisar las medidas de variabilidad. Muchas de estas soluciones inventadas coordinan el centro y se difunden de manera que anticipan los tipos de soluciones que se utilizan en la disciplina de la estadística, tales como el intervalo intercuartílico y las métricas basadas en la desviación, como la desviación media y la desviación estándar. Esta forma de estructurar la dispersión a menudo escapa a los estudiantes mucho más mayores. (Lehrer y Kim, 2009, p.130)

La tesis de Turegun (2011) analiza precisamente las concepciones en estudiantes de diferentes medidas de dispersión, en este caso, el rango, el recorrido intercuartílico y la desviación típica. Con una experiencia de más de 20 años enseñando matemáticas y casi 15 estadística en la universidad se dio cuenta de que sus alumnos, aunque conocían el algoritmo de la desviación típica, les costaba explicarla en un contexto de datos, es decir, aunque son capaces de decir que la desviación típica es una medida de dispersión, y saben calcularla, no saben relacionar el número que obtienen con su sentido, a pesar de que en muchos sentido, como indica, el cálculo de la desviación típica es farragoso. Las demás medidas también son interesantes, y trabajarlas todas en conjunto puede ser una buena técnica de ataque, porque como el propio Turegun (2011) indica

> reconocer el hecho de que estas medidas de propagación tienen distintos niveles de sensibilidad a la presencia de valores atípicos en un conjunto de datos puede conducir al desarrollo cognitivo al decidir cuál de estas medidas puede ser más apropiada para usar en una distribución de datos particular. (p. 67)

Utiliza para el análisis la taxonomía SOLO (Structure of Observed Learning Outcomes, Estructura de los Resultados de Aprendizaje Observados) otorgando 5 niveles a la comprensión de las medias de la dispersión. Pre-estructural, donde las respuestas están mal articuladas y demuestra no entender la pregunta; uni-estructural, en las que las respuestas son vagas y no están relacionadas entre sí; multi-estructural, en este taxón demuestra cierto conocimiento de las medidas de dispersión indicando similitudes, diferencias y conexiones entre el rango, el recorrido intercuartílico y la desviación estándar; relacional, además de lo anterior es capaz de identificar qué medidas de dispersión son más resistentes a los valores atípicos al relacionar las medidas de dispersión con la media, la mediana y los valores atípicos; y por último el taxón de abstracción, donde además de lo anterior es capaz de indicar la medida de dispersión que puede ser más apropiada en el caso de una distribución sesgada. (Turegun, 2011) De los 29 alumnos que estudió ninguno estaba en el taxón pre-estructural, pero tampoco hubo ninguno en el taxón de abstracción, la mayoría se encontraban en el taxón multi-estructural.

Las conclusiones de estudio son que los alumnos emplean sus propias expresiones para hablar acerca de las medidas de la dispersión, esto se relaciona con estudios previos de Makar y Confrey (2005) y de Watson y Kelly, (2008) que hacían especial hincapié en la importancia del lenguaje en la introducción de las nociones estadísticas, ya que gran parte del vocabulario se emplea cotidianamente en otros contextos y otros significados, por tanto es importante ser cuidados en la construcción del lenguaje en la formación estadística de los alumnos. Por otra parte, indica que los alumnos tienen ideas previas, que en muchas ocasiones les otorgaban una alta comprensión intuitiva de las medidas de dispersión. Por último, hace alusión a la bonanza del método de entrevistas frente al sistema de test para ahondar más en las concepciones que tienen los alumnos.

Para acabar este sub-apartado se van a realizar unos breves comentarios sobre el recorrido intercuartílico, referidos principalmente a las dificultades del cálculo de la medida de posición como puede verse en Weisstein (s. f.) y Langford (2006) y es la cantidad de métodos de cálculo para los cuartiles que pueden encontrarse y que pueden generar problemas a la hora del cálculo de una medida de dispersión derivada como es el recorrido o rango intercuartílico. Para ilustrarlo se acompaña la figura 30.

Método	1er cuartil	1er cuartil	3er cuartil	3er cuartil
	n impar	n par	n impar	n par
Minitab	$\frac{n+1}{4}$	$\frac{n+1}{4}$	$\frac{3n+3}{4}$	$\frac{3n+3}{4}$
Hoaglin, Mosteller, y Tukey (1983)	$\frac{n+3}{4}$	$\frac{n+2}{4}$	$\frac{3n+1}{4}$	$\frac{3n+2}{4}$
Moore y McCabe (2002)	$\frac{n+1}{4}$	$\frac{n+2}{4}$	$\frac{3n+3}{4}$	$\frac{3n+2}{4}$
Mendenhall y Sincich (1995)	$\left\lceil\frac{n+1}{4}\right\rfloor$	$\left\lceil\frac{n+1}{4}\right\rceil$	$\left\lceil\frac{3n+3}{4}\right\rceil$	$\left\lceil\frac{3n+3}{4}\right\rceil$
Freund y Perles, (1987)	$\frac{n+3}{4}$	$\frac{n+3}{4}$	$\frac{3n+1}{4}$	$\frac{3n+1}{4}$

Figura 30. Algunos métodos de cálculo de los cuartiles. (Weisstein, s. f.)

Otra serie de estudios de especial relevancia para el abordaje de esta tesis son Estepa y Ortega (2005a); Estepa y Ortega (2006); Ortega y Estepa, (2005); Estepa y Ortega, (2005b); y Ortega y Estepa (2006) en los que se analizan la dispersión y las medidas de dispersión en textos universitarios, y en secundaria bajo el Enfoque Onto-semiótico.

En Estepa y Ortega (2005a) se analizan 14 textos universitarios para estudiar el significado de referencia de algunas medidas de dispersión, en concreto la desviación típica y la varianza, donde uno de los resultados más interesantes es que hallaron 19 expresiones diferentes para la varianza y 21 expresiones diferentes para la desviación típica, muchas de ellas expresiones equivalentes o empleadas en diferentes contextos (muestra – población, datos sin agrupar – agrupados, etc., …) pero que genera un potencial conflicto semiótico en los estudiantes. Estepa y Ortega (2006) es una presentación en congreso del anterior, donde se vuelve a hacer hincapié en la dificultad de comprender la dispersión y sus medidas, debido en gran parte a las numerosas situaciones y lenguaje diverso que se emplea en los textos universitarios.

En Ortega y Estepa, (2005) estudiaron las concepciones sobre dispersión en estudiantes de secundaria mediante un test de 13 ítems sobre distribuciones, muestreo y algunas medidas como los cuartiles o el rango. El test se llevó a cabo en una muestra de 85 estudiantes de 3º de ESO que todavía no habían trabajado las medidas de dispersión. Los resultados mostraban una dificultad para entender algunos conceptos asociados a la dispersión. En Estepa y Ortega, (2005b) se analizó el significado institucional de referencia de las medidas de dispersión rango, recorrido intercuartílico, desviación media, varianza, desviación típica y coeficiente de variación a través del estudio de una muestra de 14 libros universitarios de Estadística Descriptiva, este trabajo es una ampliación del primero de esta serie. En Ortega y Estepa (2006) se realizó un análisis a través del EOS de los libros de secundaria más utilizados en 3º y 4º de ESO bajo la LOGSE que incluyó 8 editoriales, en dicha comunicación se analizan las entidades primarias en los textos, y exponía las siguientes conclusiones,

> Sólo unas pocas situaciones pueden ser consideradas como verdaderos problemas, buscando casi exclusivamente el dominio de las habilidades de cálculo.
> Las técnicas necesarias para la resolución de problemas se desarrollan principalmente en contextos numéricos. Los gráficos raramente se utilizan para representar o interpretar la dispersión, y en varios libros de texto se evita el uso de fórmulas.
> Todos los libros de texto usan palabras y expresiones cuyo significado puede ser confuso para los estudiantes. Por ejemplo, dispersión, diferencia, error, distancia, homogeneidad, heterogeneidad, representatividad, concentración, etc.
> La confusión se introduce, a veces deliberadamente, entre la dispersión referencial e intrínseca, así como entre la dispersión absoluta y relativa.
> No hay unanimidad en la secuenciación de los contenidos que tratan de la dispersión. Algunos editores incluyen la dispersión en 2º de E.S.O. (13 años), mientras que otros la posponen a 4º de E.S.O. (16 años de edad).
> El rango, la varianza y la desviación estándar son estudiados en todos los libros de texto analizados. No ocurre lo mismo con el rango intercuartílico o el coeficiente de variación.

> Finalmente, debemos enfatizar el uso excesivo del razonamiento empírico, generalmente basado en ejemplos elegidos al azar, lo que perjudica las maneras deductivas de argumentar. (Ortega y Estepa, 2006, p.5)

A modo de pequeñas conclusiones se puede apreciar en las diferentes investigaciones presentadas que los problemas de comprensión de la desviación típica, como medida más empleada, y de las demás medidas son persistentes, que suelen venir de problemas con el lenguaje y con la comprensión del fenómeno, ya que muchas veces el algoritmo sí que está controlado. Esta comprensión es mejorable a través de una instrucción cuidada y orientada a la mejora, pero aún no existe un resultado que indique cuál es el mejor camino. Propuestas como las de delMas (2001) con actividades para orientar la comprensión de la desviación típica como medida de la densidad de datos alrededor de la media; la de Sánchez y Orta (2013) sobre análisis conjunto de media y desviación típica en secundaria y la de Lehrer y Kim (2009) a través de la invención de medidas de dispersión en alumnos de última etapa de primaria y primera etapa de secundaria son interesantes puntos de partida para introducir estos conceptos y desarrollar concepciones más sólidas en el momento en el que, como veíamos en el capítulo 2 se comienzan a trabajar en el curriculum estos contenidos. Los trabajos indicados anteriormente serán el punto de partida del análisis a realizar en esta tesis, ya que son los trabajos previos que indicaron que existían problema en esta área y realizaron trabajos similares, pero en otros contextos a los que se desean completar en este estudio.

Este es el significado predominante en los textos de 3º y 4º de ESO y es el que se va a analizar en los estudiantes de 3º de ESO. Una de los objetivos esta tesis es realizar un cuestionario acerca del conocimiento de los alumnos sobre las medidas de dispersión, para realizar el cuestionario se tendrá en cuenta lo visto en este apartado, en concreto la limitación que presentan los estudiantes acerca del uso de diferentes medidas, ya que se centran principalmente en la desviación típica como medida de dispersión, a su vez también se investigará el uso conjunto de la media y la desviación típica como proponen algunos autores.

4.4. Dispersión descriptiva bivariante

Según se muestra en el cuadro resumen del apartado 4.1, uno de los aspectos de la dispersión es la covarianza, y a través de ella, la correlación. En la tesis de Gea (2014) se hace una revisión bibliográfica de estos conceptos y además se analizan libros y se estudian concepciones de futuros profesores acerca de la correlación. Este es un estudio interesante porque conecta con varios de los objetivos de esta tesis, ya que también se pretende un análisis de libros y un estudio de concepciones, aunque en este caso de estudiantes de Educación Secundaria. Algunas de las conclusiones más interesantes de este estudio nos las muestra en su capítulo 4,

> observamos que la presentación de algunas propiedades (o la ausencia de dicha presentación) podría inducir conflictos semióticos en los estudiantes. Algunos ejemplos de los mismos sería confundir un objeto con su representación gráfica, confusión entre diagrama de barras e histograma, o el diagrama de dispersión y el gráfico de burbujas, generalización demasiado amplia del concepto de correlación o no diferenciar convenientemente las dos rectas de regresión. Otros ejemplos son el uso de simbolizaciones inadecuadas o imprecisas, la descripción incompleta de procedimientos, o la equiparación de conceptos no equivalentes. En otros casos, las relaciones que se establecen entre la recta de regresión y el coeficiente de correlación debiesen ser reflexionadas en clase por el profesor, pues podrían llevar a resultados equivocados. Este es el caso de la relación entre el coeficiente de correlación y la recta de regresión para establecer su aproximación, indicando que con una misma recta se pueden realizar predicciones para cada una de las variables si el valor de $|r|$ es próximo a 1. (Gea, 2014, p.192)

Un estudio sobre correlación en libros de texto anterior es el que realizó Sánchez Cobo (1998), donde concluía que los libros presentaban algunos problemas, como que las actividades estaban sesgadas, no se diferenciaba correlación de causalidad y tampoco se incluían todos los tipos de covarianza.

Algunos otros estudios destacables son los de Zieffler (2006) donde se analiza el razonamiento sobre la covariación, donde se plantea varias preguntas sobre el patrón de pensamiento de los estudiantes, cómo afecta el orden en el que se exponen los contenidos en el razonamiento y si la adquisición de nuevas nociones afecta al razonamiento. Otro estudio interesante es el de Estepa (1994) que se interesó por el uso de los ordenadores para facilitar el aprendizaje de conceptos estadísticos relacionados con la correlación. Una visión más amplia de estos y otros estudios se puede encontrar en la tesis de Gea (2014)

4.5. Dispersión probabilística

Uno de los grandes problemas con la dispersión en situaciones de probabilidad es la confusión de ésta con situaciones de muestreo. Este tipo de situaciones las analiza Shaughnessy (1997) en un estudio con profesores en activo, al preguntar por cierta situación de probabilidad, como qué es más probable al lanzar una moneda, obtener XOOXO o XXXXX, algunos contestaron que la muestra era pequeña y que en muestras grandes se obtendría una situación similar a la primera, sin embargo, en este caso, no hay muestra, en todo caso hay un espacio muestral, en el sentido probabilístico, pero no real de la muestra de una población. (Shaughnessy, Watson, Moritz, y Reading, 1999)

Otro trabajo destacable dentro del estudio de la dispersión en la probabilidad es el de Shaughnessy y Ciancetta (2001) y (2002) con un spinner que es una ruleta mitad blanca y mitad negra proponiendo a estudiantes que predijesen el número de negros que habría en diez tiradas, después se hacía girar la ruleta diez veces y repetían la predicción, después de la segunda tirada se llevaban en total 5 negras y 15 blancas lo que causó un conflicto cognitivo en los alumnos, ya que no eran capaces de comprender series de tiradas que no estuvieran equilibradas.

El objetivo de este ejercicio es que los alumnos encuentren la conexión que se puede hacer entre la dispersión observada en los datos de ensayos repetidos de un experimento, y los resultados que se esperan basados en el conocimiento del espacio muestral subyacente o distribución de probabilidad

Por lo tanto, los experimentos de probabilidad son muy prometedores como un contexto viable para la recopilación de datos sobre las concepciones de los estudiantes acerca de la variabilidad aleatoria. Cuando se realiza un experimento probabilístico se puede centrar la atención en la variación inherente en los resultados, y no sólo en el valor esperado para un resultado en particular. (Shaughnessy y Ciancetta, 2002; Canada, 2004)

4.6. Dispersión inferencial y en situaciones de muestreo

La dispersión también está presente en situaciones de muestreo, como indicaba en su tesis Canada (2004)

> Las muestras también varían en la medida en que representan a su población original. Por ejemplo, si la población son todos los estudiantes de una escuela secundaria, en la misma encuesta de opinión en dos grupos diferentes de estudiantes es probable que se produzcan dos resultados diferentes. Por lo tanto, las situaciones de muestreo pueden invocar muchos niveles de significado si tenemos en cuenta la variación. (p. 38)

Un estudio interesante en este ámbito es el que realizaron Bakker y Gravemeijer, (2004)) sobre la comprensión de las distribuciones y muestreo mediante el uso de las TICs (una applet web llamado Minitools que ya no se encuentra disponible) en alumnos de 7º grado (equivalente a 1º de ESO), y que repitió Slauson (2008) en su tesis con la conclusión de que el método fue "muy eficaz en el desarrollo de la comprensión conceptual de los estudiantes de la distribución." (p. 31)

Otros estudios como el de Leavy, (2006) se han centrado en las concepciones de profesores en prácticas sobre las medidas de dispersión en distribuciones y la comparación de muestras. Para ello se dividió el estudio en tres etapas, un pre-test, una formación y un examen al final, en la primera etapa se vio que los futuros profesores en su mayoría utilizaban principalmente los métodos numéricos en lugar de métodos gráficos, tras el trabajo se sensibilizaron con cuestiones como el tamaño de la muestra o las limitaciones de la opción elegida previamente para representar los datos. Este trabajo es importante porque precisamente son los docentes los que tienen en su mano la formación de los estudiantes y existe entre ellos una falta de conocimiento de estadística.

Otro estudio muy importante, en este caso sobre los tipos de razonamiento de los estudiantes sobre la variabilidad aleatoria, es el de Shaughnessy, Ciancetta, y Canada, (2004) que indican que el razonamiento de los estudiantes en situaciones de muestreo se puede clasificar en: aditivo, proporcional, y de distribución.

- Los estudiantes que razonan de forma aditiva se centran en la frecuencia.

- Los estudiantes que razonan de forma proporcional se centran en las frecuencias relativas para hacer conjeturas sobre las muestras tomadas de una población de composición conocida.
- Los estudiantes que razonan en forma de distribución razonan con frecuencias esperadas y con la desviación de las expectativas razonables para considerar posibles composiciones de la muestra.

El trabajo de Saldanha y Thompson, (2002) da cuenta del razonamiento sobre muestreo,

> Distinguimos dos concepciones de muestra y muestreo que surgieron en el contexto de un experimento de enseñanza realizado en una clase de estadística de la escuela secundaria. En una concepción 'muestra como una versión cuasi-proporcional, a pequeña escala de la población' es la imagen principal. Esta concepción implica la imagen mental de repetir el proceso de muestreo y una imagen de variabilidad entre sus resultados que apoya el razonamiento sobre las distribuciones. Por el contrario, una muestra puede ser vista simplemente como "un subconjunto de una población" - una imagen mental que no engloba la de muestreo repetido, y de ideas de variabilidad que se extienden a la distribución. (p.257)

En este trabajo se sugiere que el razonamiento sobre muestreo es más sofisticado que el razonamiento de distribución, donde son necesarios para razonar la frecuencia relativa y la desviación de la expectativa de una muestra para hacer inferencias sobre la población.

El razonamiento inferencial parece requerir una concepción multiplicativa de la muestra y muestreo. La concepción multiplicativa incluye la noción de comparación de una muestra estadística con la población de las estadísticas resultantes de las estadísticas de todas las muestras posibles de un determinado tamaño de la población. Este tipo de razonamiento es necesario para poder aplicar un razonamiento deductivo.

Uno de los estudios más conocidos y ambiciosos sobre el razonamiento acerca de la variabilidad en situaciones de muestreo e inferencia es el que llevaron a cabo Chance, del Mas, y Garfield (2004) que se desarrolló durante siete años en dos universidades de EEUU. En un principio el objetivo era evaluar la utilidad de un software de simulación para el aprendizaje de distribuciones muestrales, sin embargo, derivó en cinco investigaciones. En la primera etapa observaron una mejora en la percepción de la distribución de muestreo, pero también se dieron cuenta de que necesitaban algo más que un componente visual. Así que rediseñaron la actividad para involucrar a los estudiantes en reconocer sus errores y ayudarlos a superar las intuiciones erróneas que persisten en la orientación de sus respuestas en los ítems de evaluación. Después de esta segunda etapa aún mejoró más la comprensión de la distribución de muestreo, pero también es cierto que aún persistían ciertos prejuicios.

En la tercera etapa se estudió los prerrequisitos necesarios para la comprensión de la distribución de muestreo y el porqué de la persistencia de errores, de aquí pudieron obtener una lista con estos datos.

En la cuarta etapa a través de entrevistas abiertas establecieron cinco niveles de razonamiento acerca de la distribución muestral:

1. Razonamiento idiosincrático: se conoce la terminología y se utilizan los símbolos, pero sin saber bien qué significan.
2. Razonamiento verbal: se conoce la terminología y se comprende, pero no se ha incorporado al comportamiento.

3. Razonamiento de transición: se identifican una o dos dimensiones del proceso muestral sin integrarlas.
4. Razonamiento procedimental: se identifican correctamente las dimensiones del proceso de muestreo, pero no se integran plenamente, ni se entiende el proceso que genera distribuciones muestrales.
5. Razonamiento de proceso integrado: se tiene una comprensión del proceso de muestreo, de las distribuciones de muestreo y es capaz de coordinar las reglas y el comportamiento del proceso de muestreo.

Este modelo es la base de la quinta etapa, ya que en esta desarrollaron un diagnóstico para establecer en qué nivel está el encuestado.

Estos cinco estudios ponen la base para entender por qué es tan difícil entender la distribución de muestreo.

Otro estudio que se ha llevado a cabo en varias ocasiones es el que trata sobre la ley de los grandes números que indica que a medida que la muestra es más grande habrá menos dispersión con respecto a los parámetros de la población.

Sin embargo, a través del ítem del hospital, se descubre que un error bastante frecuente es la no identificación de la dispersión en situaciones de muestreo. El ítem del hospital se ha empleado en varios estudios, como los de Watson, Collis, y Moritz (1995) y Watson y Moritz (2000) por citar algunos relevantes. En dicho ítem planteaban que había dos hospitales donde nacían cada día 5 y 50 niños y se preguntaba en cuál de los dos era más probable tener un 80% de nacimientos de niños y un 20% de nacimientos de niñas en un día cualquiera, la probabilidad de tener valores atípicos es mayor en una muestra pequeña. Como ya indicaba Canada (2014) "la investigación muestra que los entornos de muestreo ofrecen la oportunidad de observar el efecto del tamaño de la muestra en la variación" (p. 51)

4.7. El uso de las Tecnologías de la Información y la Comunicación para la enseñanza de la dispersión

4.7.1. Estudios respecto al uso de las TIC en la enseñanza de la Estadística.

Actualmente se está realizando desde la administración un esfuerzo por implantar las denominadas como *Escuelas 2.0* y programas TIC en los centros de educación secundaria. En el curso 2015-2016 se hizo en Andalucía una dotación a los centros de pizarras digitales, para que hubiera una pizarra por aula en toda la etapa obligatoria.

El uso de las pizarras digitales en sustitución de la pizarra verde clásica no está exento de controversia, debido a algunos problemas que generan en su encendido y mantenimiento. Se pueden usar como pizarras tradicionales y como meras pantallas de cañón video proyector, o se puede emplear la potencia de las herramientas TIC con todas las ventajas que conllevan, como la posibilidad de mostrar, manipular e interactuar con ellas. De esta manera se puede presentar la Estadística de una forma más manipulativa a través del empleo de applets, ya estén disponibles en red o los haya desarrollado el propio profesor.

Nickerson (1995) realizó un interesante trabajo sobre el uso de software en educación e indicó diferentes motivos para utilizarlo. Por ejemplo, permite un aprendizaje activo y por descubrimiento, lo que hace que el aprendizaje sea constructivo.

El uso de simulaciones permite observar los fenómenos y poner el foco en situaciones que si son simplemente explicadas podrían pasar desapercibidas. El uso de modelos y representaciones adecuadas para lidiar con los problemas de comprensión. Además, genera un ambiente en el que están disponibles una gran cantidad de recursos, existen herramientas que permiten la exploración de fenómenos, y crea una atmósfera colaborativa en la que es más fácil compartir ideas ayudando a los estudiantes a hacer un esfuerzo por comprender

En otro estudio Snir, Smith, y Grosslight (1993) indican que existen tres niveles de aprendizaje en las ciencias, concreto, conceptual y meta conceptual. De esta manera, ejemplifican con las propiedades físicas, un estudiante debe entender en primer lugar que la manzana se cae, que los objetos en general caen (concreto), en segundo lugar, conocer la ley de la gravedad (conceptual) y, por último, cómo se ha desarrollado esa ley y cómo funciona el método científico (meta conceptual.) Las aplicaciones informáticas son importantes en el desarrollo de este aprendizaje, ya que permiten observar fenómenos matemáticos que no podrían verse de otra manera, facilitando el aprendizaje concreto, a su vez permite analizar y demostrar leyes interviniendo en el aprendizaje conceptual y por último permite estudiar cómo se ha llegado a esa ley y cómo se desarrolla, mejorando el aprendizaje meta conceptual. Todo ello utilizando simulaciones, modelos y representaciones adecuadas.

Blejec (2003) tiene la misma opinión sobre el uso de las simulaciones para mejorar el aprendizaje de contenidos que son más complejos para los estudiantes, como conceptos teóricos y/o abstractos que de la forma tradicional suelen presentar más dificultades a los alumnos,

> estas simulaciones pueden ayudar a enseñar estadística en general y particularmente conceptos abstractos o difíciles y teoremas. Usando simulaciones combinadas con visualizaciones en el ordenador, los conceptos y teoremas pueden ser efectivamente demostrados incluso a los estudiantes con escasas habilidades matemáticas o falta de interés, y en ocasiones puede servir como sustituto de la demostración matemática rigurosa. (p. 2)

Las herramientas con las que trabaja Blejec (2003) son online y abarca diferentes tipos, desde las herramientas para realizar formación a distancia como IMS, Moodle, redes sociales a otras más específicas de la estadística como RVLS (Rice Virtual Lab in Statistics, http://onlinestatbook.com/rvls.html) y se muestra un férreo defensor de la enseñanza con software y herramientas virtuales "el uso de simulaciones de ordenador en la enseñanza estadística demostró ser un medio muy útil para la explicación de conceptos estadísticos difíciles." (Blejec, 2003, p. 3)

El uso de la tecnología es imprescindible hoy día en la enseñanza de la estadística y así lo defienden Chance, Ben-Zvi, Garfield, y Medina, (2007) que señalan que "es duro imaginar enseñar estadística hoy sin emplear de alguna forma la tecnología" (p. 1)

Estos mismos autores han presentado trabajos sobre el uso de software específico para la formación y evaluación del razonamiento acerca de la variabilidad aleatoria, un ejemplo es Chance, Garfield, y delMas, (1999) que realizaron un trabajo sobre el razonamiento sobre la variabilidad en situaciones de muestreo a través de software.

El aprendizaje de conceptos complejos a través del uso de software ha sido ampliamente estudiado y son muchas las voces que se elevan indicando la conveniencia del uso del software como potencial herramienta de mejora en el proceso de enseñanza – aprendizaje de conceptos estadísticos difíciles (Kalsbeek, 1996; Hesterberg, 1998; Garfield y Ben-Zvi, 2008; Lane y Tang, 2000; Mills, 2003; Mills, 2004; Erickson, 2006).

En el Proyecto GAISE, una de las guías de referencia en la enseñanza de Estadística, y de la que ya se ha hablado varias veces a lo largo de esta tesis, también se recomienda el uso del software como una potencial mejora en la adquisición de conceptos estadísticos complejos. (Franklin et al., 2007)

Por último, el propio currículum exige que se utilicen las TIC para la enseñanza de las matemáticas y en concreto de la Estadística, en el último Real Decreto podemos encontrar,

> El uso de herramientas tecnológicas tendrá un papel esencial en el currículo de la materia, tanto para la mejor comprensión de conceptos o en la resolución de problemas complejos, como para contrastar con mayor rigor las hipótesis propuestas y presentar y comunicar los resultados obtenidos. Además, estas herramientas contribuyen a la preparación para el aprendizaje a lo largo de la vida y apoyan el trabajo fuera del aula. (MECD, 2015b, p.381)
> La competencia matemática, reconocida como clave por la Unión Europea, se desarrolla especialmente gracias a la contribución de la asignatura de Matemáticas. Esta competencia se entiende como habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver problemas diversos en situaciones cotidianas; en concreto, engloba los siguientes aspectos y facetas: pensar, modelar y razonar de forma matemática, plantear y resolver problemas, representar entidades matemáticas, utilizar los símbolos matemáticos, comunicarse con las Matemáticas y sobre las Matemáticas, y utilizar ayudas y herramientas tecnológicas. (MECD, 2015b, p.389)

Por tanto, el uso de estas herramientas y de propuestas didácticas en los libros de texto debería ser obligatoria, ya que tanto la legislación como la investigación invitan a ello.

4.7.2. Revisión del software existente para la enseñanza de la estadística.

Este apartado es una ampliación de los trabajos de Del-Pino (2013) y Del-Pino y Estepa (2013) donde se presentaba una revisión del software disponible para la enseñanza de la Estadística y más en concreto, de las medidas de dispersión, resumiendo las principales propuestas comerciales y las que se han empleado en diferentes investigaciones didácticas.

- S-Plus/R/SPSS (http://www.statsci.org/splus.html http://www.r-project.org/ http://www-01.ibm.com/software/es/analytics/spss/products/statistics/): Son tres programas de los más utilizados en el ámbito estadístico profesional, los dos primeros gratuitos y el último de pago. S y R son en realidad lenguajes de programación, por tanto, son difíciles de emplear, sin embargo, hoy día existen interfaces amigables de usuario como R-commander o PSPP. La dificultad que entrañan no los hace aptos para niveles de secundaria obligatoria, pero si recomendables para 2º de Bachillerato o 1º de Grado, ya que, además, en el mundo empresarial son los más importantes. Algunas de las ventajas de este tipo de software es su potencia de cálculo y que permiten hacer construcciones complejas. Las contras que destacan son la dificultad que genera el utilizar un lenguaje de programación y que la enseñanza del manejo de este programa no es sencila. En la figura 31 se puede observar el interfaz de Rstudio, un programa adicional que dota de una interfaz más amigable a R.

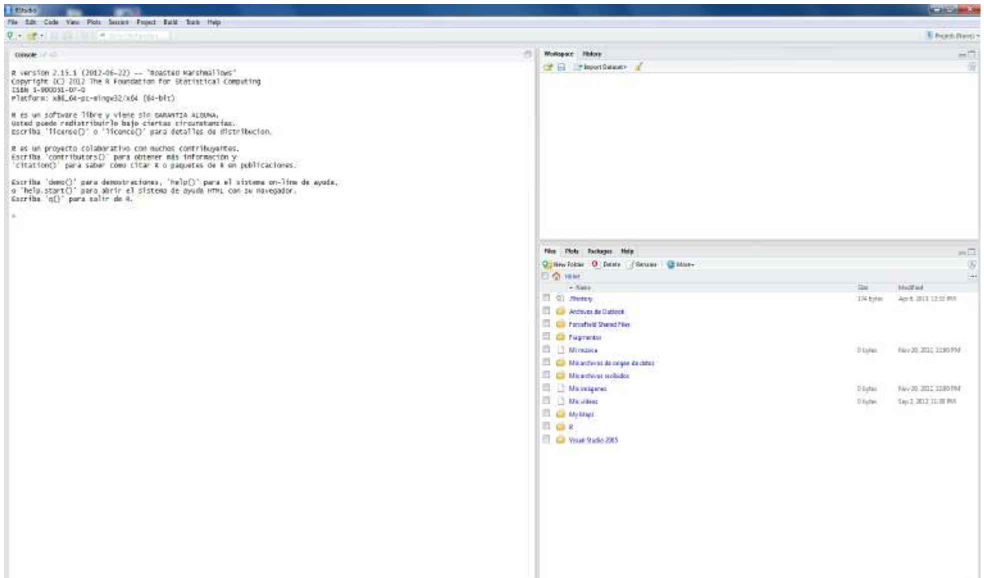


Figura 31. Interfaz de Rstudio.

- Mathematica/Matlab(http://www.wolfram.com/mathematica/ http://www.mathworks.es/): No son aplicaciones estadísticas en particular, son aplicaciones de computación matemática. Ambas opciones están muy extendidas en el ámbito universitario, en especial en las carreras de ingenierías y física. Ambos programas son de pago, que cuestan de 120€ mínimos para el Mathematica a 6000€ mínimos para Matlab, los que los hace económicamente inviables para su uso en educación secundaria. En educación secundaria no es viable debido a su precio, sin embargo, en la educación superior tienen suscritos programas de filiación con las universidades que permiten a los estudiantes poder disponer de ellos gratuitamente (la licencia la paga la universidad.) Las ventajas destacables de estos programas son su potencia y la facilidad de uso, mientras que el precio, que no son específicos de estadística o que necesitan aprender un lenguaje de programación para un uso más allá del básico pueden ser algunas de las desventajas. En la figura 32 se observa el interfaz de Mathematica. Cabe destacar que las funciones básicas de este software se pueden utilizar online.

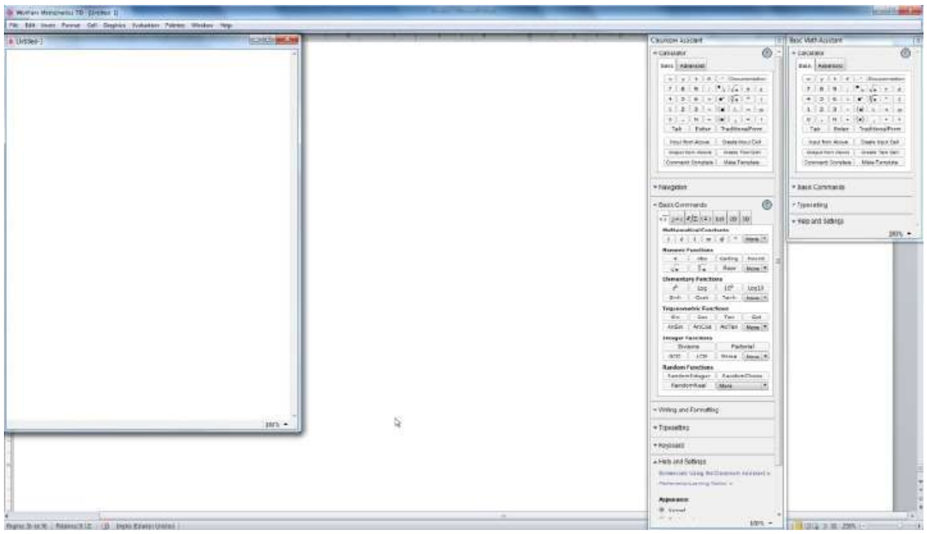


Figura 32. Interfaz de Mathematica.

- Excel/Calc (http://www.microsoft.com/office/preview/es/excel-2013-preview http://es.libreoffice.org/caracteristicas/calc/): En este caso, lo que se muestra son dos hojas de cálculo. La primera pertenece a la suite Microsoft Office, por tanto, es de pago, la segunda es libre y pertenece a la suite Libreoffice. Es un software muy dinámico y por lo general todos los alumnos lo tienen disponible a través de las versiones educativas de Linux, en el caso de Andalucía, a través de Guadalinex. Aunque la potencia de cálculo es inferior a la de los anteriores, la forma de calcular elementos gráficos y de introducir datos es más sencilla, eso lo convierte en una opción a considerar para el trabajo con datos y gráficos. Además, en el caso de Calc es gratuita, ya sea porque venga incluida en un paquete educativo de Linux, como por descarga en plataforma Windows. En la figura 33 se puede visualizar la interfaz de Excel.

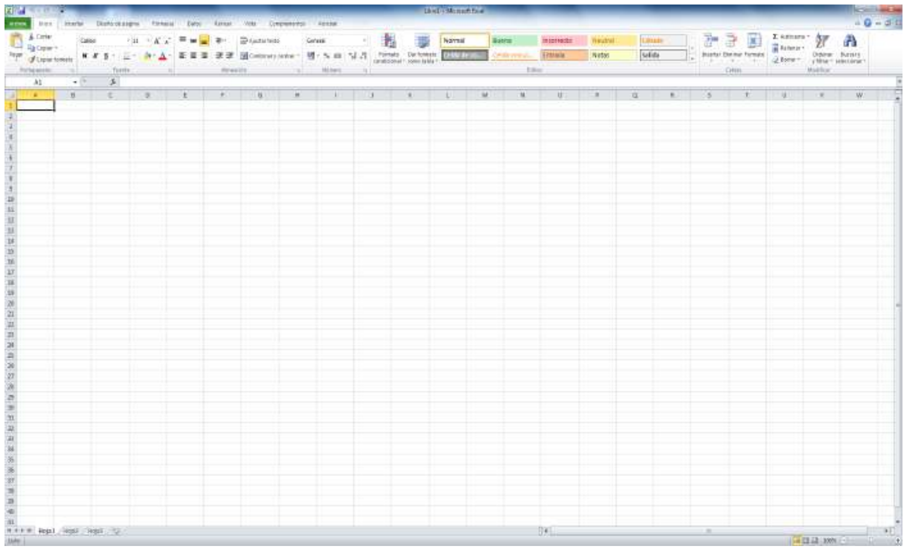


Figura 33. Interfaz de Microsoft Excel.

- WIRIS (http://www.wiris.com/es): Wiris se diseñó para pizarras digitales por la empresa *Maths For More.* Fue uno de los pioneros y eso le hizo tener una fuerte implantación, además cuenta con la ventaja de que existe gran cantidad de material diseñado y compartido. Sin embargo, el programa trabaja sobre internet, y a pesar de los avances, en muchos centros continúa habiendo problemas con la conexión a internet, debido a que son centros antiguos y la red inalámbrica no llega de forma correcta a todas las aulas, y el cableado se hace complejo. Por tanto, el programa no está disponible siempre. Si a ellos se une que el sistema operativo de las pizarras viene en muchos casos cerrado por la administración, se genera un nuevo problema con respecto al uso de flash player u otros plug-in adicionales necesarios para que funcione correctamente. Además, si en lugar de usarlo en red se desea tener la versión de escritorio el precio es de 600€, por tanto, aunque es una buena opción, en los centros público no se está haciendo una apuesta fuerte por él. En la figura 34 se muestra el interfaz.

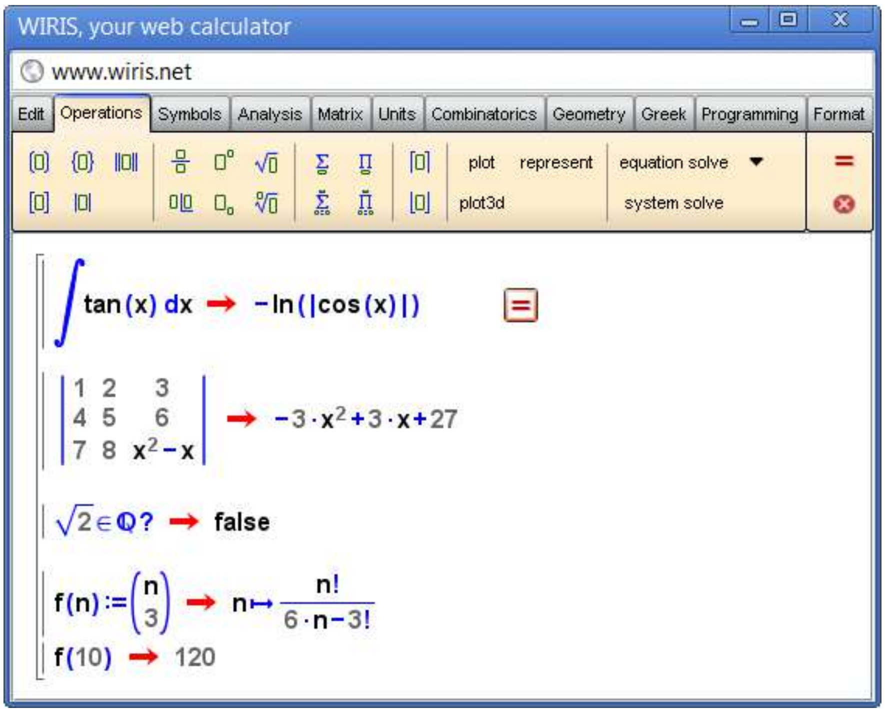


Figura 34. Interfaz de Wiris.

- RVLS (http://onlinestatbook.com/rvls.html): En este caso se presenta un software utilizado en investigación didáctica. El Rice Virtual Lab in Statistic fue desarrollado por David Lane en el año 2000. El software consta de varios applets para trabajar conceptos estadísticos. Se pueden descargar y modificar para ajustarlos a tus necesidades, pero para ello se debe conocer el lenguaje de programación JAVA. Entre las ventajas están la facilidad de uso, que es un software diseñado específicamente para el trabajo de algunos conceptos complejos estadísticos, y su modificabilidad, por señalar alguna desventaja, la página está en inglés, con lo que algunos profesores pueden ser reticentes a su uso, y su modificación y/o creación implica conocer programación en JAVA. En la figura 35 se muestra el contenido de la página principal. (Lane y Peres, 2006)

Figura 35. Página web de RVLS.

- Tinkerplots (http://www.keycurriculum.com/products/tinkerplots): Esta herramienta también ha sido utilizada en varias investigaciones didácticas. Está diseñada para facilitar la comprensión de algunos conceptos estadísticos y en su desarrollo colaboraron KCP technologies y la Universidad de Massachusetts. Es una herramienta de exploración dinámica de datos y vio la luz en 1998. Algunas investigaciones como las de Hammerman y Rubin (2004) o Watson, Fitzallen, Wilson, y Creed (2008) Como ventajas se puede destacar su facilidad de uso y como desventajas señalar que es de pago, con precios que van desde los 10$ hasta los 50$ por licencia para el centro en licencias de por vida, mientras que para los alumnos tiene un coste de 8$ anuales. En la figura 36 se muestra su interfaz.

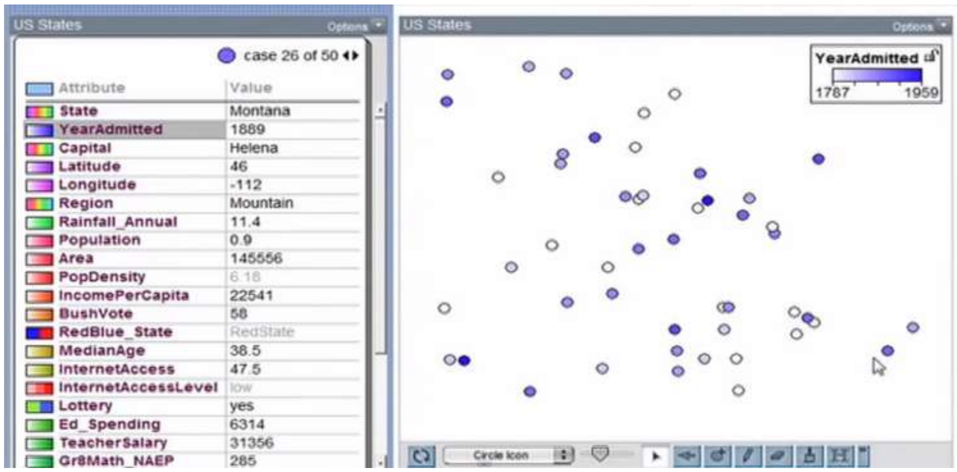


Figura 36. Interfaz de Tinkerplots.

- I^3 (http://www.rossmanchance.com/applets/): Es una colección de applets diseñados por Rossman y Chance (2009) para cuatro áreas de la estadística: el análisis de datos, la distribución de muestreo, simulación de distribuciones aleatorias y probabilidad e inferencia. Las ventajas que manifiesta es el amplio espectro de tópicos que toca, y la facilidad e intuitivita en el uso que es la herramienta. Por destacar algún inconveniente la página está en inglés y el carecer del código fuente para modificar los diferentes applets.

4.7.3. Geogebra como herramienta para la enseñanza estadística.

Si en el apartado anterior se hacía referencia a las numerosas herramientas que hay en el mercado y que se han utilizado en el marco de investigaciones didácticas, este se va a centrar en la herramienta que más difusión está teniendo en la educación secundaria, que es Geogebra.

Geogebra comenzó siendo una herramienta de diseño geométrico para facilitar la comprensión de teoremas y conceptos en ese ámbito y permitir que los alumnos manipulasen objetos geométricos con facilidad. Desde la versión 3.2 GeoGebra incorpora una hoja de cálculo, con las mismas posibilidades que las vistas en el apartado anterior (Excel/Calc), comandos estadísticos y gráficos y la vista de probabilidades, como se puede observar en la figura 37. (Geogebra, 2017)

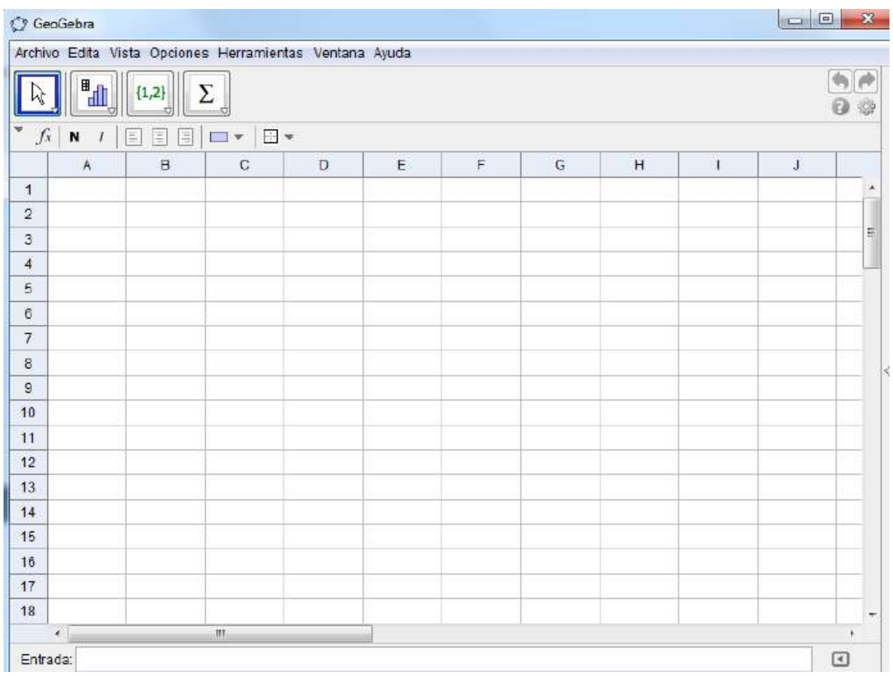


Figura 37. Hoja de cálculo en GeoGebra.

En el modo de hoja cálculo, además de las operaciones normales se incluyen tres botones con diferentes accesos directos a cálculos estadísticos que hacen más accesibles estas funciones, tal y como se muestra en la figura 38.

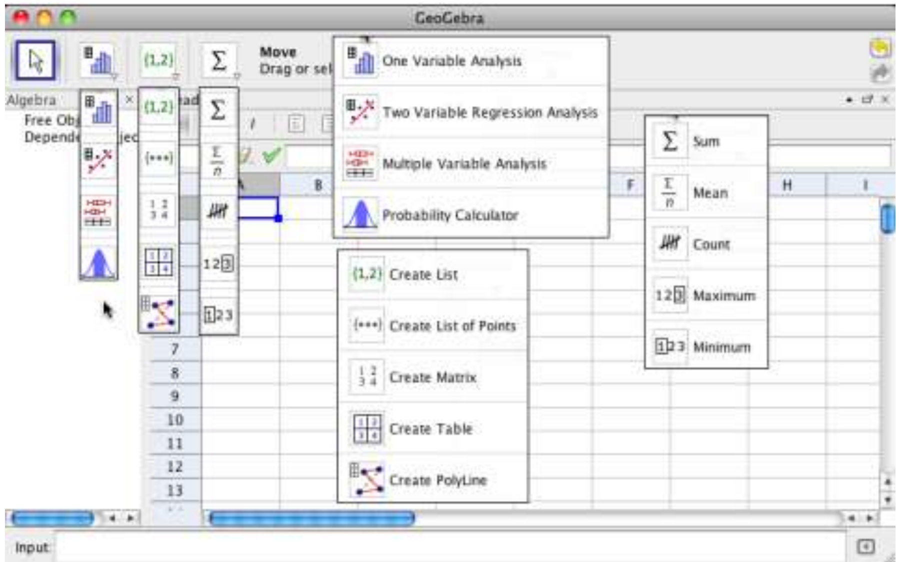


Figura 38. Herramientas estadísticas en la vista hoja de cálculo. (May, 2011)

Adicionalmente, GeoGebra dispone de un modo probabilístico con numerosas herramientas entre las que se incluyen el manejo de las distribuciones de probabilidad más frecuentes, así como del cálculo de sus estadísticos. En la figura 39 se puede observar el desarrollo de este modo.

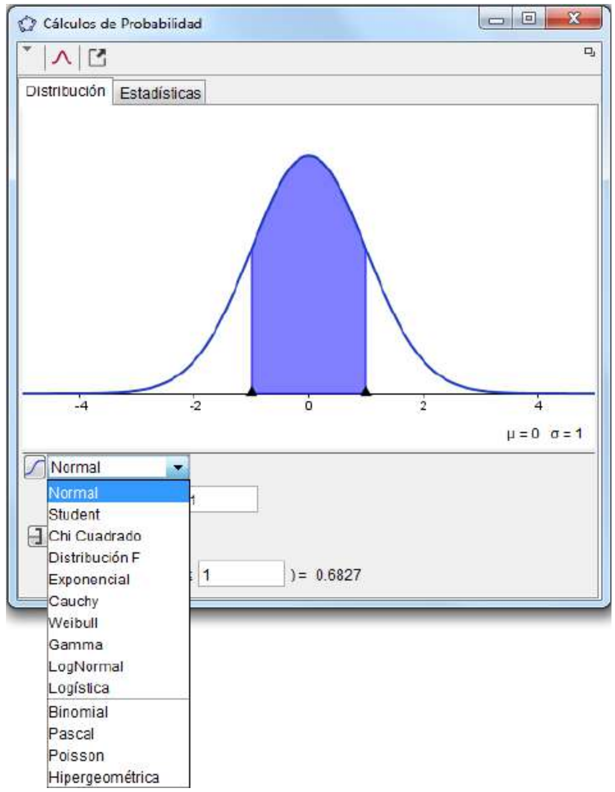


Figura 39. Vista de cálculo de probabilidades.

Las herramientas que incluye Geogebra en este sentido la convierten en una potente herramienta didáctica. Su implantación se debe también a su inclusión en paquetes Linux educativos, que son los que están instalados por defecto en las Pizarras Digitales que suministra la administración, siendo este uno de los principales motivos por los que se está imponiendo a otras opciones como Wiris. De hecho, también se emplea en educación superior a tal fin como como plantean Romano, Martín, y Tenorio (2012).

GeoGebra permite además la construcción de applets que se pueden subir y compartir en su propia red GeoGebraTube (http://geogebratube.org/) Esto enriquece el ecosistema de la aplicación ya que permite globalizar el conocimiento. Un punto más a su favor, es que no solo permite descargarlos, sino que además se pueden modificar sencillamente mediante la aplicación para ajustarlos a las necesidades del profesor. En caso de utilizar sistemas de comunicación CMS como Moodle o similares, estos applets se pueden insertar fácilmente y ser utilizados para evaluación. Revisando GeoGebraTube se pueden encontrar fácilmente applets ya diseñados para ayudar a entender algunas medidas de dispersión como el que se muestra en la figura 40, en el que se explica cómo se construye un diagrama de caja: (http://www.geogebratube.org/student/m18352)

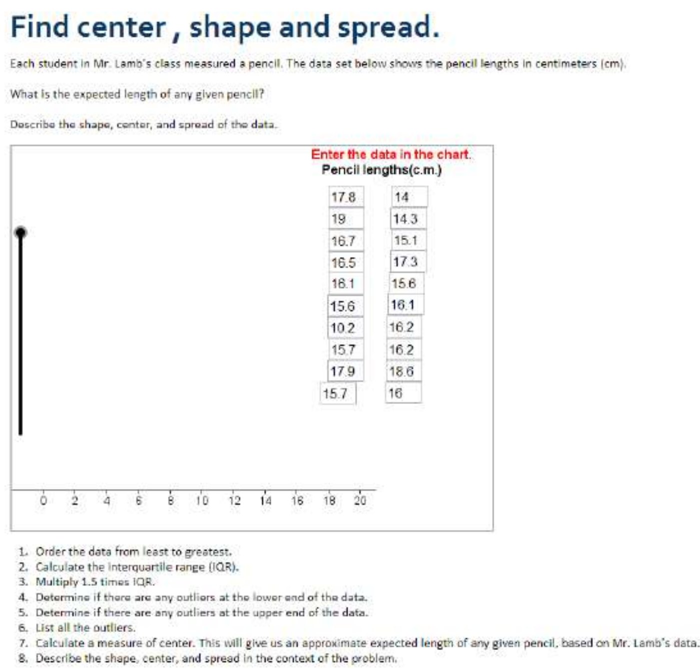


Figura 40. Ejercicio de GeoGebraTube.

A continuación, y para finalizar este apartado, se exponen algunos motivos por los que GeoGebra es una herramienta ideal para la enseñanza de la Estadística en secundaria.

Es software gratuito, libre y de código abierto. No les cuesta dinero a los centros educativos y pueden modificar elementos para tener funcionalidades que no se presentan en la versión estándar.

Es multiplataforma. Funciona tanto si emplean una versión de Linux propio de la Comunidad Autónoma como distintas versiones de Microsoft Windows.

> Es fácil de usar. Además, existen numerosas formaciones, algunas de ellas gratuitas, impulsadas por colectivos de profesores y universidades.
> Es sencillo y a la vez potente. Posee una hoja de cálculo y sus numerosas vistas permiten alternar el uso de la aritmética, representaciones algebraicas, cálculo simbólico y cálculo estadístico y probabilístico. (Del-Pino, 2013, p.243)

4.8. Los gráficos y las medidas de dispersión.

Como se observa en el apartado anterior, hoy día el uso de software con fines educativos está tomando cierto auge, apoyado por la administración. El software pretende mostrar las representaciones gráficas de una forma más dinámica. En este apartado se va a realizar la revisión bibliográfica de estudios relacionados con cómo se puede mostrar la dispersión a través de gráficos y en especial sobre el diagrama de caja, que como se indicaba en el capítulo 2 es el tipo de gráfico que se incluye en el curriculum en los niveles de secundaria obligatoria.

Uno de los estudios más antiguos y a la par interesantes es el de Friel y Bright (1996) que se hace eco de otros estudios de 1965 en adelante en los que introduce el término *graphicacy* que se podría traducir como graficabilidad (el término no existe en español), es decir, la habilidad de leer y entender de forma crítica gráficos. De hecho, otros autores posteriores se han apoyado en este concepto, como por ejemplo Mellissinos et al. (1997) indicaban que el razonamiento estadístico sobre distribuciones podía suponer un nexo común entre las medidas de tendencia central, de dispersión y la graficabilidad. Además de otros estudios, donde se dota a los gráficos de carácter cultural debido a la presencia a través de la historia y en todos los fenómenos que nos rodean, como el de Arteaga, Batanero, Cañadas, y Contreras (2011) Sin embargo, como indicaban Friel, Curcio, y Bright, (2001) muchas veces los alumnos trabajan con gráficos, pero no entienden claramente qué están representando ni para qué lo hacen.

En este apartado se van a presentar estudios que analizan cómo afectan los gráficos a la representación de la variabilidad aleatoria y se va a centrar la atención en un gráfico que es importante porque representa la dispersión y es el que está incluido en el currículum a tal fin, que es el diagrama de caja.

En Inzunza (2006) se analizan los errores de los estudiantes universitarios a través del estudio de la dispersión en gráficos, en este caso se trataba de indicar la desviación típica en distintos tipos de gráficos, como un histograma o la representación de diferentes distribuciones normales. El resultado, como el propio autor indica,

> señala que los estudiantes mostraron diferentes conceptos erróneos y dificultades en la comprensión de la variabilidad, así como una comprensión superficial de la desviación estándar como medida de dispersión, a pesar de ser estudiantes universitarios que habían tomado por lo menos un curso de estadística en niveles previos y en los momentos de la investigación estaban tomando un curso de inferencia estadística. (p.6)

Otros estudios sobre una línea similar son los de Cooper y Shore, (2008, 2010). En el primero trabajan la dispersión en histogramas y gráficos del tronco, en el segundo se centran en diagramas de barras e histogramas. El objetivo de ambos estudios es el estudio de la dispersión sobre los gráficos. En el segundo de ellos indicaban.

> Si bien la dispersión se manifiesta de manera diferente en los tipos de gráficos en general, nuestra elección de los gráficos es particularmente pertinente porque sus similitudes visuales a menudo resultan en los lectores a no distinguir entre ellos, lo que agrava las dificultades de percibir la dispersión. Los estudiantes tienden a encontrar estos tipos de gráficos en ambientes algo diferentes. Los gráficos de barras de valores y los gráficos de barras de distribución se ven en las aulas de educación primaria cuando se presentan las presentaciones gráficas por primera vez. Siguen apareciendo a lo largo de los cursos de primaria y secundaria aun cuando se introducen representaciones gráficas más sofisticadas. Los histogramas y los gráficos de barras se encuentran entre los gráficos más

> frecuentes en las clases introductorias de estadística. Fuera de la escuela, se encuentran comúnmente gráficos de tiempo, otros gráficos de barras de valores y gráficos de barras de distribución en los medios. Los estudiantes que no han tenido una experiencia adecuada diferenciando entre tipos de gráficos, debido en parte a los diferentes ambientes en los que generalmente se encuentran, pueden encontrar especialmente difícil conectarlos con los datos y juzgar (o comparar) la dispersión apropiadamente. (Cooper y Shore, 2010, p.12)

Si se centra la atención sobre la construcción de algún diagrama en particular, uno que llama la atención es el diagrama de caja, que a través del uso de diferentes estadísticos permite comparar muestras y/o conjuntos de datos. El diagrama lo ideó Tukey (1977) y se basa para su construcción en el cálculo de los cuartiles y los valores máximo y mínimo del conjunto de datos. La forma de realizarlo y un breve análisis de las posibilidades que aporta en secundaria lo podemos encontrar en Batanero, Estepa, y Godino (1991), además de una breve revisión del software que se puede emplear para su enseñanza. Otro artículo en la misma línea, pero algo posterior es el de Minnaard, Minnaard, Rabino, Garcia, y Moro (2002) que apoyaban la enseñanza mediante gráficas ya que,

> La utilización de las gráficas ayuda a los alumnos no solo a aprender los contenidos conceptuales, sino a construir los procesos mediante los cuales se puede acceder a la cultura. La gráfica, tiene como finalidad aclarar o facilitar la comprensión del texto que la acompaña, por lo cual favorece un mayor aprendizaje. Se debe tener en cuenta que las gráficas no son meramente decorativas. Deben estar integradas al texto que acompañan. (p.5, aptdo. Conclusión, párr. 1-2)

Pero el estudio más interesante es el de Pfannkuch (2006), en dicho artículo, además de recoger todo el estudio previo sobre diagramas de caja plantea un diseño de investigación – acción, llevado a cabo por una profesora con 12 años de experiencia en una escuela de chicas, para los niveles equivalentes a 4º de ESO, que como indica es donde se introduce el estudio del diagrama de caja. En el artículo se analizan dos de las tres clases en las que se trabaja el diagrama de caja, en la primera sesión se introduce y explica el diagrama de caja para comparar distribuciones de datos y se les asigna como tarea realizar varios ejercicios del libro de texto sobre este tipo de gráfico y el gráfico del tronco. En la segunda sesión se trabajó sobre la interpretación de los diagramas de caja. El análisis posterior se basa en cómo se trabajan los diez elementos del razonamiento sobre diagramas de caja que se muestran en la figura 41.

ELEMENTS OF REASONING	
1. Hypothesis generation	Compares and reasons about the group trend.
2. Summary	Compares equivalent five-number summary points. Compares non-equivalent five-number summary points.
3. Shift	Compares one box plot in relation to the other box plot and refers to comparative shift.
4. Signal	Compares the overlap of the central 50% of the data.
5. Spread	Compares and refers to type of spread/densities locally and globally within and between box plots.
6. Sampling	Considers sample size, the comparison if another sample was taken, the population on which to make an inference.
7. Explanatory	Understands context of data, considers whether findings make sense, considers alternative explanations for the findings.
8. Individual case	Considers possible outliers, compares individual cases.
MODERATING ELEMENTS OF REASONING	
9. Evaluative	Evidence described, assessed on its strength, weighed up.
10. Referent	Group label, data measure, statistical measure, data attribution, data plot distribution, contextual and statistical knowledge.

Figura 41. Modelo de razonamiento sobre comparación con diagramas de caja. (Pfannkuch, 2006, p.33)

En estos diez elementos tenemos en primer lugar la generación de una hipótesis, es un paso previo al análisis y es en lo que se fijará en alumno cuando realice el diagrama, en segundo lugar, se hace el cálculo de los estadísticos y se comparan, en tercer lugar, se realiza la comparación entre diagramas, en el cuarto se centra la atención en la comparación del recorrido intercuartílico, en el quinto paso se analiza la dispersión, comparando los rangos y los recorridos intercuartílicos, en el sexto escalón se comparan los tamaños de las muestras, ya que también afectan a las conclusiones que se pueden obtener. En el octavo paso se estudian los valores atípicos y se comparan. En los pasos nueve y diez se generan las conclusiones y se indican los números y el contexto que han llevado a dicho razonamiento.

Algunas de las conclusiones sobre el análisis de la dispersión en este estudio indican que los alumnos siguen teniendo dificultad en entender completamente lo que hacen,

> En elemento del razonamiento acerca de la dispersión por parte de la profesora, dos comparaciones son evidentes: comparar las densidades entre bloques de una caja y comparando las densidades entre los bloques de las dos cajas. Dicha discusión no fue clara para los estudiantes, ni entendieron como la comparación de las dispersiones les iba a ayudar a hacer una inferencia. (Pfannkuch, 2006, p.41)

Por tanto, cuando se trabaja con los gráficos de caja habrá que centrar más la atención es este tipo de puntos débiles.

Para acabar este apartado se incluye también un trabajo que es consecuencia del trabajo de esta tesis, en este caso Del-Pino y Estepa (2017) que centran la atención sobre los diagramas de caja observan que la presentación de dicho contenido en libros de textos es bastante pobre y en ocasiones inexistente, cuando en el curriculum es preceptiva

Los límites de mi mundo son
los límites de mi lenguaje.
Ludwig Wittgenstein.

Capítulo 5

Marco teórico y definición del problema

5.1. Introducción

En el capítulo 3 se mostraban diferentes marcos teóricos que podían ser útiles para el análisis de libros. En esta tesis se va a emplear el Enfoque Onto-Semiótico (EOS) por su potencia para analizar objetos y significados emergentes de sistemas de prácticas, lo que nos va a permitir analizar los libros de texto y además plantear los posibles conflictos semióticos que se generan.

Para comenzar Godino (2010) se plantea el análisis del significado ya que como afirma

> …el 'significado' "es uno de los términos más ambiguos y más controvertidos de la teoría del lenguaje" (Ullmann, 1962, p. 62). En el texto clásico The Meaning of Meaning, Ogden y Richards (1923) recogieron no menos de diecisiete definiciones de 'significado' (Godino, 2010, p.4)

Dada la complejidad del significado para tratar de solucionarlo, Godino (2010) propone una "reflexión ontológica y epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento matemático y su mutua interdependencia." (p. 3)

El significado tiene un especial papel en la Didáctica de las Matemáticas. Sin embargo, es difícil de estudiar, la dificultad del estudio semiótico del término se incrementa debido a los diferentes objetos matemáticos (situación – problema, conceptos, argumentaciones, …) y usos de lenguaje (escrito, oral, algebraico, gráficos, …)

Hablando de forma muy general, se presentan dos posturas frente al estudio del significado como muestra Godino (2010):

> la tendencia "analítica" o "referencial", que intenta apresar la esencia del significado resolviéndolo en sus componentes principales, y la tendencia "operacional", que estudia las palabras en acción y se interesa menos por qué es el significado por cómo opera, cómo se usan los medios de expresión y comunicación. (p. 4)

Siguiendo esto plantea las indicaciones de Kutschera, el cual distingue dos categorías de teorías del significado:

- Realista: Conciben el significado como una relación convencional entre signos y entidades concretas o ideales que existen independientemente de los signos lingüísticos.
- Pragmática: Wittgenstein en 1953 publicó en el Philosophical Investigation (póstumamente) una interpretación totalmente diferente de la teoría del significado, aunque ya antes se había dado la definición operacional de algunas magnitudes como la longitud o el tiempo. En esta definición vemos que el significado de una magnitud lo da el uso que hacemos de ella. Dentro de esta teoría del significado se resalta el carácter instrumental del lenguaje. Las dos ideas fundamentales de esta teoría son:
    - El significado es contextual.
    - Las entidades abstractas no son observables, pero si su uso lingüístico, a partir de éste se puede deducir el significado de objetos abstractos. Para Wittgenstein una palabra se hace significativa cuando se usa y no necesariamente porque represente una realidad.

Sin embargo, se pueden entender ambas teorías como complementarias, por una parte, la teoría realista se corresponde con una visión platónica de los objetos matemáticos. Según Platón, todos los entes tienen una dimensión o existencia real en el mundo de las ideas, por ejemplo, una circunferencia que se define como el conjunto de puntos del plano que equidistan de uno interior dado, no tiene una existencia en el mundo sensible, sino que hay objetos como un plato, la vista terrestre de la luna o un tambor que recuerdan a esa figura que existe en lo que él llama "kosmos noetós" o mundo de las ideas. De estas cuestiones escribe Platón en diversos pasajes del Filebo, la República, el Fedón, etc., … Godino (2010) lo define así

> el platonismo en matemáticas se puede definir como la conjunción de las siguientes tesis: 1) Existencia (existen objetos matemáticos; las sentencias y teorías matemáticas proporcionan descripciones verdaderas de tales objetos); 2) Abstracción (los objetos matemáticos son abstractos, esto es, entidades no espacio-temporales); 3) Independencia (los objetos matemáticos son independientes de agentes inteligentes y de su lenguaje, pensamiento y prácticas). (p. 7)

Por supuesto esta teoría filosófica ha sido criticada y defendida por numerosos filósofos de todos los tiempos, las principales críticas son las ejercidas por Wittgenstein y por Lakatos, contraproponiendo una definición pragmática del significado que apoyándose en Kutschera "e*s mucho más satisfactoria".*

Por tanto, existen dos teorías que desde fuera parecen opuestas sobre el significado, sin embargo, este dilema lo soluciona Ullmann como explica Godino afirmando que la teoría pragmatista complementa a la realista, de manera que la única forma de averiguar el significado de una palabra es estudiando su uso, una vez que se ha hecho esto se puede pasar a la fase "referencial" para formular el o los significados encontrados. Así define las dos teorías como dos fases de una teoría única, comparándolas con la relación entre la lengua y el habla.

Este modelo sirve de referencia al enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático, en este modelo como indica Godino (2010),

> el significado comienza siendo pragmático, relativo al contexto, pero existen tipos de usos que permiten orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. Estos tipos de usos son objetivados mediante el lenguaje y constituyen los referentes del léxico institucional. (p. 9)

Se observa pues, que hay un análisis ontológico y semiótico del significado, esto se repite también para el objeto matemático, de esta manera se sienta la base para un análisis ontológico – epistemológico y a la vez semiótico de la Educación Matemática.

5.2. Planteamiento del EOS.

Dentro de las posibles formas de poder plantear el Enfoque Ontosemiótico (EOS de aquí en adelante) una opción es usar un planteamiento aglutinador sobre un eje radical, hay varias opciones para hacerlo y una de las que más presencia tiene en la bibliografía es el desarrollo temporal, también se pueden analizar conceptos en general, sin embargo en esta tesis se presenta un núcleo aglutinador para todo el enfoque, que es el análisis didáctico, cada uno del resto de conceptos son, o bien pasos del análisis, o conceptos que cuelgan de las ramas de ese árbol cuyo tronco es el análisis didáctico. Por ello se muestra al inicio el análisis didáctico y después se describen los conceptos intervinientes en cada uno de los pasos del análisis.

5.3. Niveles de análisis didáctico de los procesos de estudio matemático.

La Didáctica de las Matemáticas tiene como uno de sus objetivos el de orientar al profesorado sobre su actuación en el aula, para ello se debe de tener una herramienta que permita un análisis y reflexión sobre situaciones de enseñanza – aprendizaje que se propongan o que se implementen en el aula. Con estas herramientas se puede analizar qué está sucediendo y porqué y también que se puede mejorar (Font, Planas, y Godino, 2010) En el EOS esta herramienta es el análisis didáctico.

5.3.1. Niveles del análisis.

En diversos trabajos del EOS, por ejemplo, los que versan sobre dimensión normativa y para introducirla como D'Amore, Font, y Godino (2007) o Godino, Font, Wilhelmi, y De Castro (2009) se plantean cinco niveles para el análisis de los procesos de enseñanza – aprendizaje, estos son:

1. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.
2. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.
3. Análisis de las trayectorias e interacciones didácticas.
4. Identificación del sistema de normas y metanormas.
5. Valoración de la idoneidad didáctica del proceso de instrucción.

Indican (Font et al., 2010) que

> estos niveles son el resultado de un trabajo de síntesis teórica de diferentes análisis parciales consolidados en el área de Didáctica de la Matemática. Por ejemplo, el nivel 4 se propone para integrar aspectos de análisis de normas sociomatemáticas desarrollados por enfoques socioculturales en educación matemática (Civil y Planas, 2004, Planas y Civil, 2009, Yackel y Cobb, 1996). Hasta el momento, desde el enfoque ontosemiótico se han realizado análisis didácticos a episodios de aula, pero no se han aplicado conjuntamente todos los niveles anteriores a un mismo proceso de instrucción. Por

ejemplo, en Godino, Font y Wilhelmi (2006) se han aplicado parcialmente los niveles 1 y 2 al estudio de una lección de un libro de texto sobre los conceptos de suma y resta. En Font, Godino y Contreras (2008) se han aplicado los niveles 1 y 2 al análisis de una tarea de aula para justificar la derivada de la función $f(x) = x^2$. En Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006) se ha aplicado el nivel 5 a una sesión de clase para la enseñanza de la noción de función con estudiantes de primer curso de una escuela de ingeniería. (p. 91)

5.3.2. Análisis de los tipos de problemas y sistemas de prácticas.

Este análisis se aplica, sobre todo, a la planificación y a la implementación de un proceso de estudio estudiando las prácticas matemáticas del proceso, además puede descomponer el proceso de estudio en bloques y describir las prácticas realizadas para cada uno y finalmente describe una configuración epistémica global que determina las prácticas planificadas y realizadas. (Godino, Font, y Wilhelmi, 2008)

A través de este análisis se pretende dar respuesta a preguntas como qué problemas y prácticas se realizan en el proceso, cómo se secuencian, qué objetos intervienen, cuáles son previos y cuales emergentes.

En el aprendizaje de las matemáticas hay dos tipos de prácticas, una práctica operativa que consiste básicamente en la lectura, producción de textos y producciones en la resolución de problemas; y, principalmente, una práctica discursiva que consiste en reflexionar sobre la práctica operativa, en este primer nivel del análisis se deben identificar las prácticas realizadas.

5.3.3. Elaboración de las configuraciones de objetos y procesos matemáticos.

Para realizar una práctica se necesitan también unos conocimientos matemáticos, estos pueden ser procedimientos, proposiciones, conceptos, por tanto, es cometido de este nivel identificar estos objetos matemáticos.

Este nivel de análisis, por tanto,

> se centra en los objetos y, sobre todo, procesos que intervienen en la realización de las prácticas, y también en los que emergen de ellas. La finalidad es describir la complejidad ontosemiótica de las prácticas matemáticas como factor explicativo de los conflictos semióticos que se producen en su realización. (Godino et al., 2008, pp. 29-30)

Como indica Godino et al. (2008), parte de este nivel es también describir la complejidad onto semiótica de la actividad a realizar, así se encontrarán respuestas a posibles conflictos semióticos.

5.3.4. Análisis de las interacciones y las trayectorias didácticas.

En este nivel se analiza fundamentalmente el papel del profesor, es decir, los recursos, interacciones y secuenciación que pone en juego para conseguir un aprendizaje matemático. Además, se estudian cuáles y de qué tipo son las configuraciones didácticas.

Partiendo de una configuración didáctica se analiza la trayectoria que lleva a una configuración didáctica final, dicha trayectoria se divide en subtrayectorias como se observa en la figura 42.

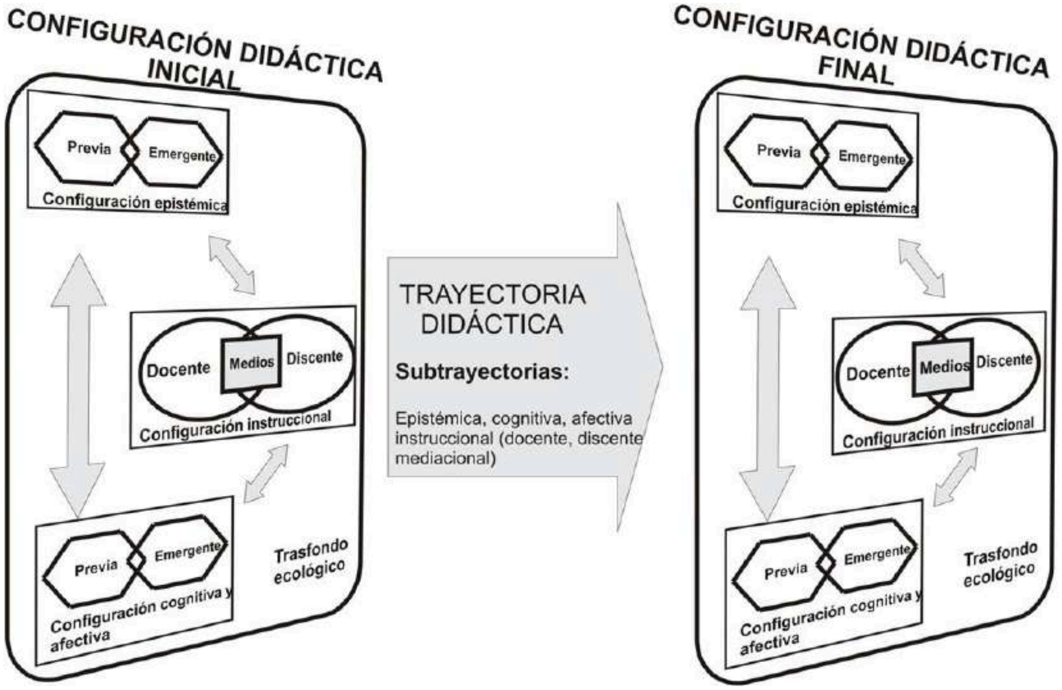


Figura 42. Interacciones didácticas (Godino, 2014, p.30)

5.3.5. Identificación del sistema de normas y metanormas.

El proceso de enseñanza – aprendizaje de las matemáticas no es un hecho que ocurra aislado de la sociedad, si no que se produce en ella, de hecho, se puede considerar el aula de matemáticas una pequeña sociedad, donde se dan las relaciones típicas de cualquier sociedad. De este hecho se percató Brousseau y por eso postuló el contrato didáctico, que tan útil ha sido a lo largo de los años. Dentro del EOS el contrato didáctico pareció insuficiente para tratar todas las relaciones que se dan en el aula y se amplió introduciendo lo que se conoce como dimensión normativa de los procesos de estudio. Las normas y metanormas que se dan en el proceso de enseñanza-aprendizaje es lo que se analiza en esta etapa del análisis.

En este momento se estudian las normas que condicionan la configuración didáctica y se intentará explicar por qué el sistema didáctico funciona como lo hace (Godino et al., 2008).

5.3.6. Idoneidad didáctica.

Todo el análisis realizado hasta ahora tiene un objetivo y es identificar los puntos débiles y posibles mejoras del proceso de instrucción. Se proponen seis criterios para la idoneidad didáctica: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica. Conociendo la idoneidad de cada criterio se obtendrá la idoneidad total, sin embargo, es complicado tener un equilibrio entre las seis idoneidades parciales.

5.4. Significado institucional y personal de un objeto matemático. Sistemas de prácticas

Una vez estudiado el análisis didáctico, se analizarán los pasos uno y dos del análisis. En primer lugar, se trabajará sobre el concepto de sistema de prácticas, más tarde el de objeto matemático y el de institución en el EOS. Al plantearnos esta cuestión lo primero que se debe cuestionar es qué se entiende por significado, ya en la introducción de este tema se han abordado las dificultades con las que se encontraron los autores de este marco teórico al plantearse los fundamentos y los dos aspectos, definiciones o teorías como las llamaba Kutschera del significado el realista y el pragmatista.

Para analizar el significado, se parte de la psicología general, del triángulo de Odgen que se puede ver en la figura 43.

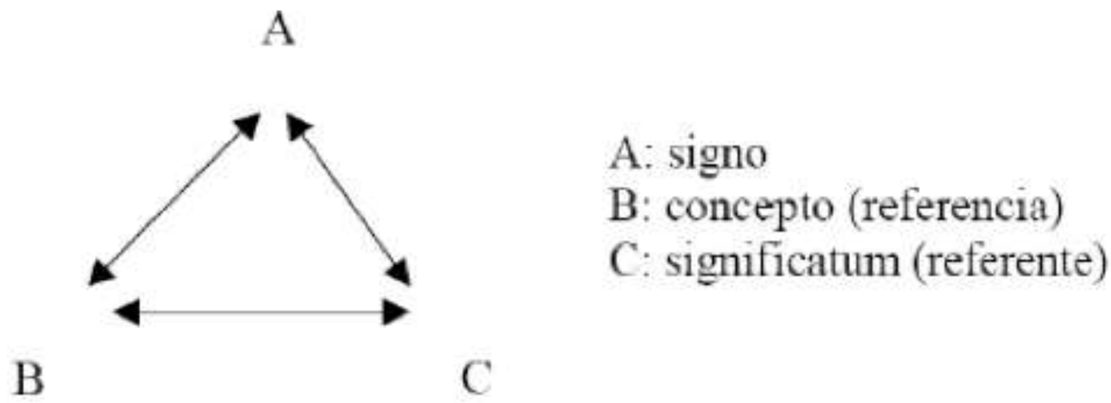


Figura 43. Triángulo de Odgen.

En la figura 24 se observa la relación entre un signo A y su referente C pasa por un concepto B. En el caso que se quiere estudiar A sería una expresión matemática, B el objeto matemático que corresponde a una expresión y C el significado del objeto, pero no se conoce cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos ni de su significado más en concreto.

Para aclarar la situación se va a definir, antes de hablar de los condicionamientos de éste, qué se entiende por objeto matemático, para ello se va a emplear la teoría pragmática para describirlo.

Para comenzar, Godino y Batanero (1994) describen la concepción de Matemáticas que se va a emplear en el EOS.

> El punto de partida de nuestra teorización es la formulación de una ontología de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspecto de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y sistema conceptual lógicamente organizado, pero también la dimensión cognitiva individual. (p. 332)

Esto quiere decir que en el marco teórico se tienen en cuenta tres elementos como fundamentales, un marco en el que se resuelven problemas (1) y que tiene un lenguaje específico con el que nos comunicamos (3), a esto se le llamará sistema de prácticas y un lugar donde compartir las prácticas socialmente (2) al que se le llamará institución, pero estos elementos no sólo se comparten en una institución, sino que como se verá un poco más adelante también tienen su aspecto personal.

5.4.1. Sistema de prácticas.

Godino y Batanero (1994) definen objeto matemático de una manera previa de la siguiente manera

> los objetos matemáticos deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo. En nuestra concepción, es el hecho de que en el seno de ciertas instituciones se realizan determinados tipos de prácticas lo que determina la emergencia progresiva de los "objetos matemáticos" y el que el "significado" de estos objetos esté íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática. (p. 330)

Se irá desarrollando el apartado de manera que se pueda definir mediante el uso el significado de los objetos matemáticos.

Antes que Godino, Chevallard, (1991a) definió *objeto matemático* como

> un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito. (p. 8)

Sin embargo, el concepto importante para Chevallard no es la noción de objeto matemático sino la relación al objeto. Para estudiar los tipos de relaciones a los objetos antes se necesitan comprender algunas ideas previas:

- Problema: Godino se apoya en las definiciones de Lester o Simon para describir lo que se entiende por problema que se podría definir como una situación en la que hay que realizar una tarea que no tiene una solución sencilla y para la que se necesita un algoritmo, pero que se sabe reconocer cuando acaba con algún tipo de mecanismo. Al mecanismo de la resolución de un problema le llama Freudenthal *matematizar*, aunque este autor lo lleva más allá "matematizar es un proceso que continúa tanto tiempo como el que la realidad cambia, ampliando y profundizando bajo multitud de influencias, incluyendo las matemáticas, que a su vez son absorbidas por la realidad cambiante" (Freudenthal, 1991, p.30) Godino, sin embargo, propone introducir el concepto de práctica para resumir las características de la actividad de matematización.
- Práctica: "Llamamos práctica a toda actuación o manifestación (lingüística o no) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas.*"* (Godino y Batanero, 1994, p.333*)* A esto es a lo que Chevallard llamaba praxema y que define como "objetos materiales ligados a las prácticas." (Chevallard, 1991a, p.8)

Para cada persona se pueden asociar un sistema de prácticas características.

Como se ha mostrado antes la noción de práctica está relacionada con la de problema, normalmente una persona cuando trata de resolver un problema no lo hace linealmente, sino que utiliza el método de ensayo error, dando lugar a procedimientos que no llevan a la solución y que, por tanto, se abandonan, así surge la necesidad de definir las prácticas significativas.

> Diremos que una práctica personal es significativa (o que tiene sentido) si, para la persona, esta práctica desempeña una función para la consecución del objetivo en los procesos de resolución de un problema, o bien para comunicar a otro la solución, validar la solución y generalizarla a otros contextos y problemas." (Godino y Batanero, 1994, p.334)

Esta definición de práctica significativa exige organización, es decir, una práctica es significativa cuando se realiza para conseguir un fin determinado y se hace conscientemente.

En la figura 44 se muestra la emergencia de una práctica característica significativa.

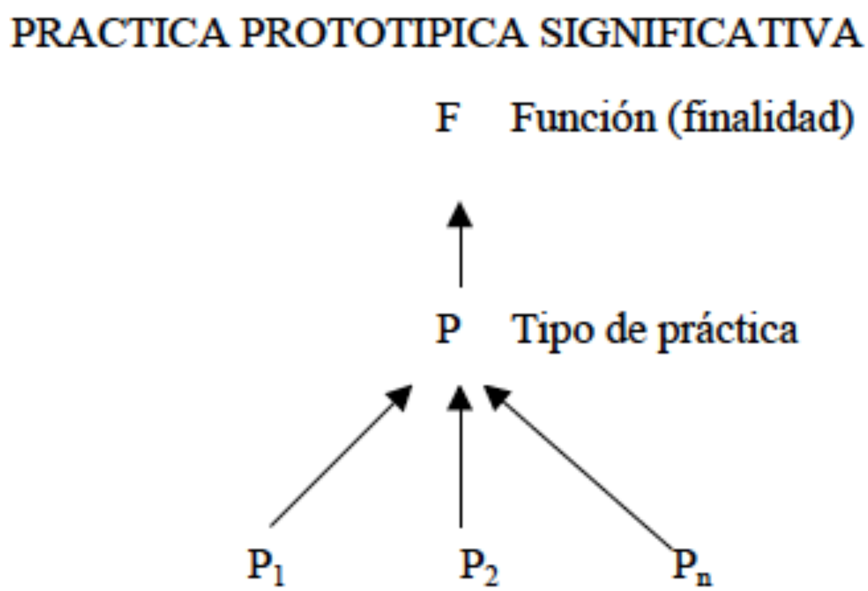


Figura 44. Práctica prototípica significativa. (Godino y Batanero, 1994, p.334)

Muchas prácticas matemáticas son compartidas por grupos de personas que tienen interés en resolver los mismos problemas matemáticos y que la sociedad los reconoce como *institución*, sin embargo, las matemáticas no son sólo personales, sino también sociales, en el aspecto de que normalmente se aprenden en grupo y cuando se investiga o resuelven problemas se comparten los resultados con los demás.

Godino y Batanero (1994) nos proponen la siguiente definición de institución,

> una institución (I) está constituida por las personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales compartidas, las cuales están, asimismo, ligadas a la institución a cuya caracterización contribuyen. (p. 334)

Como ejemplos de instituciones matemáticas se pueden citar a las personas comprometidas con la resolución de problemas, profesores de matemáticas o los matemáticos, también es una institución bajo esta definición una clase de matemáticas, donde todos, profesor y alumnos, están involucrados en una tarea común de enseñanza – aprendizaje de matemáticas. Así dentro de cada institución las prácticas son diferentes para conseguir la resolución del campo de problemas en cuestión. Esto da pie a definir lo que es un sistema de prácticas institucional asociado a un campo de problemas, así según Godino y Batanero, (1994) este sistema "está constituido por las prácticas consideradas como significativas para resolver un campo de problemas C y compartidas en el seno de la institución I." p. 335).

Ejemplos de estos sistemas de prácticas son representaciones simbólicas, definiciones, argumentaciones, demostraciones, etc…

5.4.2. Objetos institucionales y personales.

Como consecuencia de las prácticas realizadas en la resolución de problemas emergen los objetos, Godino y Batanero (1994) plantean un ejemplo de problema del que surge el objeto *media.* Consiste en medir una cantidad desconocida, debido al error de medida intrínseco del aparato (por ejemplo, un goniómetro que se mueve Xº tendrá un error x, por lo tanto, la medida será $X \pm x$ º) tendrá una dispersión de medidas, pero, ¿cuál es la correcta? No hay nada que indique que una es mejor que otra, así emerge el concepto de media, que no será más que la suma de todas las medidas divididas por el número de estas. Este objeto, según indican Godino y Batanero (1994)

> emerge progresivamente del sistema de prácticas socialmente compartidas, ligadas a la resolución de cierto campo de problemas matemáticos. De acuerdo con Morin (1977), la noción de emergencia significa que los productos globales de las actividades que forman un sistema disponen de cualidades propias, las cuales retroactúan sobre las actividades mismas del sistema del que se vuelven inseparables. (p. 335)

Como se ha advertido anteriormente, las prácticas son características de la institución, así pues, los objetos tendrán esa misma cualidad también ya que emergen de un sistema de prácticas concreto, por tanto, el objeto será relativo a una institución y Godino y Batanero (1994) lo define de la siguiente manera: "es un emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $P_I(C)$. Los elementos de este sistema son los indicadores empíricos de O_I" (p. 336).

Los objetos institucionales emergen progresivamente y se van haciendo un lugar en la institución, una vez que lo han conseguido no se queda así, van evolucionando de manera que también se va ampliando su campo de problemas, de esta manera el objeto *media* cada vez ha ido respondiendo a más problemas de distinta índole. Cuando un objeto institucional surge en una institución matemática el objeto entonces recibirá el nombre de *objeto matemático* (Godino y Batanero, 1994).

Pero no sólo existen objetos institucionales, ya que en muchas ocasiones es un sujeto, una persona individual quien está aprendiendo y quien crea un nuevo concepto, por tanto y con relación al sujeto se puede definir paralelamente un sistema de prácticas personal que

> está constituido por las prácticas prototípicas que una persona realiza en su intento de resolver un campo de problemas C. Representamos este sistema por la notación $P_p(C)$" y un objeto personal que "es un emergente del sistema de prácticas personales significativas asociadas a un campo de problemas, esto es, un emergente de $P_p(C)$ (Godino y Batanero, 1994, p. 337).

5.4.3. Significado institucional y personal de un objeto.

Como se ha mostrado hasta ahora, el objeto emerge de un sistema de prácticas determinado, y la descripción del objeto que se hace mediante esas prácticas se puede considerar su descripción, hay que recordar que al inicio de este apartado se dijo que se consideraría el aspecto pragmático del significado, así lo muestran Godino y Batanero (1994) apoyándose en Vergnaud y más tarde lo especifican más claramente "coincidimos con este autor en que el significado de los objetos matemáticos debe estar referido a la acción (interiorizada o no) que realiza un sujeto en relación con dichos objetos." (p. 337) Es decir, el significado parece emerger también del sistema de prácticas, no sólo el objeto, de esta manera si un objeto podía ser institucional o personal, es lógico pensar que lo mismo ocurra con su significado, se puede estudiar si esto pasa con un objeto, ¿puede ser el significado de un objeto institucional? Si se elige el objeto *media* se observa que según la institución donde se analice tendrá un significado u otro, por ejemplo en un aula de primaria no tendrá el mismo significado que en una de secundaria, y por supuesto será mucho más profundo en un aula de la licenciatura de Estadística y en la vida diaria tendrá unas connotaciones diferentes, por tanto parece que su significado depende en gran medida de la institución en la que se use, por tanto cabe definir el significado de un objeto institucional como "el sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge O_I en un momento dado." (Godino y Batanero, 1994, p. 338) Como se puede ver, al definirlo de esta manera se hace que el significado dependa de la institución, si esta institución es una institución matemática (M) entonces se habla del significado matemático de un objeto, además se puede equiparar el significado institucional de un objeto al sistema de prácticas institucional del cual emerge el susodicho objeto.

De la misma manera que se hacía con el objeto definiendo paralelamente un objeto institucional y otro personal, dependiendo de si emergía de una institución o de un sujeto, se puede hacer también con su significado, siendo la definición paralela a la anterior, por tanto, se dice que el significado de un objeto personal es "el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto O_p en un momento dado." (Godino y Batanero, 1994, p. 338) Teniendo la misma implicación que la definición institucional, pero en el marco personal.

5.4.4. Tipología y atributos de los objetos.

Por ahora no se ha hablado de la clase de objetos que se pueden encontrar, así pues, como se ha mostrado en el capítulo 2, el curriculum anterior distinguía entre conceptos y procedimientos a la hora de tratar un contenido (o un objeto concreto), sin embargo, el EOS amplía esta distinción con el objetivo de describir mejor los objetos, así pues, Font y Godino, (2006) proponen la siguiente tipología de objetos matemáticos primarios:

- Elementos lingüísticos: son cualquier tipo de expresión oral o no con la que transmitimos algo (notaciones, expresiones, etc.)
- Situaciones – problema: se refiere a cualquier problema, ejercicio o tarea que se realiza.
- Conceptos – definición: como su propio nombre indica es cualquier definición que se introduce (de un objeto, por ejemplo, recta, punto, media, dispersión, etc.) ya sea mediante una definición o una descripción.
- Acciones o procedimientos: es la forma de hacer o trabajar un concepto o una demostración, etc., ...
- Proposiciones: son enunciados que se realizan sobre los objetos, en los cuales se puede, por ejemplo, definir propiedades de éstos.
- Argumentos: con ellos se justifican las deducciones o resultados que se alcanzan.

Si así se describen mejor los objetos, se puede decir también que estos tienen una funcionalidad, así pues, se les pueden dar unos atributos contextuales duales que ayuden a entender estas funciones, por tanto, Font y Godino (2006) introducen las siguientes dimensiones duales para considerarlos:

- Personal – institucional: Este atributo depende de si el sistema de prácticas es compartido en el seno de una institución, y diremos que el objeto es institucional, mientras que si el sistema es una persona el objeto es personal, ambas facetas son necesarias ya que aunque a través de la enseñanza o de compartir experiencias en una institución, también se da un proceso de comprensión personal al enfrentarse a un problema o en el seno de una institución, de esta manera si no se consideran ambas facetas no se está teniendo la visión completa del objeto.
- Ostensivo – no ostensivo: Un objeto ostensivo es un objeto público, que pude ser mostrado, normalmente los objetos son no ostensivos, es decir, no se perciben por sí mismos, pero se pueden asociar a estos objetos otros que sean ostensivos como gráficos, notaciones, etc… sin embargo, la distinción entre ostensivo y no ostensivos no está claramente delimitada por una línea ya que un objeto no ostensivo puede ser imaginado o estar implícito en el discurso matemático.
- Expresión – contenido: Los objetos pueden ser antecedentes y/o consecuentes de una función semiótica. Los objetos están relacionados entre sí, no son entidades aisladas, la relación es mediante funciones semióticas que consiste en una relación de una expresión (antecedente) con un contenido (consecuente) establecida por una persona o institución con respecto algún criterio de correspondencia.

- Extensivo – intensivo: Es la relación que se da entre una expresión y su generalización, por ejemplo, *la derivada de 3x es 3*, que es el caso particular, y *la derivada de mx es m* que es el caso general, de esta manera se hace posible generalizar.
- Unitario – sistémico: los objetos pueden ser estudiados como entidades unitarias o que deban ser descompuestas. Los objetos unitarios se suponen previamente conocidos mientras que los sistémicos deben ser descompuestos para ser analizados.

5.4.5. La institución clase de matemáticas y el problema de la evaluación.

Los objetos se dan dentro de una institución (o de una persona), una de las instituciones de más interés en el área de la Didáctica de las Matemáticas es la clase de matemáticas. Así, en esta institución particular, el profesor empleará los recursos que crea convenientes, el inconveniente de esto es que el significado del objeto matemático puede verse restringido. Además, dentro de la institución hay un elemento de valor, que es la evaluación, que consiste en confrontar el significado del objeto matemático transmitido con el que el alumno ha adquirido, esto ocurre porque como veíamos en el apartado anterior los significados varían de una persona a otra y con el tiempo. Así Godino y Batanero (1994) definen un interesante concepto que es el de *significado de un objeto para un sujeto concreto desde el punto de vista de la institución*, en este caso será el significado del objeto para un alumno bajo la institución *clase de matemáticas*, según los autores es “el subsistema de prácticas personales asociadas a un campo de problemas que son consideradas en I como adecuadas y características para resolver dichos problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 339).

A modo de resumen, un sujeto concreto en una institución obtiene un significado personal de un objeto personal a partir de un significado y un objeto institucional, esto se puede denominar *comprensión del objeto* del sujeto. Esta comprensión será tanto mejor si el sujeto es capaz de utilizarlo correctamente en el sistema de prácticas de la institución correspondiente, pero esto no ocurre así siempre, sino que se tienen grados intermedios entre una comprensión nula y una comprensión total.

Ya se percibe que este punto es una de las principales dificultades de la evaluación, el *comprender* y el *conocer* no se pueden responder con un sí o un no de una tabla de valoración, sino que hay muchos grados intermedios y una vez que se acepta este hecho hay que detenerse a pensar que criterios de evaluación e indicadores observables y medibles son los adecuados para hacer una evaluación correcta. Por suerte las prácticas sociales son observables y permiten mediante un análisis adecuado estudiar el campo de problemas asociado y el significado institucional y también mediante un análisis adecuado se pueden estructurar las tareas de las cuales se pueden obtener información, a partir de aquí se puede comenzar a trabajar con estos dos puntos de referencia para diseñar una evaluación correcta.

5.4.6. Tipos de significados institucionales y personales.

En consecuencia, como el significado institucional, varia de una institución a otra, el significado personal variará de una persona a otra, e incluso, en la misma persona dependiendo de su evolución en la apropiación del significado de un determinado objeto matemático. Podemos definir varios tipos de significado institucional y personal que nos permita relacionar ambos (Godino y Font, 2007).

Los tipos de significados institucionales que se pueden encontrar son:

- Referencial: es el sistema de práctica que se utiliza como referencia para elaborar un significado.
- Pretendido: son todos los sistemas de prácticas incluidos en la planificación.
- Implementado: es el sistema de prácticas que, como dice el propio tipo, implementa el docente.
- Evaluado: es el subsistema de prácticas que se emplea para evaluar el aprendizaje.

Los tipos de significados personales propuestos en el EOS son:

- Global: corresponde a todos los sistemas de prácticas personales que el sujeto es capaz de situar en relación con un objeto matemático.
- Declarado: son las prácticas que expresa el sujeto sean correctas o no desde el punto de vista institucional.
- Logrado: son las prácticas que manifiesta el sujeto y son acordes a las institucionales.

La relación entre estos significados se sintetiza en la figura 45.

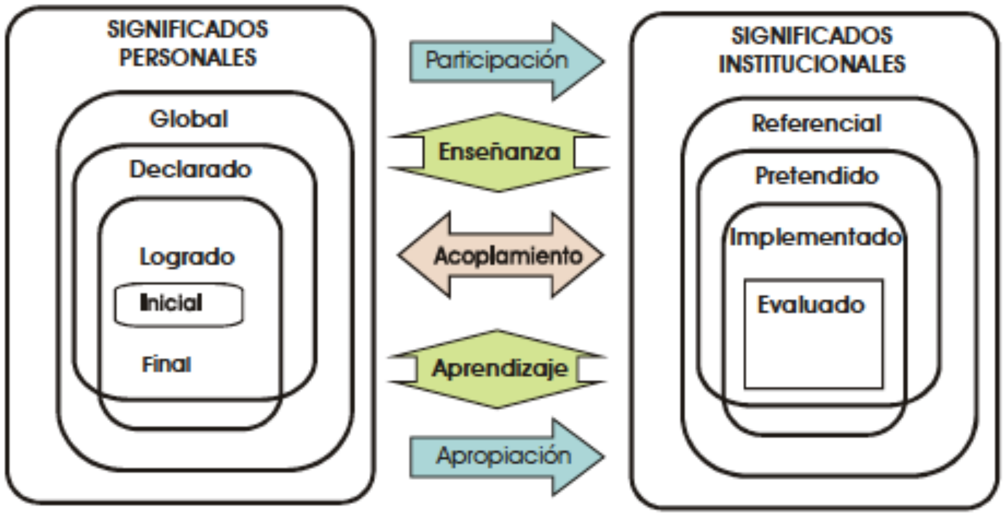


Figura 45. Tipos de significados institucionales y personales.(Godino et al., 2006, p.7)

5.4.7. La metáfora ecológica.

Lo que se ha presentado hasta ahora se puede resumir indicando que los objetos matemáticos y los significados matemáticos tienen razón de ser, en cuanto *viven* en instituciones y personas, al hablar de ellos como entes vivos se puede destacar la metáfora ecológica presentada por Chevallard (1989) y por Morin, (1992). La existencia de una noosfera (término empleado por Chevallard) como un lugar donde los objetos son entes vivos retrotrae no sólo a la ecología y a criterios de supervivencia, persistencia, existencia, etc… también recuerda el "kosmos noetós" realista de Platón y su mundo de las ideas, donde estas existían realmente.

Sin embargo, esta metáfora, mucho más allá también ayuda a comprender el nacimiento, funcionamiento, desarrollo y afianzamiento de los objetos matemáticos, y aún más, la supremacía de unos frente a otros en según qué instituciones.

Godino (1993) apoyándose en White indica acerca de esa noosfera o hábitat de los objetos

> el locus o lugar de la realidad matemática es para White (1983) la tradición cultural, es decir, el continuum de conducta expresada por símbolos. Dentro del cuerpo de la cultura matemática ocurren acciones y reacciones entre los distintos elementos. "Un concepto reacciona sobre otros; las ideas se mezclan, se funden, forman nuevas síntesis" (White, 1983, p. 274) (White, 1983 a través de Godino, 1993, p. 3)

Por tanto, el hábitat de los objetos debe también mucho a la cultura y esto marcará la supremacía de algunos objetos sobre otros como se verá más adelante.

Para utilizar la metáfora ecológica hay que entender los objetos como entes vivos que se relacionan con otros y que tienen un papel dentro de su hábitat. De esta manera se podrán responder algunas preguntas como cuál es el lugar de los objetos, si hay instituciones en las que las matemáticas podrían ser mejor utilizadas, las restricciones de los objetos para expandirse y ocupar otros nichos ecológicos vacíos, la interdisciplinariedad de los objetos (o cómo se relacionan), si se dan relaciones ecológicas como la simbiosis, el parasitismo y el comensalismo, etc…

Un pequeño análisis ecológico que se puede hacer es el algoritmo de la suma empleado en la educación primaria:

Actualmente se emplea el que podemos llamar algoritmo clásico, ¿pero es este el único algoritmo de suma? Pues no, existen otros algoritmos como el de *sumas por unidades básicas, suma por reagrupamiento de unidades, algoritmo ABN* o el *no algoritmo*, o lo que es lo mismo, enseñar el empleo de calculadora en lugar de un algoritmo de suma. La primera pregunta que se puede hacer sobre el algoritmo clásico es si es el algoritmo más sencillo, y la respuesta es no, entonces ¿por qué es el algoritmo superviviente de todos estos? Pues cualquier algoritmo es más fuerte que el no algoritmo (enseñanza del empleo de la calculadora) por tradición cultural, se encontraría una fuerte oposición por parte de los padres ya que no es concebible que no se enseñe a sumar a los niños en el colegio. ¿Y con respecto a los otros algoritmos? Pues, aunque hay algunos algoritmos que son más sencillos de utilizar este se ha impuesto. Esta historia la cuentan Chevallard, Gascón, y Bosch (1997) acerca de la suma y la introducción de los operadores, o del algoritmo del producto en relación al clásico y al algoritmo llamado "de gelosía" desechado por ser demasiado sencillo.

Como se puede observar el algoritmo se ha comportado como un ente vivo en un nicho ecológico, ¿y qué sucede con otros algoritmos? Pues por ejemplo el algoritmo de la resta está íntimamente ligado al de suma, en una relación casi parasitaria, aquí podemos ver las relaciones entre objetos, así se podría seguir analizando el caso y construir todo el ecosistema de los algoritmos operacionales de primaria.

5.5. Trayectorias e interacciones didácticas

A continuación, se va a modelizar la enseñanza – aprendizaje de un contenido como un proceso estocástico mutidimensional, compuesto por seis procesos: epistémico, cognitivo, mediacional, emocional, docente y discente con sus correspondientes trayectorias y estados potenciales.

5.5.1. Configuración didáctica.

Para analizar las trayectorias didácticas se debe partir de una configuración didáctica inicial y estudiar los caminos que llevan a una configuración didáctica final, así pues, por cada trayectoria se puede definir una configuración específica, se comenzará pues, definiendo la configuración didáctica, que será la unidad primaria para el análisis didáctico, como

> la secuencia interactiva de estados de las trayectorias que tienen lugar a propósito de una situación-problema (o tarea). Una configuración didáctica se compone de una configuración epistémica, esto es, una tarea, las acciones requeridas para su solución, lenguajes, reglas (conceptos y proposiciones) y argumentaciones, las cuales pueden estar a cargo del profesor, de los estudiantes o distribuidas entre ambos. Asociada a una configuración epistémica habrá también una configuración docente y otra discente en interacción (además de las correspondientes cognitivas, emocionales y mediacionales). El docente puede desempeñar las funciones de asignación, motivación, recuerdo, interpretación, regulación, evaluación. El discente puede a su vez desempeñar los roles de exploración, comunicación, validación, recepción, autoevaluación (Godino et al., 2006, p.20).

Se pueden definir las dimensiones de la configuración:

- Configuración epistémica: aquí se engloba la tarea y las acciones requeridas para su solución como por ejemplo las reglas, las argumentaciones, etc., … pueden depender del profesor, del alumno o de ambos.
- Configuración docente: son las acciones que realizar el profesor y que se relacionan con la configuración epistémica, la motivación, la interpretación, la evaluación, etc., … son posibles acciones que puede realizar el profesor.
- Configuración discente: son las acciones que realiza el alumno, también se interrelaciona con la configuración epistémica, posibles acciones que puede realizar un alumno son la exploración, la comunicación, la autoevaluación, etc., …

A estas configuraciones les corresponden también la cognitiva, la emocional y la mediacional. La configuración didáctica interacciona con otras configuraciones de la trayectoria didáctica de la que forma parte.

Así una trayectoria didáctica será el recorrido entre una configuración didáctica inicial y una final. Para exponer de manera más sencilla una trayectoria didáctica se descompone en sus seis facetas.

5.5.2. Trayectoria epistémica.

Para hacer un análisis epistémico de un proceso hay que descomponerlo en unidades de análisis para caracterizar los tipos de actividades matemáticas que se implementan.

Hay seis categorías de entidades primarias que constituyen los sistemas de prácticas:

- Lenguaje: esta unidad aborda los elementos referentes al lenguaje como notaciones, representaciones gráficas, etc., …
- Situaciones: se define una situación o problema con el que trabajar.
- Acciones: se desarrollan los distintos tipos de acciones que permiten resolver un problema.
- Conceptos: aquí se analizan las definiciones y significados de los objetos que utilizamos.
- Proposiciones: en esta unidad se analizan las propiedades de los objetos expuestos anteriormente.

- Argumentos: en esta unidad se demuestran o argumentan las definiciones y propiedades expuestas con anterioridad.

Se define la trayectoria epistémica como la distribución en el tiempo de estos seis componentes. Como indican Godino et al. (2006)

> el análisis de la trayectoria epistémica de un proceso instruccional permitirá caracterizar el significado institucional efectivamente implementado y su complejidad onto-semiótica. Para analizarla, su desarrollo o crónica será dividido en unidades de análisis de acuerdo a las distintas situaciones-problemas (o tareas) que se van proponiendo. Llamaremos configuración epistémica al sistema de objetos y funciones semióticas que se establecen entre ellos relativos a la resolución de una situación-problema (p. 9).

Por tanto, se entiende el análisis de la trayectoria epistémica siempre dentro de un problema, el cual se subdivide en pequeñas tareas que facilitarán el análisis de la trayectoria, siendo la configuración epistémica la relación *onto-semiótica* que se da entre las tareas.

5.5.3. Trayectoria cognitiva.

Como se indicaba en el apartado 5.4, los conocimientos del alumno se denominan en el EOS con el nombre de significado personal y estos “son concebidos, al igual que los significados institucionales, como los "sistemas de prácticas operativas y discursivas" que son capaces de realizar los estudiantes a propósito de un cierto tipo de problemas.” (Godino et al., 2006, p.18) Estos significados personales van formándose y evolucionando, es decir, construyéndose durante todo el proceso, así se puede definir la trayectoria cognitiva como de construcción en el tiempo de esos significados personales, partiendo del significado personal que el alumno tenía antes de comenzar el aprendizaje. Es muy difícil caracterizar esta trayectoria, ya que depende de cada persona, sería necesario hacer una evaluación inicial y seguir todo el proceso a través de pequeños tests, entrevistas o análisis sistemáticos, ya que normalmente lo que se puede observar es la participación del alumno y esto no da suficiente información.

5.5.4. Trayectoria mediacional.

Pero un proceso de estudio no está solamente integrado por el contenido matemático y los estudiantes. También, durante el proceso de enseñanza – aprendizaje se utilizan diferentes recursos y medios que deben de servir para ayudar en la consecución del aprendizaje, tradicionales como la pizarra o los libros de texto, y más innovadores como el uso de ordenadores, calculadoras, pizarras digitales interactivas (PDI), etc., … el uso de herramientas TIC permite centrarse, a menudo, más en la modelización que en el cálculo mediante algoritmos, de esta manera se fomentan los contenidos procedimentales, ya que a los contenidos hay que darle el triple enfoque de conceptuales, procedimentales y actitudinales, de esta manera se da más peso al segundo enfoque, pero sin perder nunca de vista el primer aspecto, que es el conceptual.

5.5.5. Trayectoria docente.

En una unidad didáctica una de las tareas del profesor es secuenciar las actividades, a esta secuencia se le llama trayectoria docente (Godino et al., 2006). Al igual que el resto de trayectorias, cuando se centra en una situación – problema se le llamará configuración docente que está asociada a la configuración epistémica, además se pueden categorizar las acciones del profesor. Se definen las seis funciones docentes siguientes:

- Planificación: es la función más importante, es en la que se seleccionan los contenidos en función de los objetivos, hoy día el estado fija los objetivos y contenidos a través de Real decreto y la Junta de Andalucía a través de un decreto y una orden. Deben responder a la construcción del significado que se pretende y a la trayectoria epistémica que se realiza.
- Motivación: otra de las funciones del profesor es la de crear buen clima en el aula y la de estimular a los alumnos con el objetivo de implicarlos al máximo en el proceso de instrucción.
- Asignación de tareas: la temporización, adaptación y distribución de tareas es otra de las funciones docentes, a través de esta también se puede conseguir realizar la anterior, ya que una elección y distribución adecuada de tareas puede conseguir motivar al alumno.
- Regulación: consiste en utilizar los conocimientos previos del alumno para readaptar en función de ellos la planificación, también incluye la fijación de reglas.
- Evaluación: consiste en observar y valorar el aprendizaje del alumno, la evaluación debe ser continua, formativa y criterial, esto quiere decir que debe realizarse no sólo al final del proceso sino al principio y durante este, al decir que debe ser formativa queremos decir que debe adaptarse la planificación para resolver las lagunas que detectemos mediante la evaluación, y por criterial se entiende que debe de hacerse en base a unos criterios objetivos. En la última modificación legislativa además se incluye

la figura de estándar evaluable de aprendizaje, por tanto, el objetivo es que todos los alumnos alcancen un mismo nivel y que ese sea el punto de partida de la evaluación.

- Investigación: el profesor debe incitar al alumno a la investigación y él mismo debe reflexionar sobre el proceso para introducir mejoras en la planificación a través de su experiencia en el tema concreto.

5.5.6. Trayectoria discente.

Al igual que la trayectoria docente se define como las tareas del profesor en relación con una configuración epistémica, se hará lo mismo con la configuración discente, pero respecto al alumno, se definirá la configuración discente como el sistema de funciones y acciones que realizan los alumnos con respecto a una configuración epistémica (Godino et al., 2006).

Al igual que en casos anteriores, para analizar la trayectoria discente, ésta se puede dividir en sub-tareas para hacerlo más fácil:

- Aceptación: el alumno debe querer aprender tomando una actitud positiva hacia el aprendizaje y de cooperación con los compañeros.
- Exploración: los alumnos deben de investigar y tratar de responder por ellos mismos los problemas planteados.
- Recuerdo: también deben recordar las reglas ya aprendidas y recordar los significados y aprendidos.

- Formulación**:** los alumnos deben plantear la solución a los problemas y tareas planteadas por el profesor, ya sea a toda la clase o en un grupo de compañeros.
- Argumentación: el alumno debe de fundamentar sus soluciones y opiniones.
- Recepción: y también debe ser receptivo a toda la información.
- Demanda: los alumnos deben preguntar todas las dudas que tengan, ya sea al profesor o a otros compañeros.
- Ejercitación: deben de practicar para conseguir resolver con facilidad los problemas propuestos.
- Evaluación: el alumno debe resolver las pruebas de evaluación propuestas por el profesor, pero también debe ser crítico y ser capaz de autoevaluarse.

La trayectoria discente, pues, es la distribución de estas tareas realizadas por los alumnos (Godino et al., 2006).

5.5.7. Trayectoria emocional.

Los alumnos son personas que tienen emociones, por tanto, esta trayectoria es fundamental, un proceso de instrucción es una tarea que dura en el tiempo durante el cual se pueden dar diferentes estados de ánimo y emocionales (interés, compromiso, autoestima, etc…), a la evolución de estas emociones se le conoce como trayectoria emocional (Godino et al., 2006). Es una trayectoria difícil de controlar ya que con la observación es muy difícil evaluar las emociones, sólo se puede intuir el interés en función de la marcha de la clase.

Es importante tener en cuenta especialmente esta trayectoria en caso de que en el aula haya presencia de alumnos ANEAE (alumnado con necesidades específicas de apoyo educativo) como discapacitados, inmigrantes, etc., … entonces esta trayectoria resultará determinante para la correcta integración de este alumnado.

5.5.8. Interacciones didácticas.

Para analizar las interacciones didácticas, previamente se deben trazar las trayectorias didácticas empíricas del proceso de instrucción, de esta manera se puede definir el patrón de interacción didáctica como “cualquier regularidad que pueda identificarse en las trayectorias didácticas y las configuraciones que las componen” (Godino et al., 2006, p.27) De esta manera las interacciones se pueden dar tanto dentro de la configuración didáctica, como de las trayectorias, en realidad todas las configuraciones y subtrayectorias interaccionan, es decir, a una configuración epistémica le corresponde una configuración docente y discente, que interaccionan entre ellas, de manera que a una tarea le corresponde una tarea del profesor y una tarea del alumno, de igual forma le corresponden unos medios para conseguir una buena trayectoria cognitiva y todo ellos no se puede realizar sin una implicación del alumno en su propio proceso de instrucción.

5.6. Dimensión normativa

En el apartado anterior se ha explicado que hay unas tareas realizadas por el docente y otras por el alumno, pero que en muchas de ellas ambos trabajan juntos, es decir, existe una relación entre ambos y como cualquier relación está marcada por unas normas de convivencia, pero que en el aula de matemáticas serán más extensas que unas normas sociales habituales, ya que tanto el profesor como el alumno adquieren unos derechos y obligaciones por el marco en el que se hallan.

La dimensión normativa en el EOS viene a ampliar el concepto de contrato didáctico que la escuela francesa de la mano de Chevallard, Brousseau y otros autores introducía en las décadas de los 80 y 90. En este apartado se contemplan las diferentes definiciones de contrato didáctico y las ampliaciones que se introducen desde el EOS.

Godino et al. (2009) plantean tres supuestos de partida para analizar la dimensión normativa de los procesos de estudio de las matemáticas en Didáctica de la Matemáticas:

- Para comprender un proceso de instrucción es necesario comprender las reglas implícitas y explícitas del proceso enseñanza – aprendizaje.
- El objetivo de la dimensión normativa debe ser también mejorar los procesos para ello se deben fijar también unos criterios de *idoneidad didáctica.*
- Un criterio de *idoneidad didáctica* es una regla de corrección que indica como debe ser un proceso de instrucción, que deben ser consensuadas por la comunidad científica.

Será de interés en este apartado, tras analizar qué y cómo se va a enseñar (objetos, significados, sistemas de prácticas, configuraciones y trayectorias didácticas) saber que normas regulan el proceso de instrucción, aunque antes de entrar en materia se presenta una pequeña revisión de los antecedentes de la dimensión normativa.

5.6.1. El contrato didáctico en las teorías anteriores al EOS.

Un contrato no es más que un acuerdo entre partes con un determinado fin, normalmente tiene una finalidad jurídica (contrato de trabajo, de compra – venta, …) pero por ejemplo Jean-Jacques Rousseau escribió su obra, El contrato social, en el que hablaba de un contrato real o hipotético entre el estado y sus miembros. Pero no sólo eso, también puede ser un contrato entre personas de una sociedad concreta, se pueden encontrar otros tipos de contrato según donde se desarrollen, puede ser educativo, institucional, pedagógico o didáctico. El contrato que se da en una clase de Matemáticas no se corresponde únicamente a la didáctica, sino a los cuatro tipos que se acaban de nombrar (Godino, Font, Wilhelmi y De Castro, 2009).

Para comenzar, se analiza el contrato didáctico en la Teoría de Situaciones Didácticas. El concepto fue introducido por Guy Brousseau en sus primeros trabajos, rápidamente se vio la utilidad y la importancia del contrato didáctico que establece unas normas para la relación entre el alumno, el saber matemático y la situación didáctica. Cuatro años después, en 1984, cambia radicalmente la concepción del contrato didáctico olvidando los calificativos anteriores (bueno, malo, mejor, peor, etc…) convirtiéndolo casi en un proceso modificable en el tiempo (Brousseau, 1986).

El contrato que presenta Brousseau está basado en un aprendizaje de tipo constructivista de las matemáticas ya que afirma que este aprende de sus experiencias, en sus propias palabras “el conocimiento existe y tiene sentido para el sujeto cognoscente sólo porque representa una solución óptima en un sistema de restricciones.” (Brousseau, 1986, p.368). Esto funciona porque existe una adaptación de la matemática científica a la escolar, el profesor debe coger todo lo que sabe y plantear un *buen problema* que permita al alumno aprender de forma constructiva.

En el contrato de Brousseau se proponen dos tipos de situaciones: adidácticas, que es el planteamiento del problema y el conseguir que el alumno lo asuma como propio; y más tarde la didáctica, que consiste en las instrucciones que se dan (o no se dan) y que fomentan el conocimiento.

Como se ha indicado anteriormente el contrato es algo vivo y cambiante, esto sucede porque durante el aprendizaje surgen diversos fenómenos que desvirtúan o empeoran el aprendizaje, entre ellos tenemos:

- Efecto Topaze: el ejemplo que se pone clásicamente para ilustrar este efecto es el del profesor que realiza un dictado con sus alumnos y observando que cometen muchos errores y no pudiendo darles la respuesta sobre pronuncia las uves, las bes y remarca las tildes, es decir, baja el listón, el problema que ocurre aquí es que el conocimiento pretendido desaparece con lo cual la actividad carece de sentido.
- Efecto Jourdain: ocurre cuando se priman los resultados como comprobantes del conocimiento, aunque no exista dicho conocimiento, esto ocurre cuando se le da a los alumnos un conjunto de cromos y se le proponen algunas actividades con ellos y en medio de esto el profesor dice al alumno “acabas de descubrir un grupo de Klein” cuando este conocimiento no existe en el alumno.

- Fenómeno del deslizamiento metacognitivo: consiste en centrar el objeto de estudio en la forma de solucionar un problema en lugar de las matemáticas en sí.
- Fenómeno de abuso de la analogía: ocurre cuando el profesor plantea problemas análogos y los alumnos trasladan la respuesta sin comprender por qué.
- Fenómeno del envejecimiento de las situaciones de enseñanza: se produce al realizar siempre las mismas acciones educativas, el problema es que esto acaba por aburrir a los alumnos sin embargo las modificaciones se deben hacer con mucho cuidado, ya que puede ocurrir que no se produzca un buen aprendizaje.
- Algoritmización: con este fenómeno lo que ocurre es que el profesor, para agilizar la enseñanza, muestra un algoritmo que el alumno repite sin pensar en lugar de hacer que el alumno busque por su cuenta la solución. El problema surge cuando luego el profesor espera creatividad por parte del alumno y éste a su vez al resolver un problema espera un algoritmo, dando lugar a confusión.

Otro tipo de contrato social – didáctico que se va a analizar en la misma línea es el propuesto por Chevallard. En sus obras habla de contrato pedagógico y de contrato didáctico. En primer lugar, define de la siguiente manera el contrato pedagógico

> el contrato pedagógico gobierna entonces los aspectos generales que afectan al entorno del estudio, es decir, los aspectos no específicos de la obra a estudiar. El contrato

> pedagógico se parece al sistema operativo de un ordenador – que sería la escuela –, en el sentido de que posibilita el funcionamiento de distintos programas – los contratos didácticos – que permiten realizar tareas específicas de estudio. Así, por ejemplo, el contrato pedagógico exige del alumno una confianza general en el profesor, en las decisiones que éste toma, y un respeto a su autoridad. Al mismo tiempo, también exige al profesor una atención y una responsabilidad especiales hacia los alumnos y sus condiciones de trabajo. (Chevallard et al., 1997, p.205).

Mientras que da la siguiente definición para el concepto de contrato didáctico

> así, en el ámbito escolar, son muy importantes las normas que tácitamente, sin un acuerdo expreso, rigen en cada momento las obligaciones recíprocas de los alumnos y el profesor respecto al proyecto de estudios que tienen en común. Se trata de un conjunto de **cláusulas que evolucionan a medida que el proceso didáctico avanza** y que constituyen una especie de "contrato" denominado contrato didáctico.(Chevallard et al., 1997, p.62). (Las negritas son del autor de la tesis).

Por tanto, como se puede observar, ambas concepciones de contrato didáctico son muy parecidas y evolucionan con el tiempo.

5.6.2. Normas matemáticas, sociomatemáticas y sociales.

En un aula normalmente se pueden encontrar los siguientes tres tipos de normas que rigen las relaciones entre profesores y alumnos, las normas matemáticas, sociomatemáticas y las normas sociales, y que, generalmente, son no explícitas.

Se pueden citar algunas normas sociales, por ejemplo, deben colaborar unos con otros, asumir responsabilidades al trabajar en equipo, etc., … Pero también se tienen unas normas matemáticas, por ejemplo, comprender cuando una demostración es elegante o inteligente o cuando la solución de un problema es eficiente o imaginativa, sin embargo aunque estas normas pertenecen al ámbito matemático se consideran sociomatemáticas y no sólo matemáticas porque la norma se desarrolla en un contexto social ya que como Godino et al. (2009) indican "un procedimiento no puede ser valorado como «elegante» en sí mismo, sino con relación a unas prácticas operativas y discursivas en el seno de una comunidad o contexto social que sirven de referencia." (p. 62).

Como se observa, las normas sociales y las sociomatemáticas se diferencian en que las segundas son específicas de la actividad matemática en el aula (u otro contexto social), Godino et al. (2009) basándose en Yackel y Cobb lo proponen de la siguiente manera,

> existen unas normas sociales que rigen una discusión y un intercambio de argumentos independientemente de lo que se está diciendo (una norma social, por ejemplo, es la necesidad de presentar argumentos diferentes de los que se han presentado hasta ese momento), junto con el reconocimiento de lo que es matemáticamente aceptable, teniendo en cuenta sobre lo que se está hablando (una norma sociomatemática, por ejemplo, es la necesidad de argumentar mediante objetos matemáticamente diferentes). Metodológicamente, tanto las normas sociales generales como las normas sociomatemáticas se infieren al identificar regularidades en los patrones de interacción social. (p. 63)

5.6.3. Normas y metanormas.

Hasta ahora se han expuesto las normas y al contrato didáctico anteriores al EOS, pero como señalan D'Amore et al. (2007)

> para la Teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1997) el único medio de "hacer" matemáticas es buscar y resolver ciertos problemas específicos y, a este respecto, plantear nuevas cuestiones. «El profesor debe por tanto efectuar no la comunicación de un conocimiento, sino la devolución de un buen problema. Si esta devolución se lleva a cabo, el alumno entra en el juego y si acaba por ganar, el aprendizaje se ha realizado» (Brousseau, 1986b, p. 51). De esta manera sintética se describe la parte esencial del "contrato didáctico", las reglas que deberían seguirse en el diseño e implementación de procesos de estudio de las matemáticas para lograr un verdadero aprendizaje. La principal tarea del profesor será seleccionar "buenas situaciones – problemas" que den sentido al saber matemático pretendido, procurar su "devolución" a los estudiantes creando las condiciones para que éstos se involucren en una verdadera actividad matemática de resolución, comunicación y validación de las soluciones. (p. 54)

Pero en las aulas cada día es más posible encontrar alumnos que no quieran o que eviten resolver los problemas, ¿qué pasa pues en esta situación? ¿dónde queda el contrato? Esto se soluciona a través de las metanormas, que son normas que hacen alusión a las normas, por ejemplo, cuando se dice que hay una norma que es respetar las normas (D'Amore et al., 2007)

Las metanormas pueden ser de varios tipos, así se introducen varias facetas de la dimensión normativa, y se pueden encontrar normas metaepistémicas, metainstruccionales y metacognitivas, en la figura 46 se puede ver un resumen de estas metanormas.

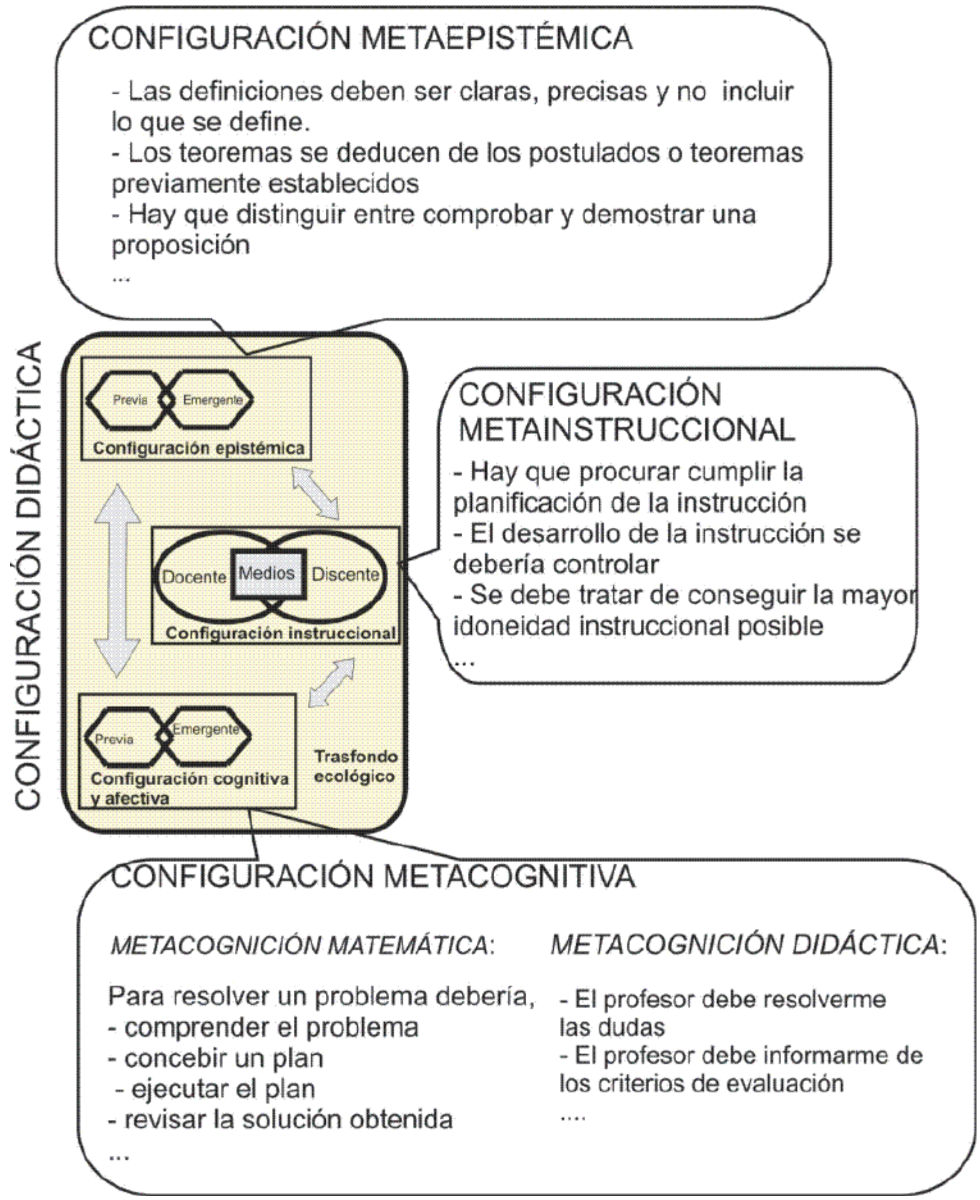


Figura 46. Componentes de la dimensión metanormativa. (D'Amore et al., 2007, p.62)

5.6.4. Facetas de la dimensión normativa de los procesos de estudio matemático.

Las normas se pueden clasificar según su origen, el tipo, las facetas o el momento, como se observa en la figura 47, aunque para el análisis se va a poner el foco en las facetas.

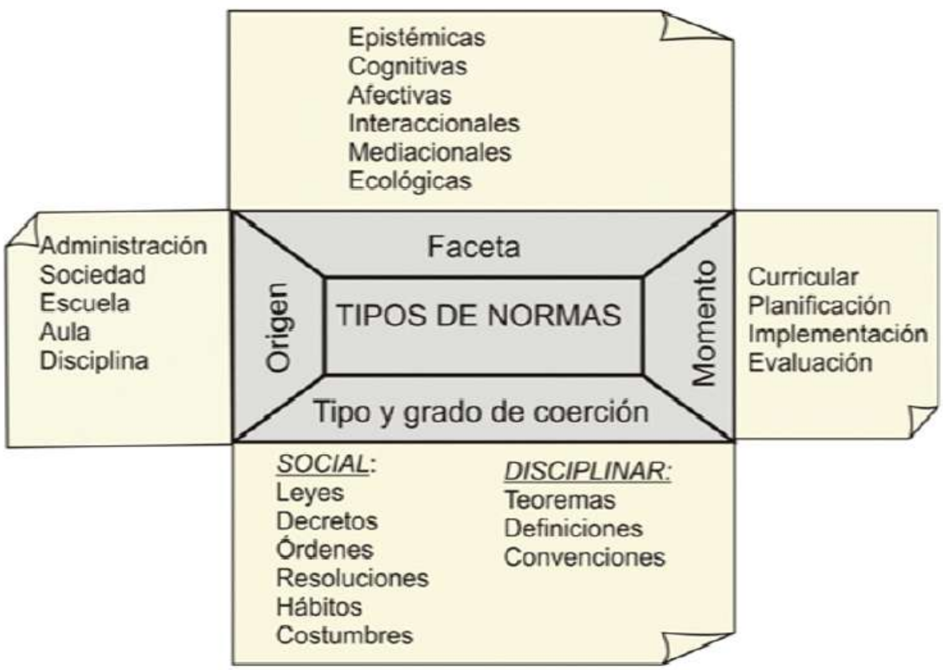


Figura 47. Dimensión normativa y tipos de normas. (D'Amore et al., 2007, p.59)

Este es el cuarto paso del análisis, que depende de los anteriores y que va a condicionar el último, que es la idoneidad didáctica, lo que se estudia en este paso son las normas que hacen posible el proceso de enseñanza – aprendizaje.

Para Godino en

> el EOS resulta especialmente relevante la adaptación sociológica de la noción de «juego de lenguaje» (Wittgenstein, 1953) desarrollada, entre otros, por Apel (1985) y Habermas (1987), en la cual la comprensión individual es el resultado de la participación en un juego de lenguaje cuyas reglas son públicas. «Comprender» consiste en «saber orientarse» mediante el reconocimiento de las reglas correspondientes. De acuerdo con este punto de vista, consideramos que no es posible analizar un proceso de instrucción sin comprender el sistema de normas que lo regulan. (Godino et al., 2009, p.64)

Por tanto, conceptos descritos previamente como el *contrato didáctico* o las *normas sociales y sociomatemáticas* son las normas del juego, pero no el objeto de estudio ya que para ello necesitan una reconstrucción dentro del marco teórico que incluya la descripción de los procesos de estudio de manera que sean un todo como dimensión normativa.

Dentro del EOS se plantean las siguientes facetas:

- Epistémica: Godino et al. (2009) la describen como un conjunto de normas donde se regulan los contenidos, situaciones, etc., … de una institución, "dicho en la terminología del EOS, las normas epistémicas determinan las configuraciones epistémicas y las prácticas matemáticas que dichas configuraciones posibilitan" (Godino et al., 2009, p.64). Es decir, las normas epistémicas son parte de la configuración epistémica que regula la práctica en una institución. En el aula, serán los conocimientos que les permitan saber qué es un problema, si un problema está acabado o no, o cuando una demostración es válida, las normas epistémicas nos indican como dicen Godino et al. (2009), qué matemáticas deben aprender.

- Cognitiva: En esta faceta se plantean las normas que indican como aprenden los alumnos y como se les debe enseñar.
- Mediacional: Otro elemento importante a analizar son los medios, ya sean técnicos o temporales. Estos medios deben ser adecuados y el uso de ellos estar sujetos a unas reglas que el profesor debe conocer. El tiempo está prácticamente regulado en su totalidad por la legislación, con lo cual, aunque su gestión es complicada es totalmente responsabilidad del profesor. El uso de algunos elementos como la calculadora o el uso de dedos para el conteo, no está bien visto socialmente, por tanto, esto condiciona el proceso de estudio. También son medios los distintos espacios del centro, como el patio donde se pueden desarrollar ciertos conceptos métricos o geométricos y que de no permitirse puede limitar el aprendizaje o el propio libro de texto.
- Interaccional: Estas normas rigen las relaciones entre el profesor y los alumnos. Las interacciones en el aula muchas veces nacen de interacciones exteriores, como con los padres, los compañeros o profesores anteriores. Las interacciones más idóneas en este campo son las de tipo dialógico y de trabajo grupal. Aun así, las relaciones en el aula también están marcadas por el *paradigma educativo* que se utilice, así no serán iguales las interacciones en una enseñanza constructiva que en una expositiva.

- Afectiva: En la enseñanza también es importante la carga emocional, tanto así como la motivación. Así, en esta faceta se pueden establecer algunas normas muy genéricas, como la responsabilidad del profesor de motivar a los alumnos o crear un clima de confianza en el aula. La motivación parece estar vinculada a los tipos de problemas que se plantean, que deben ser interesantes para los alumnos y pertenecer a su campo de intereses a corto y medio plazo, como indican Godino et al. (2009). Otra regla que se debe seguir por parte de los alumnos es aceptar la responsabilidad de resolver los problemas, Godino et al. (2009) señalan apoyándose en algunos autores el problema existente con esta norma ya que los alumnos al no sentirse participes del proceso de construcción y comunicación de significados no se sienten responsables de sus propias respuestas "por lo tanto, en el mejor de los casos, una vez producida una respuesta, se desvinculan de ella esperando el mensaje de éxito o de fracaso del profesor" (Godino et al., 2009, p.68). Como se observa esta faceta es la más difícil de controlar debido al alto número de factores que intervienen. Pero como conclusión, Godino et al. (2009) plantean que no se debe sobreproteger a los alumnos, sino que se les debe exigir su responsabilidad y compromiso con el proceso de enseñanza – aprendizaje.
- Ecológica: Esta faceta hace alusión a las relaciones con el entorno y a la formación en valores del alumnado. En matemáticas las normas ecológicas

están relacionadas con la formación socioprofesional. Existen programas específicos como el de *Educación Matemática Crítica* que estudian la relación entre la Educación Matemática y la democracia utilizando las matemáticas como herramienta crítica para analizar la sociedad (Godino et al., 2009), otra área que entra en la faceta ecológica y que se analiza en el informe PISA es la competencia de los alumnos para aplicar las matemáticas a situaciones de la vida diaria.

5.6.5. Valoración de las normas.

Hasta ahora se ha analizado la dimensión normativa en sus múltiples facetas, ahora bien, las normas son fundamentales porque rigen los procesos de enseñanza ya que hacen que se regule de cierta manera, pero estas normas no son rígidas, será necesario un paso más en el análisis didáctico que se estudiará en el próximo paso, la idoneidad didáctica, este juicio se puede aplicar también sobre las normas y si no son lo adecuadas se puede proponer un cambio, las nuevas reglas deben emerger a través de tareas que se pueden proponer tras analizar la idoneidad de las reglas de cada faceta.

5.7. Idoneidad didáctica

Lo primero que se debe plantear es para qué sirve el análisis didáctico. A la pregunta de para qué se analiza, o se reflexiona, la respuesta es "para mejorar el proceso de instrucción" eso quiere decir que este paso del análisis toma como referencia los cuatro anteriores para identificar los potenciales de mejora, se pueden identificar al menos seis criterios para valorar la idoneidad didáctica: epistémico, cognitivo, interaccional, mediacional, emocional y ecológico. (Godino et al., 2006)En la figura 48 se pueden ver las relaciones de estos seis criterios.

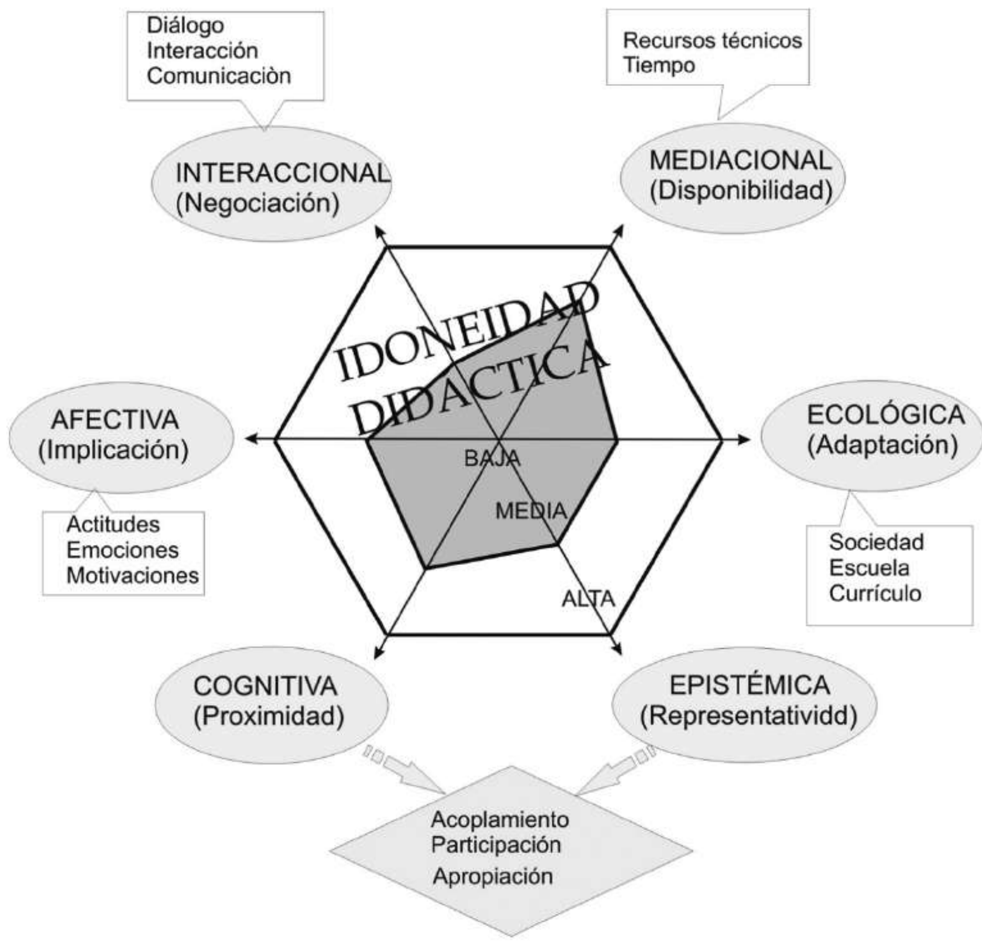


Figura 48. Componentes de la idoneidad didáctica. (Godino, Batanero, y Font, 2012)

5.7.1. Idoneidad epistémica.

En este punto se analiza si las matemáticas que se enseñan son una matemática adecuadas, es decir, se analiza el “grado de representatividad de los significados institucionales implementados (o previstos), respecto de un significado de referencia." (Godino et al., 2006, p.225).

Como se observa en la definición, para analizar la idoneidad epistémica se necesita previamente definir un significado de referencia que se analiza dentro de unas situaciones – problema que deben, por un lado, ser representativas de las incluidas en el significado de referencia, y por otro debe permitir contextualizar los conocimientos que se pretenden enseñar, de manera que se puedan ejercitar y aplicar a otros problemas relacionados. De hecho, una alta idoneidad epistémica estará relacionada con la capacidad de poder generar problemas, de manera que los alumnos puedan hacerse a sí mismos cuestiones y plantear problemas relacionados, es decir, de asumir los problemas como propios.

El lenguaje debe ser acorde al que se emplee en el significado de referencia y se intentará que los alumnos se expresen y comuniquen a través de él, de la misma manera las definiciones, proposiciones y procedimientos deben ser representativos de los identificados en el significado de referencia. Con referencia al proceso se debe tener en cuenta que incluye momentos de generación y negociación de normas que se adapten mejor a las circunstancias, estas normas deben ser explicadas y argumentadas.

Para dar un juicio positivo en la idoneidad epistémica se deben tener en cuenta las relaciones e interacciones entre todos los elementos citados. En la tabla 7 se detallan los descriptores de esta idoneidad.

Tabla 7. Descriptores de la idoneidad didáctica.(Godino, 2013, p.119)

Componentes	Descriptores
Situaciones-problema.	Selección de una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. Propuesta de situaciones de generación de problemas (problematización)
Lenguaje	Uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico y conversiones entre los mismos) Nivel de lenguaje adecuado a quienes se dirige. Propuesta de situaciones de expresión e interpretación.
Elementos regulativos.	Definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados adaptados al nivel educativo al que se dirigen. Presentación de los enunciados y procedimientos fundamentales del tema según el significado de referencia y el nivel educativo. Propuesta de situaciones para la generación y negociación de las reglas.
Argumentos.	Adecuación de las explicaciones, demostraciones y comprobaciones al nivel educativo al que se dirigen. Se promueve la validación.
Relaciones.	Relación y articulación significativa entre los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan.

5.7.2. Idoneidad cognitiva.

Ahora se analiza si lo que se pretende enseñar está al nivel de los alumnos, y una vez terminado el proceso, si lo que alumnos han aprendido es lo que se pretendía que aprendiesen, es decir, si el significado personal del alumno es similar al institucional. Como ya se indicaba previamente, los significados personales van evolucionando con el tiempo, se van *construyendo*, partiendo de un significado inicial alcanzando, a través del proceso de instrucción, un significado final (que puede ser logrado o aprendido).

Una configuración didáctica es cognitivamente idónea cuando lo que se enseña está dentro de la zona de desarrollo potencial como la definía Vygotski, es decir, el significado institucional debe ser abordable teniendo en cuenta el significado personal inicial de los alumnos y además el significado personal logrado concuerda con el significado planificado e implementado. La única manera de conseguir evaluar esto es hacer un seguimiento cercano del alumno, aun así, habrá puntos como la evaluación del significado personal adquirido por el alumno que tendrá especial dificultad, al ser muy difícil de evaluar para todos los alumnos.

Para determinar la idoneidad se necesita una evaluación inicial de los significados personales, la existencia de adaptaciones curriculares para que el proceso se adapte a todos los alumnos y que el significado personal conseguido esté lo más próximo posible al institucional implementado, de esta manera se presentan en la tabla 8 los siguientes descriptores para analizar esta idoneidad.

Tabla 8. Descriptores de la idoneidad cognitiva. (Godino, 2013, p.121)

Componentes	Descriptores
Conocimientos previos (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica)	Los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se ha estudiado anteriormente o el profesor ha planificado su estudio). Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes
Adaptaciones curriculares a las diferencias individuales.	Se incluyen actividades de ampliación y refuerzo. Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes
Aprendizaje. (Se tienen en cuenta los mismos elementos que para la idoneidad epistémica: situaciones, lenguajes, conceptos, procedimientos, pro- posiciones, argumentos y relaciones entre los mismos)	Los diversos modos de evaluación indican que los alumnos logran la apropiación de los conocimientos pretendidos (incluyendo comprensión y competencia): Comprensión conceptual y proposicional; competencia comunicativa y argumentativa; fluencia procedimental; comprensión situacional; competencia metacognitiva. La evaluación tiene en cuenta distintos niveles de comprensión y competencia. Los resultados de las evaluaciones se difunden y usan para tomar decisiones.

5.7.3. Idoneidad interaccional.

En este paso se valora si mediante la interacción del profesor con los alumnos o entre ellos se ha conseguido que se resuelvan todas las dudas que han planteado.

Se podrá determinar una alta idoneidad interaccional cuando "posibilitan que el profesor y los alumnos identifiquen conflictos semióticos potenciales (a priori), efectivos (durante el proceso de instrucción) y residuales (a posteriori) y resolver dichos conflictos mediante la negociación de significados" (Godino et al., 2006, p.238). Por tanto, un proceso de instrucción en el que se dialogue, se trabaje en equipo y en el que se potencie la colaboración es más posible que sea idóneo interaccionalmente hablando que uno en el que las clases sean magistrales y los alumnos trabajen en su casa individualmente, en el primer caso, el profesor puede, además, obtener indicadores de la relación de los alumnos con los objetos matemáticos y evaluar como modificar su dinámica. En la tabla 9 se indican los descriptores para evaluar esta idoneidad.

Tabla 9. Descriptores de la idoneidad interaccional. (Godino, 2013, p.123)

Componentes	Descriptores
Interacción docente – discente.	El profesor hace una presentación adecuada del tema (presentación clara y bien clara, no habla demasiado rápido, enfatiza los conceptos claves del tema, etc., …) Se reconocen y resuelven los conflictos de significado de los alumnos (se interpretan correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas, se hace un juego de preguntas y respuestas adecuado, etc.) Se busca llegar a consensos con base al mejor argumento. Se usan diversos recursos retóricos y argumentativos para implicar y captar la atención de los alumnos. Se facilita la inclusión de los alumnos en la dinámica de la clase y no la exclusión.
Interacción entre alumnos.	Se favorece el diálogo y comunicación entre los estudiantes. Tratan de convencerse a sí mismos y a los demás de la validez de sus afirmaciones, conjeturas y respuestas, apoyándose en argumentos

	matemáticos
	Se favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía.	Se contemplan momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantean cuestiones y presentan soluciones; exploran ejemplos y contra- ejemplos para investigar y conjeturar; usan una variedad de herramientas para razonar, hacer conexiones, resolver problemas y comunicarlos)
Evaluación formativa.	Observación sistemática del progreso cognitivo de los alumnos.

5.7.4. Idoneidad mediacional.

Ahora se va a evaluar la adecuación de los recursos, ya sean materiales o temporales en el proceso de instrucción.

Dependiendo de qué medios se disponga se podrá establecer una idoneidad alta para ciertos elementos, así pues, si se dispone de un aula de informática con el programa Derive instalado para aprender a derivar, será más altamente idóneo que uno en el que no se usen estos materiales, sin embargo, desde el punto de vista temporal, una clase magistral es altamente idónea, ya que en otros tipos de clases se pierde más el tiempo debido a la interacción que en este tipo de clases. Así se puede decir que los recursos materiales que mejor adaptados estén a los significados pretendidos, por ejemplo, recursos manipulativos o informáticos, son los que se deben priorizar frente a elementos clásicos. En cuanto al desarrollo temporal, hay que analizar dos aspectos, el desarrollo temporal en clase (presencial) y el que alumno emplea fuera del aula (no presencial), ambos deben ser acordes a los objetivos que se pretenden cubrir. En la tabla 10 se muestran los descriptores de esta idoneidad.

Tabla 10. Descriptores de la idoneidad mediacional. (Godino, 2013, p.125)

Componentes	Descriptores
Recursos materiales (manipulativos, calculadoras, ordenadores).	Uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al significado pretendido. Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula.	El número y la distribución de los alumnos permite llevar a cabo la enseñanza pretendida. El horario del curso es apropiado (por ejemplo, no se imparten todas las sesiones a última hora). El aula y la distribución de los alumnos es adecuada para el desarrollo del proceso instruccional pretendido.
Tiempo (De enseñanza colectiva / tutorización; tiempo de aprendizaje).	El tiempo (presencial y no presencial) es suficiente para la enseñanza pretendida Se dedica suficiente tiempo a los contenidos más importantes del tema Se dedica tiempo suficiente a los contenidos que presentan más dificultad de comprensión

5.7.5. Idoneidad afectiva.

Mediante este punto se evalúa la implicación de los alumnos en el proceso de instrucción, por tanto, un proceso tendrá una idoneidad emocional alta en tanto y en cuanto favorezca la participación y motive al alumno.

De esta manera, será tarea del profesor seleccionar materiales que motiven al alumno y crear un clima de respeto y confianza en el aula.

En la tabla 11 se muestran los descriptores de la idoneidad afectiva.

Tabla 11. Descriptores de la idoneidad afectiva. (Godino, 2013, p.122)

Componentes	Descriptores
Intereses y necesidades.	Las tareas tienen interés para los alumnos Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional
Actitudes.	Se promueve la participación en las actividades, la

	perseverancia, responsabilidad, etc. Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice.
Emociones	Se promueve la autoestima, evitando el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas. Se resaltan las cualidades de estética y precisión de las matemáticas.

5.7.6. Idoneidad ecológica.

A través de este último punto se evalúa la adecuación del proceso al proyecto educativo del centro, a la realidad social del centro, etc., …

También hay que tener en cuenta la relación del proceso y de los objetos implementados con otros contenidos ya sea de la misma asignatura o de otra.

Se tendrá una alta idoneidad ecológica si el significado implementado tiene relación con otros significados matemáticos, con otros significados no matemáticos y tiene utilidad para el alumno.

En la tabla 12 se presentan los descriptores en los que fijarse para evaluar la idoneidad ecológica.

Tabla 12. Descriptores de la idoneidad ecológica. (Godino, 2013, p.126)

Componentes	Descriptores
Adaptación al currículo.	Los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.
Apertura hacia la innovación didáctica.	Innovación basada en la investigación y la práctica reflexiva. Integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo.
Adaptación socio-profesional y cultural.	Los contenidos contribuyen a la formación socio – profesional de los estudiantes.
Educación en valores	Se contempla la formación en valores democráticos y el

	pensamiento crítico
Conexiones intra e interdisciplinares.	Los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares.

5.7.7. Conclusiones.

Al tener unos criterios de idoneidad se pueden comprender mejor los procesos de instrucción, comparar unos procesos con otros, y posibilitan una valoración de cada uno de ellos.

Así pues, se deben entender los criterios de idoneidad, como una posibilidad de corrección del proceso, con unos criterios que provienen del discurso argumentativo de la comunidad científica (Godino et al., 2006) y como objetivo de un buen proceso de instrucción.

Por último, hay que tener en cuenta que no son unos criterios cerrados, sino unas herramientas que mediante la investigación pueden ser mejoradas y adaptadas a los diferentes procesos de instrucción.

5.8. Formación de profesores en el EOS

Hasta ahora se ha presentado una herramienta muy potente para la reflexión sobre la práctica docente, pero no se ha explicado el papel del profesor en este marco teórico, así pues, ahora cabe preguntarse acerca de la formación del profesorado en el EOS.

5.8.1. Competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas.

Dentro del ámbito de la didáctica se emplea con frecuencia el término *competencia* sobre todo en su aspecto curricular, donde se habla de competencias básicas, competencias profesionales, competencias clave y de enseñar por competencias, donde el área de evaluación ya no es la asignatura, sino la competencia en sí. Así se pueden describir las competencias como “la facultad de movilizar un conjunto de recursos cognoscitivos (conocimientos, capacidades, información, etc.) para enfrentarse con pertinencia y eficacia a una familia de situaciones” (Godino y Batanero, 2011, p. 13)

En un profesor la competencia se entenderá como la capacidad para analizar un proceso de enseñanza – aprendizaje como se ha visto en apartados anteriores, sintetizar los aportes de la Didáctica de las Matemáticas y adecuar la planificación, implantación y evaluación de la práctica docente al análisis, además debe tener competencia matemática (es decir, debe conocer su área de enseñanza) y ser capaz de analizar la actividad matemática (resolución de problemas, etc.) con las herramientas que dispone como el análisis didáctico.

Una de las tareas fundamentales del profesor es diseñar problemas en los que intervengan varios aspectos de la competencia matemática (aritmética, geometría, álgebra, análisis, etc.) pero no se debe quedar sólo ahí, también deben cumplir los criterios de idoneidad que se han visto a lo largo del capítulo.

Por tanto, la formación del profesorado debe tener en cuenta también los problemas que desarrollen distintos ámbitos de la competencia matemática, de otras áreas (conocimiento del medio y sociedad) y que promuevan la articulación entre las competencias de tipo matemático y didáctico. (Godino y Batanero, 2011).

En EOS el modelo de formación del profesorado abarca la profundización en la competencia matemática y en desarrollar la reflexión sobre la práctica a través del análisis didáctico, ambas competencias "pueden y deben ser articuladas. Esta articulación la llevamos a cabo apoyados en los presupuestos epistemológicos, cognitivos e instruccionales del marco teórico que denominamos "Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática" (EOS)." (Godino y Batanero, 2011, p. 28).

Esto muestra que, aunque el EOS parece una teoría epistémica a primera vista, también aborda la problemática cognoscitiva de las matemáticas y la formación de profesores, convirtiéndola en una teoría muy completa para explicar la Didáctica de las Matemática.

5.9. Complejidad semiótica y conflictos semióticos

Hay dos nociones que van a ser de especial interés en el estudio de libros de texto, son el de complejidad semiótica y conflicto semiótico.

Godino et al. (2007) definen conflicto semiótico como "cualquier disparidad o diferencia de interpretación entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)" (p.133). Es decir, cuando los significados no están claros se produce diferencia de interpretación de estos y por ello surge un conflicto, que se llama semiótico. En los libros puede ocurrir porque un concepto no esté bien definido o un procedimiento no esté claramente argumentado.

Como dejan entrever algunos trabajos como Batanero, Arteaga, y Ruiz, (2010); Contreras y Ordóñez, (2006) y Arteaga, (2008), la complejidad semiótica está relacionada con la complejidad de las funciones semióticas y con la de las relaciones entre objetos y significados puestos en juego. Godino et al. (2006) relacionan la complejidad con la trayectoria epistémica que se sigue "el análisis de la trayectoria epistémica de un proceso instruccional permitirá caracterizar el significado institucional efectivamente implementado y su complejidad onto-semiótica." (p. 46).

Definir estas cuestiones para que, cuando se utilicen, estén delimitadas es importante, pero también el disponer de una herramienta que permita reconocer los objetos y significados, por ellos se plantea ahora la *Guía de Reconocimiento de Objetos* (GROS)

5.10. Guía de reconocimiento de objetos. GROS

Dentro del EOS existe una herramienta de análisis epistémico y cognitivo que se desarrolla en Godino, Rivas, Castro, y Konic (2012) ampliación de un trabajo anterior de 2008 donde exponen cómo funciona el GROS y que se ha utilizado en otras investigaciones y tesis como Olivo y Alfredo (2013).

Esta herramienta "da cuenta de un proceso complejo y dinámico,- la emergencia de objetos y significados- y que puede ser cumplimentada de varias maneras; lo cual pone de manifiesto la relatividad de los objetos y significados matemáticos" (Castro et al., 2010, p.267).

El GROS provee de una pequeña plantilla, muy útil, donde se incluyen los seis objetos primarios, con los procesos donde intervienen y los conflictos semióticos potenciales, lo que permite realizar un análisis epistémico de forma más ordenada, ayudando a identificar objetos y significados, como se observa en la figura 49.

Objetos[9]:	**Procesos** (significación, generalización, argumentación, ...)
Situaciones - problemas	
Elementos lingüísticos	
Conceptos - definición	
Propiedades	
Procedimientos	
Argumentos	
Conflictos:	

Figura 49. Tabla del GROS. (Godino, Rivas, et al., 2012, p.17)

Mediante esta plantilla se realizará el análisis de los libros de texto en busca de conflictos semióticos.

5.11. Definición del problema

Después de analizar las investigaciones anteriores, se ha descubierto que, aunque existen investigaciones previas sobre medidas de dispersión, no se ha investigado cómo estas se muestran en los libros de texto de secundaria según la LOE en España y que tampoco se ha realizado una investigación sobre la comprensión de los alumnos de las medidas tras la instrucción.

5.11.1. Problema de investigación.

Siguiendo la línea de los antecedentes se va a plantear el problema de investigación de forma interrogativa:

- ¿Están las medidas de dispersión integradas adecuadamente en los libros de texto de la LOE?

- ¿Presentan los libros de texto conflictos semióticos al tratar las medidas de dispersión?
- ¿Transmiten adecuadamente los libros de texto las medidas de dispersión a los estudiantes de 3º de ESO?
- ¿Calculan adecuadamente los estudiantes de 3º de ESO las medidas de dispersión?
- ¿Comprenden los estudiantes de 3º de ESO las propiedades y el uso de las medidas de dispersión?
- ¿Se trabaja la unidad didáctica de estadística en 3º de ESO?

Para tratar de resolver estos problemas se van a plantear los objetivos e hipótesis de trabajo que se explicitan en los siguientes apartados.

5.11.2. Objetivos.

Tras las justificaciones aportadas en los capítulos 3 y 4 sobre la importancia de los libros de texto y la influencia que tienen en la comprensión de las medidas de dispersión por parte de los alumnos, así como de la importancia de las medidas de dispersión en la estadística, que se ha analizado además en los capítulos 1 y 2, se presentan los siguientes objetivos.

O1. Realizar un análisis detallado de la presentación de las medidas de dispersión en los libros de texto de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria, con la finalidad de caracterizar el significado pretendido en las distintas modalidades que se presentan.

Para alcanzar este objetivo se van a definir una serie de sub - objetivos que permitirán alcanzarlo.

O1.1. Realizar un estudio de la microestructura del tratamiento de las medidas de dispersión en los libros de texto.

O1.2. Caracterizar los tipos de situaciones – problema sobre medidas de dispersión presentadas en los libros de secundaria.

O1.3. Caracterizar el lenguaje matemático utilizado en los textos para presentar las medidas de dispersión.

O1.4. Caracterizar los conceptos y propiedades relacionados con las medidas de dispersión en los textos.

O1.5. Caracterizar los procedimientos empleados en el estudio de las medidas de dispersión.

O1.6. Determinar los tipos de argumentación empleados para justificar propiedades, procedimientos o soluciones a los problemas.

O1.7. Identificar los principales conflictos semióticos en el tema.

O2. Realizar un análisis de la macroestructura de los libros de texto, con la finalidad de observar si esta afecta al tratamiento de la estadística en 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria.

O3. Realizar un estudio exploratorio de evaluación de conocimientos matemáticos (comunes y avanzados) en alumnos de 3º de Educación Secundaria Obligatoria, utilizando el instrumento de evaluación construido para tal efecto.

O4. Realizar una encuesta sobre la enseñanza de las unidades didácticas de estadística en 3º de ESO en los centros andaluces.

5.11.3. Hipótesis.

H.1. Al evaluar los textos se espera encontrar una exposición deficiente en diferentes medidas de dispersión.

H.2. Al evaluar los textos se espera encontrar diferentes tipos de conflictos semióticos.

H.3 Al evaluar los textos se espera que el bloque de estadística esté infra representado con respecto al resto.

H.4 Al evaluar los textos se espera que la estadística sea el tema o bloque final.

H.5 Al evaluar los conocimientos de los estudiantes se prevé encontrar algunas dificultades en conceptos estadísticos elementales requeridos para el trabajo con las medidas de dispersión.

H.5.1. Al evaluar los conocimientos de los estudiantes se prevé encontrar que conocen mejor y manipulan con más facilidad las medidas de tendencia central que las de dispersión.

H.5.2. Al evaluar los conocimientos de los estudiantes se prevé encontrar lagunas en algunos tipos de medidas de dispersión.

H.5.3. Al evaluar los conocimientos de los estudiantes se prevé encontrar dificultades de cálculo en la desviación típica.

H.5.4. Al evaluar los conocimientos de los estudiantes se prevé encontrar dificultades de interpretación en la desviación típica.

H.6. En el estudio de la encuesta se espera encontrar que la mayoría de los centros andaluces no trabajan las unidades didácticas del bloque estadístico en 3º de ESO.

Para conseguir los objetivos uno y dos se trabajarán los libros de texto bajo diferentes perspectivas en el capítulo 6. Para conseguir los objetivos tres y cuatro se realizará un cuestionario al alumnado y una encuesta en los centros andaluces, que se desarrollará en el capítulo 7. Una vez cumplidos los objetivos se contrastarán las hipótesis.

De los diversos instrumentos inventados por el hombre, el más asombroso es el libro; todos los demás son extensiones de su cuerpo... Sólo el libro es una extensión de la imaginación y la memoria.

Jorge Luis Borges.

Capítulo 6

La investigación de libros de texto sobre dispersión

6.1. Introducción

"Los libros de texto son el corazón de la escuela ya que cumplen tareas y funciones muy importantes en educación" (Mikk, 2000, p.17). Las diferentes funciones que cumplen los libros de texto son, según Mikk (2000), motivar a los alumnos en el aprendizaje, representar y transformar la información, sistematizar la información y coordinar otros elementos educativos, enseñar estrategias, ayudar a evaluar el aprendizaje de los alumnos, crear una diferenciación en el aprendizaje, facilitar la educación en valores.

En la misma línea, Mikk (2000) indica varios aspectos para evaluar la calidad de un libro de texto, estos aspectos son, el contenido, debe ajustarse al curriculum y al alumnado, la legibilidad, el libro debe ser claro y conciso, ya que un lenguaje de un nivel muy alto o muy complejo puede aturdir al estudiante generando un peor aprendizaje, debe estar bien estructurado, tanto en su macroestructura como en su microestructura, además de utilizar gráficos y mapas mentales para relacionar las ideas, debe contener unos ejercicios y problemas adecuados que ayuden a desarrollar los procedimientos y conceptos aprendidos, y además deben desarrollar el razonamiento, en este caso el razonamiento estadístico. Otras características que indica son que el libro debe ser interesante, contener ilustraciones vistosas que sean adecuadas y para este autor es fundamental que además contengan ejercicios y problemas de auto evaluación.

Estas y otras características se incluyeron más ampliamente y en voz de otros autores en el capítulo 3 de esta tesis. Otro aspecto fundamental que se apuntaba en dicho capítulo es que la educación está muy influenciada por el libro de texto, siendo además un nexo entre el curriculum y los alumnos. Sin embargo, en los libros de texto se muestra las medidas de dispersión de forma que puede generar posibles conflictos semióticos, como se ha mostrado en los trabajos de Estepa y Ortega, (2005a) y Ortega y Estepa (2006)

Además, la comprensión de las medidas de dispersión por parte de los alumnos de secundaria es pobre y deficiente, como se mostraba en el capítulo 4, y como se ha visto en los análisis previos de Ortega y Estepa (2005)

Por tanto, en este capítulo se va a analizar cómo trata una muestra de libros de 3º y 4º de ESO los contenidos sobre medidas de dispersión, realizando 3 análisis distintos, sobre la macroestructura, la microestructura y sobre los contenidos en sí a través del EOS.

6.2. Elección de la muestra

La obtención de la muestra se describe en Del-Pino y Estepa (2015) y en este apartado se ampliará.

Para determinar la muestra se procedió como en Gómez-Torres (2014), es decir, consultando la web http://www.juntadeandalucia.es/educacion/vscripts/libros/ (en dicha web se pueden encontrar las editoriales fijadas por los centros catalogados por provincias, tipo de centro y curso para todas las materias impartidas en el centro) durante los meses de abril a junio de 2014. Por tanto, la estadística de libros obtenidos es para el curso 2013/2014. Para el estudio se tabularon los datos consignados por 210 centros públicos y 109 centros privados o privados-concertados. Como resultado se obtiene la tabla 13.

Tabla 13. Número de centros públicos andaluces que utilizan cada editorial por curso, en centro públicos y privados. (Del-Pino y Estepa, 2015, p.6)

	Curso											
Editorial	1º		2º		3º		4ºA		4ºB		Total	
	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi	CPu	CPi
Anaya	**73**	**28**	**73**	**28**	**76**	**25**	**67**	**18**	**63**	**21**	**352**	**120**
Bruño	22	3	22	3	21	3	9	1	8	1	82	11
Casals	2		3		2		0		0		7	0
Edelvives	4	3	4	3	4	4	1	3	1	4	14	17
Editex	0		0		0		0		1		1	0
Everest	0		1		0		0		0		1	0
Guadiel-Edebé	1	4	2	6	1	4	2	2	2	2	8	18
McGraw Hill	0		0		0		3		3		6	0
Oxford	**19**	**5**	**21**	**4**	**18**	**5**	**19**	**6**	**20**	**6**	**97**	**26**
Santillana	**32**	**11**	**31**	**14**	**33**	**9**	**44**	**4**	**42**	**5**	**182**	**43**
SM	**33**	**39**	**28**	**45**	**33**	**41**	**35**	**31**	**36**	**42**	**165**	**198**
Vicen Vives	1	2	1	1	2	2	1	0	1	0	6	5
Total	187	95	186	104	190	93	181	65	177	81	921	438
No consigna	23	14	24	5	20	16	29	44	33	28		236

CPu = Centro Público; CPi = Centro Privado

Con estos datos se tiene que para los centros públicos andaluces y en los cursos en los que se pretende el estudio, las editoriales más usadas en los centros públicos son Anaya, Santillana, SM y Bruño para 3º de ESO, Anaya, Santillana, SM y Oxford para ambas opciones de 4º de ESO, y en los centros privados las editoriales mayoritarias son

SM y Anaya para todos los cursos. Como la diferencia entre Bruño y Oxford es de tan solo tres centros en 3º de ESO, pero en 4º de ESO esa distancia se amplía a favor de Oxford notablemente, se eligen para analizar los textos de las editoriales Anaya, Santillana, SM y Oxford.

Se puede ver en las figuras 50, 51 y 52 los diagramas de sectores con la información para los centros públicos resumida.

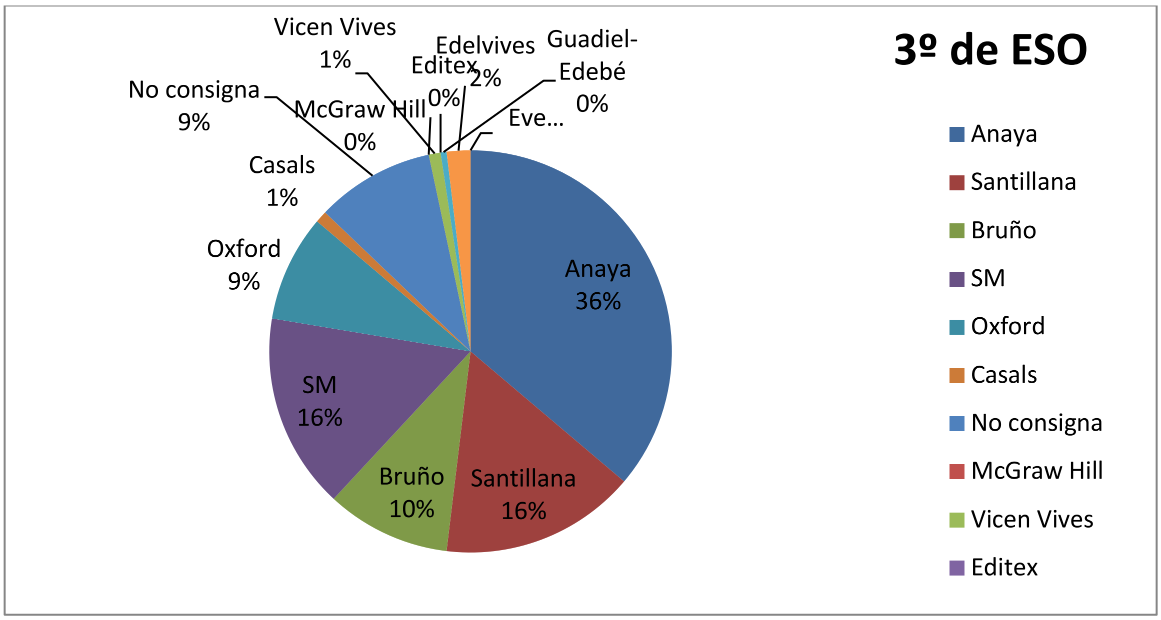


Figura 50. Diagrama de sectores uso de editoriales en 3º de ESO en centro públicos.

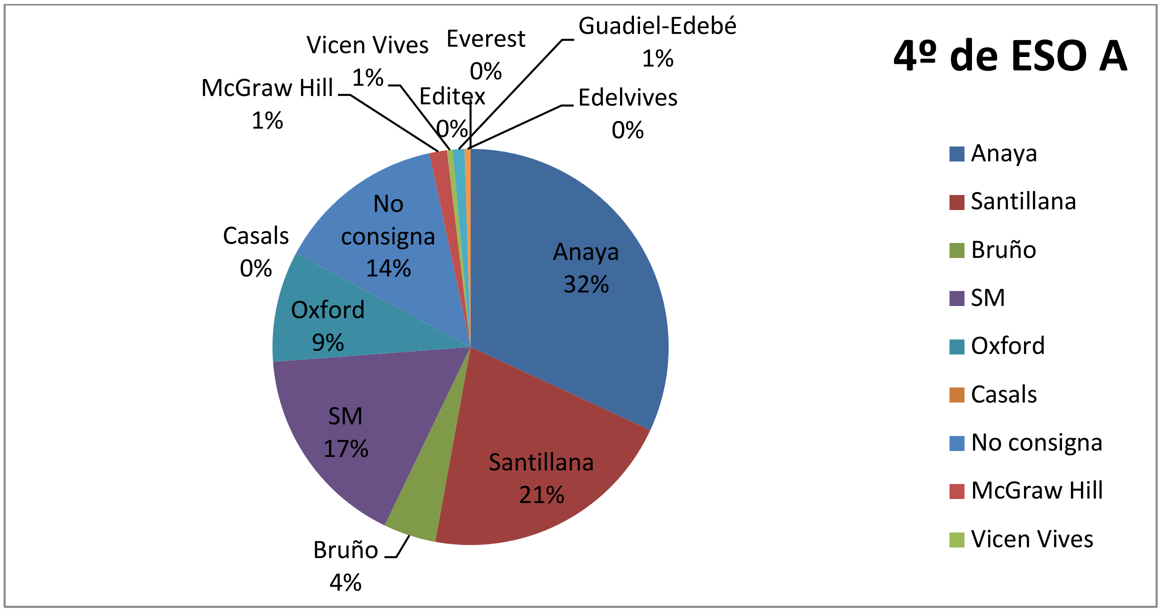


Figura 51. Diagrama de sectores uso de editoriales en 4º de ESO A en centro públicos.

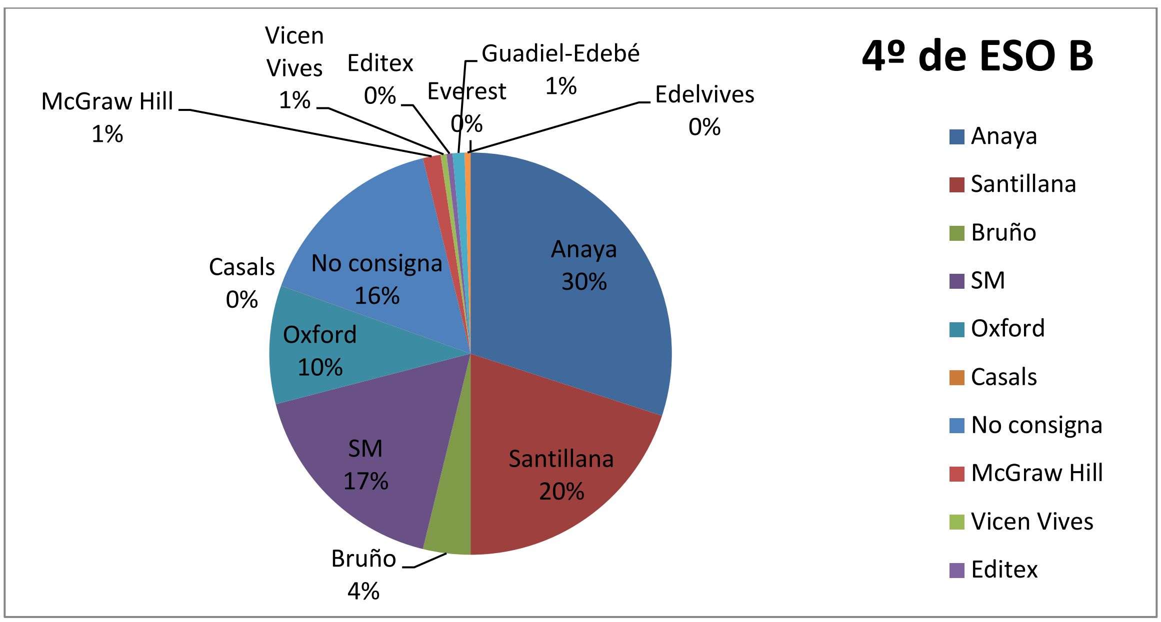


Figura 52. Diagrama de sectores uso de editoriales en 4º de ESO B en centro públicos.

De la misma forma se obtienen los gráficos para los centros privados, que se muestran en las figuras 53, 54 y 55.

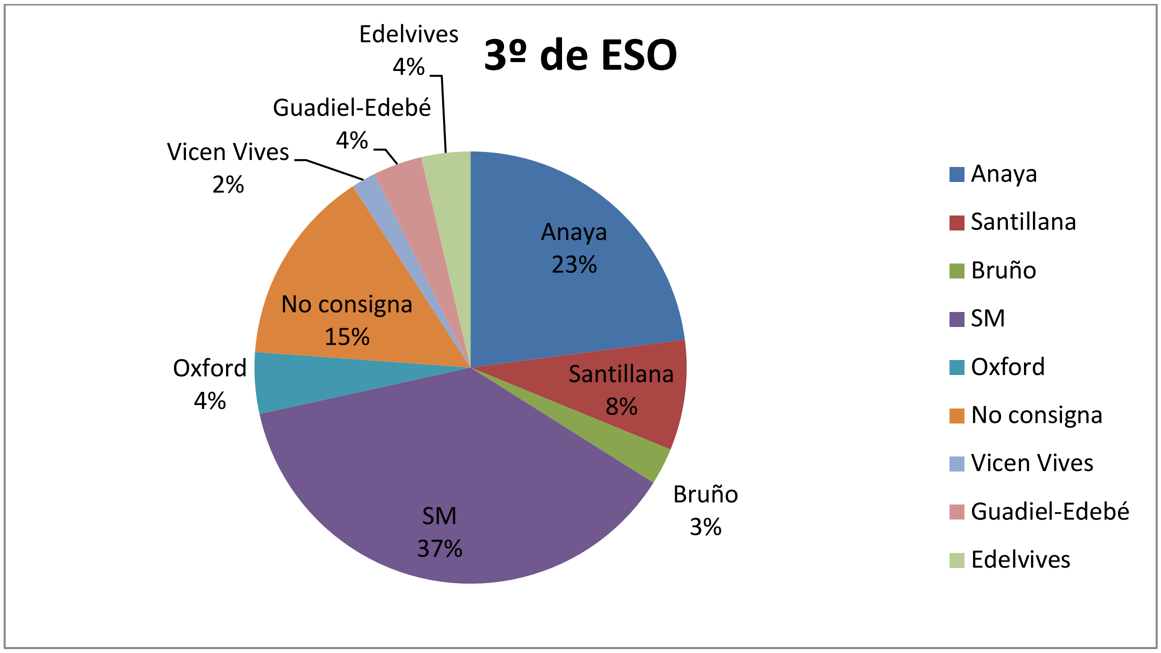


Figura 53. Diagrama de sectores uso de editoriales en 3º de ESO en centro privados.

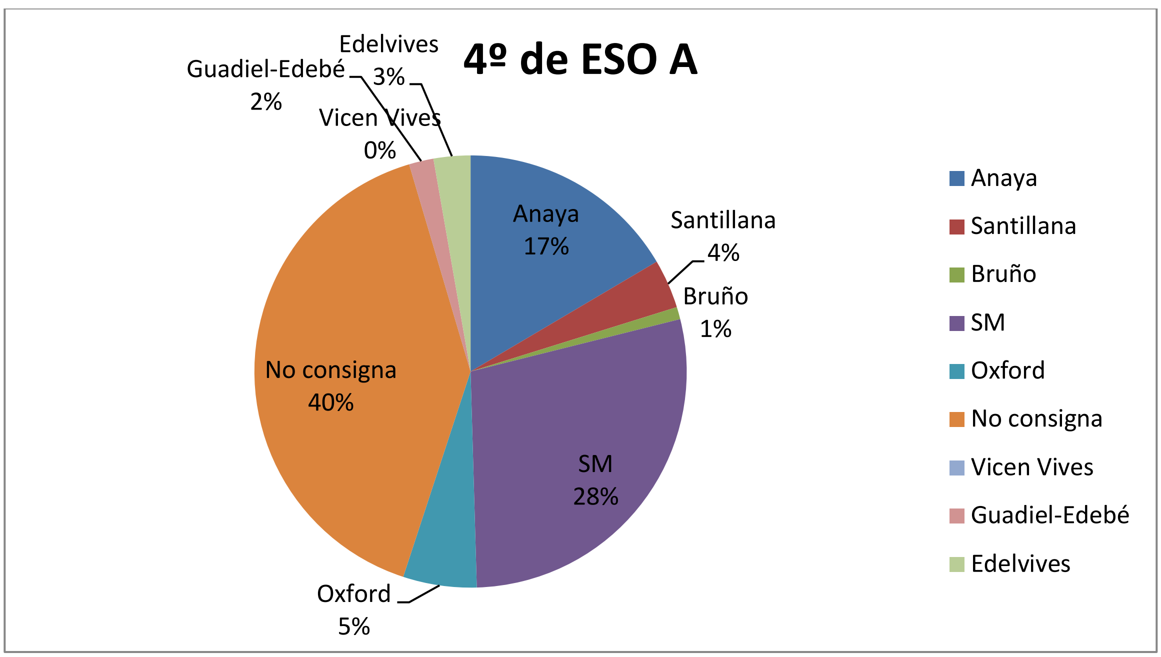


Figura 54. Diagrama de sectores uso de editoriales en 4º de ESO A en centro privados.

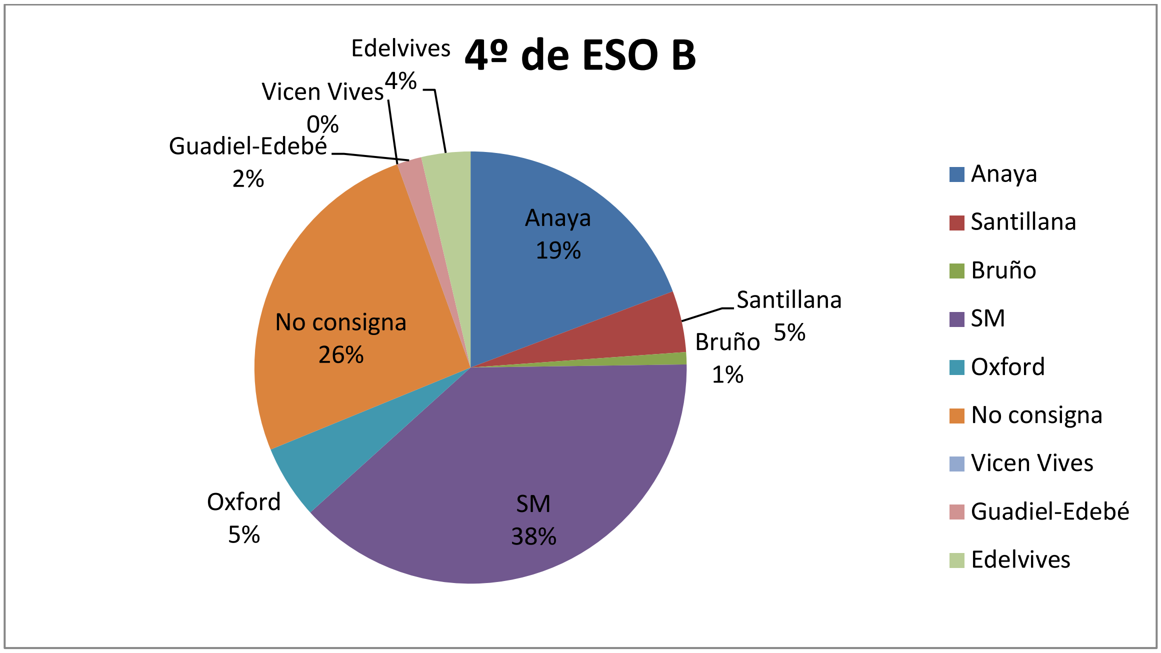


Figura 55. Diagrama de sectores uso de editoriales en 4º de ESO B en centro privados.

La hoja Excel con los datos empleados y su análisis está disponible en https://goo.gl/9ERsul

En la tabla 14 se realiza una codificación de los libros empleados.

Tabla 14. Libros de texto utilizados en el análisis.

Código	Referencia
3A	Colera, J., Gaztelu, I., Oliveira, M.J. (2010) Matemáticas 3. Madrid: Anaya.
3S	Álvarez, M.D., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T. y Serrano, E. (2007) Matemáticas 3 ESO. Proyecto La Casa del Saber. Madrid: Santillana.
3O	Sánchez González, J.L., y Vera López, J. (2007) Matemáticas 3º Secundaria. Serie Cota. Proyecto Ánfora. Madrid: Oxford University Press.
3SM	Vizmanos, J.R., Anzola, M., Bellón, M., Hervás, J.C. (2010) Pitágoras Matemáticas 3. Proyecto Conecta 2.0. Madrid: Ediciones SM.
4AA	Colera, J., Martínez, M., Gaztelu, I., Oliveira, M.J. (2008) Matemáticas 4. Opción A. Madrid: Anaya.
4BA	Colera, J., Martínez, M., Gaztelu, I., Oliveira, M.J. (2008) Matemáticas 4. Opción B. Madrid: Anaya.
4AS	Álvarez, M.D., Gaztelu, A.M., González, A., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T. y Serrano, E. (2008) Matemáticas 4 ESO. Opción A. Proyecto La Casa del Saber. Madrid: Santillana.

Código	Referencia
4BS	Álvarez, M.D., Gaztelu, A.M., González, A., Hernández, J., Miranda, A.Y., Moreno, M.R., Parra, S., Redondo, M., Redondo, R., Sánchez, M.T., Santos, T. y Serrano, E. (2008) Matemáticas 4 ESO. Opción B. Proyecto La Casa del Saber. Madrid: Santillana.
4AO	Contreras Caballero, I., Fernández Palicio, I., Lobo García, B., Pérez Mateo, S., Pérez Sanz, J.L., Uriondo González, J.L. (2012) Matemáticas 4º ESO Opción A. Proyecto Adarve. Madrid: Oxford University Press.
4BO	Contreras Caballero, I., Fernández Palicio, I., Lobo García, B., Pérez Mateo, S., Pérez Sanz, J.L. (2012) Matemáticas 4º ESO Opción B. Proyecto Adarve. Madrid: Oxford University Press.
4ASM	Vizmanos, J.R., Alcaide, F., Serrano, E., Moreno, M., Hernández, J. (2012) Pitágoras Matemáticas 4 ESO. Opción A. Proyecto Conecta 2.0. Madrid: Ediciones SM.
4BSM	Vizmanos, J.R., Alcaide, F., Serrano, E., Moreno, M., Hernández, J. (2012) Pitágoras Matemáticas 4 ESO. Opción B. Proyecto Conecta 2.0. Madrid: Ediciones SM.

La muestra no engloba toda la población y al ser una muestra intencional que contiene los casos más representativos no se aspira a generalizar los resultados a todos los textos existentes, lo que se pretende es la comparabilidad y la traducibilidad, es decir, que el marco esté correctamente definido para poder comparar este estudio con otros y que el estudio pueda ser comprendido por otros investigadores. (Gea, 2014).

6.3. Macroestructura y aspectos cualitativos de los textos escogidos

En primer lugar, se va a analizar la macroestructura de los textos elegidos, para ello se va a estudiar la estructura capitular y de bloques, tanto en orden como en contenido, de esta manera se puede sacar una primera conclusión sobre como la construcción de los libros influye en la importancia que se le da a la Estadística. Además, se van a analizar los aspectos cualitativos que describía Mikk (2000) y otros autores que se citaban en el capítulo 3 de todos los textos.

6.3.1. Elementos cualitativos.

En el aspecto cualitativo se van a analizar visualmente varios elementos, entre ellos lo vistosa que es la portada (inclusión de colores vistosos e imágenes o fotografías reales frente a dibujos, uso de fuentes variadas frente a las clásicas), la inclusión de CD con ejercicios y software específico, la utilización de gráficos e imágenes apropiadamente, la presencia de mapa conceptual de resumen final y de ejercicios de autoevaluación. Esta evaluación se presenta en la tabla 15.

Tabla 15. Valoración de los aspectos cualitativos de los textos

Libro	Portada vistosa	CD	Gráficos e imágenes	Mapa conceptual	Resumen final	Autoevaluación
3A		[1]	X			X
3S			X		X	
3O	X	X	X		X	X
3SM	X	X	X		X	X
4AA		X	X			X
4BA		X	X			X
4AS			X		X	
4BS			X		X	
4AO	X	X	X			X
4BO	X	X	X			X
4ASM	X	X	X		X	X
4BSM	X	X	X		X	X

[1]Ofrece contenido digital a través de webs.

Como se puede observar, en cuanto a las portadas, la menos vistosa es la de Anaya ya que usan colores básicos, fuentes planas e imágenes pictóricas no reales, siendo las de SM y Oxford mucha más vistosas al incluir colores más vivos e imágenes.

Esta comparación es subjetiva, para aclarar la posición del autor se incluyen la figura 56 en las que se muestran las portadas de 3º de ESO, las de 4º de ESO son exactamente iguales, pero para dicho curso.

Figura 56. Portadas de libros de texto de 3º de ESO.

La editorial Anaya no incluye un CD en el libro para 3º de ESO (3A), en cambio sí lo hace en 4º de ESO (4AA, 4AB), sin embargo, durante el texto ofrece recursos web que se pueden consultar. Santillana, en cambio, no ofrece ninguno de los dos recursos.

Todos los textos incluyen gráficos e imágenes que se analizarán en un apartado posterior.

Algunos presentan resúmenes más o menos escuetos, pero no relacionando ideas. Algunos de ellos como Anaya u Oxford en 4º de ESO no tienen tampoco resumen final de unidad. Salvo Santillana todo presentan una autoevaluación para el alumno al final del tema.

Santillana (3S, 4AS y 4BS) es la editorial que menos aspectos cualitativos de los analizados presenta, ya que no presenta una de las portadas más vistosas, no incluye CD del alumno, ni mapa conceptual, ni autoevaluación final. SM (3SM, 4ASM, 4BSM) en cambio utiliza colores vistosos e imágenes en la portada, trae CD para el alumno, recursos online, además presenta un resumen estructurado uniendo ideas y una autoevaluación final que permite al alumno contrastar lo aprendido.

Como se pude observar, los libros de texto, sus contenidos y elementos adicionales como CDs marcan la trayectoria mediacional. Su portada, gráficos, etc. Pueden marcar su trayectoria emocional y por supuesto el propio contenido con la estructura adecuada, como veremos en los próximos apartados guían la trayectoria cognitiva. (Godino et al., 2006). La ausencia de mapas conceptuales, resúmenes finales y autoevaluación contribuyen a que la exposición sea deficiente, apoyando la hipótesis 1

(H1) que planteábamos “Al evaluar los textos se espera encontrar una exposición deficiente en diferentes medidas de dispersión”.

6.3.2. Macroestructura.

El análisis de la macroestructura, entendida como estructura capitular del libro de texto, se ha presentado resumido en Del-Pino y Estepa (2019a), el texto que aquí se presenta es una ampliación del mismo.

Dicho análisis se va a dividir en tres bloques, libros de 3º de ESO, libros de 4º de ESO opción A y libros de 4º de ESO opción B, ya que las macroestructuras por construcción curricular deben ser diferentes en cada curso. Se presenta en la tabla 16 la macroestructura de los libros de texto de 3º de ESO.

Tabla 16. Estructura de capítulos de los textos de 3ª de ESO

	3A	3S	3O	3SM
Capítulo 1	Fracciones y decimales	Números racionales	Números racionales	Números reales
Capítulo 2	Potencias y raíces. Números aproximados	Números reales	Números reales	Potencias y raíces
Capítulo 3	Progresiones	Polinomios	Sucesiones numéricas	Proporcionalidad directa e inversa
Capítulo 4	El lenguaje algebraico	Ecuaciones de primer y segundo grado	Polinomios	Sucesiones. Progresiones
Capítulo 5	Ecuaciones	Sistemas de ecuaciones	Ecuaciones	Polinomios
Capítulo 6	Sistemas de ecuaciones	Proporcionalidad numérica	Sistemas de ecuaciones	División de polinomio. Raíces
Capítulo 7	Funciones y gráficas	Progresiones	Métrica del triángulo	Expresiones fraccionarias y radicales
Capítulo 8	Funciones lineales	Lugares geométricos. Figuras planas	Lugares geométricos	Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones
Capítulo 9	Problemas métricos en el	Cuerpos geométricos	Movimientos	Funciones

	3A	3S	3O	3SM
	plano			
Capítulo 10	Cuerpos geométricos	Movimientos y semejanzas	La esfera y el globo terráqueo	Funciones lineales y cuadráticas
Capítulo 11	Transformaciones geométricas	Funciones	Funciones	Geometría del plano
Capítulo 12	Estadística	Funciones lineales y afines	Funciones elementales	Traslaciones, giros y simetrías en el plano
Capítulo 13	Azar y probabilidad	Estadística	Estadística	Figuras y cuerpos geométricos
Capítulo 14	Calculadora	Probabilidad	Azar y probabilidad	Tablas y gráficos estadísticos
Capítulo 15				Parámetros estadísticos
Capítulo 16				Sucesos aleatorios. Probabilidad

Se pueden observar dos detalles en la macroestructura, el primero es que frente a otros bloques como aritmética, álgebra o geometría que se trabajan en tres unidades didácticas, en general, el bloque de estadística tan solo dispone de dos unidades, esto sucede en todos los textos salvo en el de SM (3SM), en el que se trabaja el bloque en tres unidades, separando las tablas y gráficos de los parámetros. El segundo punto, es que en todas las editoriales siguen el orden marcado por la legislación y el bloque estadístico es el último que se trabaja, perpetuando el comentario que existe entre los profesores que dice "los profesores de Matemáticas dejamos cada año la Geometría como última unidad del curso, y después viene la Estadística." Debido a que la extensión del temario es importante, en muchas ocasiones no es posible llegar a los últimos temas, en este caso el bloque afectado es la estadística, si esta acción se perpetúa a lo largo de los cursos genera que los estudiantes lleguen a bachillerato con escasas nociones de estadística.

En la tabla 17 se presenta la macroestructura de los libros de 4º de ESO opción A.

Tabla 17. Estructura de capítulos de los textos de 4ª de ESO opción A

	4AA	4AS	4AO	4ASM
Capítulo 1	Números enteros y racionales	Números enteros	Operaciones con números enteros y fracciones	Números racionales
Capítulo 2	Números decimales	Números racionales	Números reales	Números reales
Capítulo 3	Números reales	Números reales	Potencias y radicales	Polinomios
Capítulo 4	Problemas aritméticos	Problemas aritméticos	Proporcionalidad numérica	Ecuaciones e inecuaciones
Capítulo 5	Expresiones algebraicas	Polinomios	Ecuaciones	Sistemas de ecuaciones
Capítulo 6	Ecuaciones e inecuaciones	Ecuaciones, inecuaciones y sistemas	Sistemas de ecuaciones	Proporcionalidad
Capítulo 7	Sistemas de ecuaciones	Semejanzas	Inecuaciones	Semejanza y trigonometría
Capítulo 8	Funciones. Características	Trigonometría	Semejanzas	Problemas métricos
Capítulo 9	Las funciones lineales	Vectores y rectas	Longitudes, áreas y volúmenes	Vectores y rectas en el plano
Capítulo 10	Otras funciones elementales	Funciones	Geometría analítica	Funciones
Capítulo 11	Las semejanzas y sus aplicaciones	Funciones polinómicas, racionales y exponenciales	Funciones	Funciones polinómicas y racionales
Capítulo 12	Geometría analítica	Estadística	Tipos de funciones	Funciones exponenciales
Capítulo 13	Estadística	Combinatoria	Estadística	Estadística unidimensional
Capítulo 14	Cálculo de probabilidades	Probabilidad	Probabilidad	Combinatoria
Capítulo 15				Probabilidad
Capítulo 16				Probabilidad condicionada

En este caso, de nuevo se le otorga al bloque de estadística dos unidades en todas las editoriales, salvo Santillana (4AS) que lo trabaja en tres y en SM (4ASM), que lo trabaja en cuatro a costa de un programa más extenso (y, por ende, más difícil de cumplir a su vez.)

En la tabla 18 se presenta la macroestructura de los libros de texto de 4º de ESO opción B.

Tabla 18. Estructura de capítulos de los textos de 4ª de ESO opción B

	4BA	4BS	4BO	4BSM
Capítulo 1	Números reales	Números reales	Números reales	Números reales
Capítulo 2	Polinomios y fracciones algebraicas	Potencias y radicales	Radicales	Polinomios
Capítulo 3	Ecuaciones, inecuaciones y sistemas	Polinomios y fracciones algebraicas	Ecuaciones	Ecuaciones y sistemas
Capítulo 4	Funciones. Características	Ecuaciones e inecuaciones	Sistemas de ecuaciones	Inecuaciones y sistemas
Capítulo 5	Funciones elementales	Sistemas de ecuaciones	Inecuaciones	Semejanzas
Capítulo 6	Las semejanzas y sus aplicaciones	Semejanza	Semejanzas	Trigonometría
Capítulo 7	Trigonometría	Trigonometría	Trigonometría	Geometría analítica
Capítulo 8	Geometría analítica	Vectores y rectas	Geometría analítica	Sucesiones. Límites de sucesiones.
Capítulo 9	Estadística	Funciones	Funciones	Funciones
Capítulo 10	Cálculo de probabilidades	Funciones polinómicas y racionales	Tipos de funciones	Límite de funciones. Continuidad
Capítulo 11	Combinatoria	Funciones exponenciales y logarítmicas	Estadística	Funciones elementales
Capítulo 12		Estadística	Parámetros estadísticos	Iniciación a la derivada
Capítulo 13		Combinatoria	Combinatoria	Estadística unidimensional
Capítulo 14		Probabilidad	Probabilidad	Estadística bidimensional
Capítulo 15				Combinatoria
Capítulo 16				Probabilidad

En este último caso, los textos más pobres son los de Anaya y Santillana, que trabajan el bloque de estadística en tres unidades, y Oxford y SM en cuatro unidades.

Es llamativo que los textos 3SM y 4BO presentan una unidad didáctica para trabajar tan solo los parámetros estadísticos. Ya que eso genera que otros elementos como gráficos y tablas, que están relacionados con el uso de diferentes parámetros se trabajen de forma aislada como sucede en 3SM, en el que los gráficos y las tablas tienen una unidad didáctica propia. Esto produce que se desconecten contenidos que están relacionados, pudiendo afectar a la comprensión de la estadística y de los diferentes parámetros ocasionando conflictos semióticos.

Otro aspecto interesante por analizar es, qué tratamiento en porcentaje se le da a cada bloque en los diferentes textos, ya que esto permite hacerse a la idea de si las editoriales y por extensión en las aulas, algunos bloques tienen un tratamiento más amplio que otros, ya que este tratamiento afecta, como se ha indicado en los capítulos 2, 3 y 4 a los problemas existentes en la comprensión y el razonamiento en el área de estadística.

En la tabla 19 se muestra el porcentaje del libro de texto (páginas del bloque sobre número de páginas del libro) que se dedica a cada bloque (según LOE), los datos no sumarán el 100% debido a que algunos textos incluyen un tema 0 sobre problemas (Anaya) o un tema final sobre uso de la calculadora (varias editoriales), así como la paginación del índice y algunas tablas finales.

Tabla 19. Porcentaje de páginas dedicado a cada bloque de contenidos en los libros de texto analizados

	3º de ESO				4º de ESO Opción A				4º de ESO Opción B			
Bloque de contenidos	3A[1]	3S	3O	3SM	4AA[1]	4AS[1]	4AO	4ASM	4BA[1]	4BS[1]	4BO	4BSM
Números	10,9	21,7	15,4	17,9	26,3	28,2	19,9	17,5	8,9	14,9	10,1	7,4
Álgebra	24,5	28,1	27,6	29,6	20,7	13,7	21,4	16,1	16,1	20,2	21,3	24,2
Geometría	23,1	21,3	27,6	19,3	14,2	20,2	21,4	21	25	19,5	23,7	18,8
Funciones y gráficas	13,5	12,5	13	11,7	17,2	14,1	12,5	18,2	16,9	19,8	13,6	32,2
Estadística y probabili.	13,5	12,5	13,4	17,2	13,4	17,9	15,1	22,3	24,2	18,7	21,9	20,8

[1] Presentan una unidad para trabajar problemas, repaso y/o otra para calculadora

En esta última tabla se puede observar que en los libros de 3º de ESO, el bloque de estadística es de los que menos espacio ocupa, con espacio similar a los bloques de números y funciones, este efecto sigue persistiendo en los libros de la opción A con una leve mejora, siendo una excepción 4ASM, donde es el bloque predominante, sin embargo, en los de la opción B pasa a competir con los dos bloques que mayor relevancia tienen en los textos analizados, que son los de álgebra y geometría.

6.3.3. Conclusiones.

Eran dos los aspectos que se querían analizar y contrastar con las hipótesis de trabajo en este apartado. En primer lugar, que el orden en los libros de texto es relevante, y todas las editoriales sin excepción dejan el bloque de estadística para el final. En este caso se verifica la hipótesis planteada (H4). En segundo lugar, que el lugar que le brinda los libros de texto a la estadística es inferior al resto de bloques. En este caso se verifica la hipótesis para 3º de ESO y 4º de ESO opción A, pero no así para 4º de ESO opción B, (H3) donde en la tabla 19 se puede observar que se le presta una atención casi tan importante como a otros bloques que en otros niveles no se presenta.

6.4. Microestructura de los textos escogidos

En este apartado se va a analizar la microestructura de los textos desde dos perspectivas, la planteada por Valverde et al. (2002) y la planteada por Love y Pimm (1996). Según la primera de ellas se analizará cómo está distribuido el capítulo, mientras que según la segunda se estudiará cómo se trabaja cada contenido que se indica en el currículum y si se verifica la tripleta propuesta por los autores de exposición-ejemplo-ejercicios.

Este análisis se va a realizar solamente sobre las unidades de estadística o parámetros estadísticos de cada uno de los textos, como representación de los conceptos. En primer lugar, se trata de determinar los diferentes tipos de microestructuras existentes, y en segundo lugar, se trata de evaluar si alguno de los textos da una consideración menor a alguno de contenidos que se deben trabajar al no utilizar la microestructura exposición-ejemplo-ejercicios de forma completa durante el desarrollo de la unidad didáctica.

6.4.1. Microestructura de los capítulos de los libros de texto.

Así pues, en la tabla 20 se presentan para los libros de texto los diferentes elementos que constituyen la microestructura como se indicaba en el capítulo 3.

Tabla 20. Microestructura del capítulo en los libros de texto.

Elementos microestructura	3A	3S	3O	3SM	4AA	4BA	4AS	4BS	4AO	4BO	4A SM	4B SM
Lectura introductoria	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Actividades de introducción	X		X	X	X	X		X	X	X	X	X
Desarrollo contenidos	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Mapa conceptual o resumen		X	X	X			X	X			X	X
Ejercicios finales	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Recursos online	X			X	X	X					X	X
Propuesta de investigación	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Se observa en la tabla como la microestructura es algo propio de la editorial, que da una idea de cómo quieren desarrollar las matemáticas, aunque no es objeto de este análisis, los tipos de lectura introductoria o las actividades, orientan y dan cuenta de la filosofía didáctica que hay detrás de cada libro, indagando o no en ideas previas, o relacionando los textos con la historia de las Matemáticas.

6.4.2. Microestructura expositiva de las medidas de dispersión en los textos.

Ahora nos vamos a centrar en la microestructura en la exposición de los contenidos referentes a la dispersión. Para ello en las tablas 21, 22 y 23 se presentan los distintos contenidos que se deben trabajar sobre medidas de dispersión por curso indicando si en cada texto se trabajan con el esquema exposición-ejemplo-ejercicios dichos contenidos.

Para ello se proponen en las tablas los contenidos que se incluyeron en el capítulo 2, y se indicará a través de una tabla de verificación si se cumple o no la microestructura expositiva, también se consignará si falta solo el ejemplo, ya que puede ser que en el desarrollo de algunos de los conceptos no lo utilicen.

Tabla 21. Microestructura expositiva de las medidas de dispersión en los textos de 3º de ESO

Contenidos	3A	3S	3O	3SM
Rango	X	*		X
Desviación típica	X	X	X	X
Varianza	X	X		X

Interpretación conjunta de la media y la desviación típica	X			X
Comparación de conjuntos de datos	X	X		X

*No incluye ejemplo, solo exposición y ejercicios.

Es llamativo que algunos textos como 3S y 3O no incluyen el desarrollo de todos los contenidos que marca la legislación, como el rango o la interpretación conjunta de la media y la desviación típica, que en el caso de 3O es llamativo ya que obtiene la desviación típica a partir de la media cuadrática y no a partir de la varianza y su raíz, complicando innecesariamente este contenido ya que la media cuadrática no es un contenido trabajado previamente y que introducen adicionalmente y esto algo que evidentemente no es positivo, y que a los profesores debería llamarle la atención a la hora de escoger un texto u otro.

Tabla 22. Microestructura expositiva de las medidas de dispersión en los textos de 4º de ESO opción A

Contenidos	4AA	4AS	4AO	4ASM
Desviación típica	X	X	X	X
Varianza	X	X	X	X
Coeficiente de variación	X	X	[2]	X
Comparación de distribuciones	X	X		X
Cuartiles	X	X	X	X
Diagrama de caja	X	[1]		X

[1]Se incluye en los ejercicios finales de forma escueta. [2]No incluye ejemplo, solo exposición y ejercicios.

Se puede observar de nuevo que textos como 4AS y 4AO no incluyen todos los contenidos que indica la legislación tal y como sucedía con otros textos en el anterior bloque.

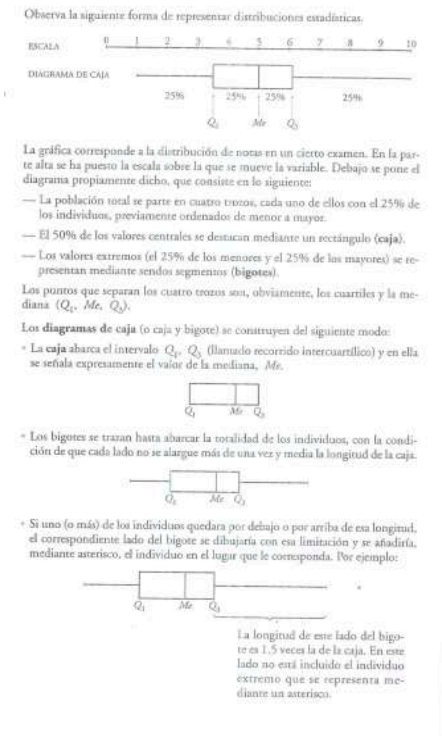
Tabla 23. Microestructura expositiva de las medidas de dispersión en los textos de 4º de ESO opción B

Contenidos	4BA	4BS	4BO	4BSM
Desviación típica	X	X	X	X
Varianza	X	X	X	X
Coeficiente de variación	X	X	X	X
Influencia de los valores atípicos			X	X
Elección de medidas de dispersión en función de los valores atípicos			X	
Comparación de distribuciones	X		X	X
Cuartiles	X	X	X	X
Diagrama de caja	X	*	X	X

*Se incluye en los ejercicios finales de forma escueta.

Como se puede observar en la tabla 23, solo un texto, 4BO, incluye todos los contenidos que indica la legislación.

En las tablas 22 y 23 se indica que los textos 4AS y 4BS no incluyen un tratamiento acertado del concepto de diagrama de caja, para ejemplificar lo que se considera una exposición correcta y una incorrecta se traen aquí dos versiones, una completa y otra incompleta, que se pueden observar en la figura 57. Un resumen de este problema se puede ver en Del-Pino y Estepa (2017).



Observa la siguiente forma de representar distribuciones estadísticas.

La gráfica corresponde a la distribución de notas en un cierto examen. En la parte alta se ha puesto la escala sobre la que se mueve la variable. Debajo se pone el diagrama propiamente dicho, que consiste en lo siguiente:

— La población total se parte en cuatro trozos, cada uno de ellos con el 25% de los individuos, previamente ordenados de menor a mayor.

— El 50% de los valores centrales se destacan mediante un rectángulo (**caja**).

— Los valores extremos (el 25% de los menores y el 25% de los mayores) se representan mediante sendos segmentos (**bigotes**).

Los puntos que separan los cuatro trozos son, obviamente, los cuartiles y la mediana (Q_1, Me, Q_3).

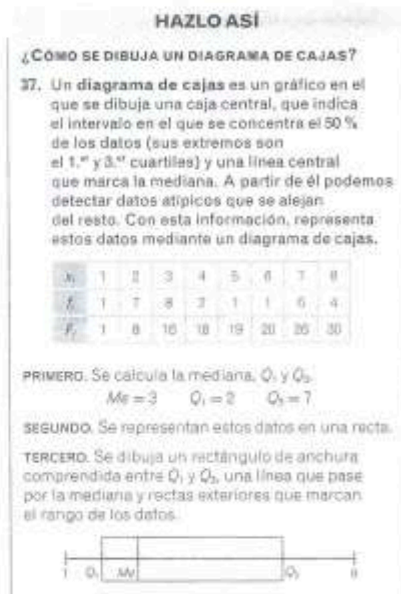
Los **diagramas de caja** (o caja y bigote) se construyen del siguiente modo:

- La **caja** abarca el intervalo Q_1, Q_3 (llamado recorrido intercuartílico) y en ella se señala expresamente el valor de la mediana, Me.

- Los bigotes se trazan hasta abarcar la totalidad de los individuos, con la condición de que cada lado no se alargue más de una vez y media la longitud de la caja.

- Si uno (o más) de los individuos quedara por debajo o por arriba de esa longitud, el correspondiente lado del bigote se dibujaría con esa limitación y se añadiría, mediante asterisco, el individuo en el lugar que le corresponda. Por ejemplo:

La longitud de este lado del bigote es 1,5 veces la de la caja. En este lado no está incluido el individuo extremo que se representa mediante un asterisco.



HAZLO ASÍ

¿CÓMO SE DIBUJA UN DIAGRAMA DE CAJAS?

37. Un **diagrama de cajas** es un gráfico en el que se dibuja una caja central, que indica el intervalo en el que se concentra el 50 % de los datos (sus extremos son el 1.er y 3.er cuartiles) y una línea central que marca la mediana. A partir de él podemos detectar datos atípicos que se alejan del resto. Con esta información, representa estos datos mediante un diagrama de cajas.

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
f_i	1	7	8	2	1	1	6	4
F_i	1	8	16	18	19	20	26	30

PRIMERO. Se calcula la mediana, Q_1 y Q_3.

$Me = 3 \qquad Q_1 = 2 \qquad Q_3 = 7$

SEGUNDO. Se representan estos datos en una recta.

TERCERO. Se dibuja un rectángulo de anchura comprendida entre Q_1 y Q_3, una línea que pase por la mediana y rectas exteriores que marcan el rango de los datos.

Figura 57. Exposición de la realización del diagrama de caja en 4AA y 4AS

6.4.3. Conclusiones.

Varias conclusiones se pueden obtener del análisis de la microestructura, algunas bastantes interesantes.

En primer lugar, la microestructura de los capítulos indica que todos los textos presentan lectura introductoria, aunque de diferentes formas, de manera que algunos textos dan prioridad al enfoque competencial y otros al tratamiento histórico, pero todos aúnan la opinión de utilizar una introducción. Sin embargo, no todos los textos incluyen actividades de introducción, 3S, 4AS y 4BS (los textos de Santillana) no tienen actividades de este tipo, esto indica que no prestan atención a la exploración de ideas previas, que otros textos sí. Todos los textos desarrollan los contenidos, sin embargo, no todos incluyen un resumen final. Este tipo de resumen ayuda a organizar ideas y tener una perspectiva global de la unidad. Algunos textos incluyen actividades y recursos online, pero no todos. Aunque no es indispensable ya que esta labor puede ser suplida por el profesor (al igual que la mayoría), es cierto que, con la implantación de la LOMCE y el cambio de textos, la mayoría de las editoriales ya incluyen materiales y guías online.

En segundo lugar, es llamativo que no se verifique que todos los contenidos se incluyen de forma adecuada en los textos, ya que solo la mitad de los textos analizados en 3º de ESO y 4º de ESO opción A incluyan todo el contenido que indica la ordenación académica, en 4º de ESO opción B solo uno de los cuatro textos analizados incluye todos los contenidos necesarios. Esto indica que la trayectoria cognitiva será deficiente. Además de nuevo se verifica la hipótesis 1 ya que se observa una exposición deficiente de las medidas de dispersión.

En el capítulo 3 de esta tesis, exponíamos que Howson (2013) indicaba unas características básicas que debería cumplir un libro de texto de matemáticas que como vemos no todos los libros de texto cumplen ya que no todos presentan con claridad los contenidos, tienen una cantidad suficiente de ejercicios o una portada adecuada para estudiantes de 14 años.

6.5. Análisis del significado de las medidas de dispersión

En este apartado se va a realizar un análisis sobre los objetos primarios de análisis del EOS en los diferentes libros de texto. Al ser los currículums diferentes para cada nivel y opción se ha tomado la determinación de hacer el análisis de cada uno por separado, ya que el lenguaje, situaciones, etc., … que surgen en cada nivel puede ser a priori diferente.

Para trabajar este apartado se van a utilizar las definiciones de los objetos que se mostraron en el capítulo 5, además del trabajo de Estepa y Ortega (2005b), donde se define el significado de referencia para las medidas de dispersión.

El objetivo de este apartado es obtener o caracterizar el significado en la institución de Educación Secundaria de las diferentes medidas de dispersión que aparecen en los libros de texto, tales como el rango (R), la desviación media (DM), el recorrido o rango intercuartílico (RIC), varianza (V), desviación típica (DT) y el coeficiente de variación (CV), también se prestará atención al diagrama de caja (DC) y su elaboración. Se pondrá el foco especialmente en las medidas que se incluyen en el curriculum, ya que son las que se deben incluir en los libros de forma obligatoria, estas son el rango, la desviación típica, el coeficiente de variación para hacer comparaciones entre distribuciones de datos y en el caso de 4º curso en recorrido intercuartílico como paso previo al diagrama de caja.

Para el análisis se va a utilizar el GROS (Godino, Rivas, Castro, y Konic, 2008), que permite extraer los diferentes objetos y catalogarlos, esta extracción de datos en bruto de las 12 unidades didácticas redunda en más de 100 folios de datos, por tanto, lo que se presenta en este estudio no es la extracción de datos mediante la herramienta, sino el análisis de los datos extraídos. En el apéndice 5 se muestra un pequeño ejemplo del uso de esta. Estos apartados se han presentado en Del-Pino y Estepa (2017) y Del-Pino y Estepa (2019b) de diferente forma en el primer trabajo referente a las situaciones – problema y resumido en el segundo trabajo en el que se analizan el resto de elementos.

6.5.1. Situaciones-problema.

En este apartado se van a analizar los problemas y ejercicios que permiten que se usen los conceptos y procedimientos que los alumnos han aprendido. Se va a separar el análisis en problemas y ejercicios, ya que es también interesante para el análisis tener en cuenta cuántos ejercicios y cuántos problemas se utilizan en los textos de cara a separar los textos que se centran en el proceso algorítmico y los que se centran en el razonamiento.

Para la codificación se va a emplear dos letras, la S para las situaciones y la E para los ejercicios. De esta manera en las tablas se puede separar y obtener números globales. En Del-Pino y Estepa (2017) se presenta un estudio de los mismos textos de forma diferente, agrupando ejercicios y problemas por medida de dispersión, aquí al disponer de más espacio se ha realizado más detallado.

Dentro de los dos primeros tipos de situaciones que se van a plantear subyacen en los dos sentidos en los que se habla de la dispersión tal y como indicaban Estepa y Ortega (2005b), que son la dispersión intrínseca, es decir, de datos con respecto a datos, y la referencial, que es la dispersión de los datos con respecto a uno que ejerce de referencia, que suele ser una medida de tendencia central, y en el caso de los libros de texto de secundaria, es la media aritmética de forma general.

Para el análisis se va a emplear la siguiente codificación:

S1/E1. Variación por rangos. En esta situación se pide encontrar la diferencia entre valores de un conjunto de datos. En este tipo de situación se considera el rango y el recorrido intercuartílico. Que son medidas de dispersión intrínsecas.

S2/E2. Variación por desviaciones. En esta situación se pide cuantificar la distancia de los datos a uno de referencia (en general a la media.) En este tipo de situaciones se incluyen la dispersión de los datos respecto a la media aritmética, por medio de la desviación media, la varianza o de la desviación típica. Que se enseñan como medidas referenciales, pero que como se mostraba en el capítulo 4 se puede estudiar desde una perspectiva intrínseca también.

S3/E3. Comparaciones globales. Las hay de tres tipos:

S3a/E3a. Comparar de forma numérica la variación de varias distribuciones cuyos datos están en la misma magnitud. Son problemas y actividades que involucran el uso conjunto de la media y la desviación típica o del coeficiente de variación.

S3b/E3b. Comparar de forma numérica la variación de varias distribuciones cuyos datos están en diferentes magnitudes. Son problemas que involucran el uso del coeficiente de variación.

S3c/E3c. Comparar la variación de varias distribuciones de forma gráfica, ya sea a través de histogramas o diagramas de caja.

S4/E4. Variación en gráficos. En estas situaciones se realiza el diagrama de caja a partir de una serie de datos, se obtienen las medidas de dispersión a partir de un gráfico o se interpreta la dispersión en un gráfico.

S5/E5. Uso conjunto de la media y la desviación típica. En estas situaciones se plantea la cuestión de cuántos datos caen en el intervalo de la media y cierta cantidad de veces la desviación típica utilizando nociones de la distribución normal.

En la tabla 24 se ha indicado un ejemplo de cada uno de los ejercicios y situaciones para facilitar a los lectores la comprensión de qué tipo de ejercicios y actividades de los que figuran en el libro se han tomado en cada caso. Como se puede observar, se ha considerado como situaciones-problema las actividades contextualizadas, ya que los alumnos de 3º y 4º de ESO no realizan, como norma general, situaciones-problema propiamente dichas. Se ha considerado como ejercicio las actividades que son de dominio del algoritmo, por ejemplo, *calcula*, *halla*, o *averigua*.

En el apéndice 3 podemos encontrar una tabla con ejemplos tipificados extraídos del libro.

En las tablas 24, 25 y 26 se indica el número de situaciones y ejercicios de cada tipo que se da en cada texto por nivel. El conteo de situaciones no ha sido excluyente, si en un ejercicio hay que calcular la desviación típica y a su vez comparar distribuciones, se ha marcado como S2 y S3.

Tabla 24. Número de situaciones y ejercicios en los textos de 3º de ESO

	S1	E1	S2	E2	S3a	E3a	S3b	E3b	S3c	E3c	S4	E4	S5	E5
3A		3	12	8	6						5	1	6	
3S	4	2	12	3	6		2					1	6	
3O	7	3	11	5									1	
3SM	11	6	13	7	1				1		1		2	2

Las situaciones que el curriculum indica que se deben incluir en 3º de ESO, son la S1/E1, S2/E2, S3/E3 (sin especificar el subtipo) y S5/E5. Como ya se observaba en Del-Pino y Estepa (2017) hay una ponderación importante de situaciones y ejercicios sobre desviación típica frente al resto de tipos que viene incluido en el curriculum. En la tabla se puede observar que 3ª no presenta situaciones de tipo 1 y 3O no presenta situaciones de tipo 3, que son prescriptivas, generando una laguna práctica en los estudiantes. Esto indica, como veremos más adelante, que la idoneidad ecológica es baja al faltar contenido que es prescriptivo según el currículo. En la tabla 21 sobre la microestructura ya se indicaba que los contenidos objeto de este tipo de situaciones no aparecían en 3O.

Tabla 25. Número de situaciones y ejercicios en los textos de 4º de ESO opción A

	S1	E1	S2	E2	S3a	E3a	S3b	E3b	S3c	E3c	S4	E4	S5	E5
4AA			4	5	3		1				4	4		
4AS	3	2	9	4	4		2					1		
4AO	4	2	5	3	7		1		2		1			
4ASM	3		15		4		1		1		3		5	

En la tabla se aprecia que el libro que más riqueza de situaciones presenta es 4ASM, en el que existen situaciones de todos los tipos codificados. Aún así tenemos ejercicios de todos los contenidos prescriptivos que es la utilización de las medidas para comparar S3/E3 y el diagrama de caja S4/E4.

Tabla 26. Número de situaciones y ejercicios en los textos de 4º de ESO opción B

	S1	E1	S2	E2	S3a	E3a	S3b	E3b	S3c	E3c	S4	E4	S5	E5
4BA			4	5	3		1				4	4		
4BS	4	1	11	1	4		2					1		
4BO	7	2	11	3	7		1		5		7			
4BSM	7	2	14	2	2	1	1		2		2		5	

En este caso es 4BSM quien presenta más riqueza de situaciones, presentando además un gran número de problemas y pocos ejercicios que no estén contextualizados al menos.

En estas tablas se aprecian dos aspectos interesantes, en primer lugar, que en ningún texto aparecen ejercicios de tipo E3b ni E3c, esto se debe a que todas las comparaciones ya sean gráficas o analíticas de diferentes magnitudes se presentan contextualizadas. Sin embargo, si aparecen ejercicios de tipo E3a sobre todo para el dominio del coeficiente de variación, y comparaciones usando la media y la desviación típica de forma general.

Otro aspecto interesante es que, en realidad, las situaciones tipo S5/E5 no aparecen como tales en el currículum, ya que en ningún momento se menciona que se deba introducir la noción de distribución normal, ya que el uso conjunto de la media y la desviación típica queda perfectamente asimilado en situaciones de comparación que entran dentro de la categoría S3/E3. Esto hace que los libros expongan la distribución normal de forma apresurada y poco rigurosa, ya que no se trabaja de forma intensiva hasta primero de bachillerato. Así pues, en las imágenes 58 y 59 se muestra como introducen este concepto dos de los libros que se han utilizado.

En una distribución estadística, con una buena cantidad de individuos, y que no sea muy extraña, aproximadamente las dos terceras partes de ellos (2/3) están en el intervalo $\bar{x}-\sigma,\ \bar{x}+\sigma$.

Figura 58. Introducción de la normal en 3A

Muchas distribuciones estadísticas que se obtienen en situaciones muy diversas se ajustan a un modelo universal conocido como distribución normal. En estas distribuciones hay una relación entre la desviación típica y la forma en que se agrupan los datos alrededor de la media.

Para distribuciones de datos normales o que se aproximen a una normal:

- En el intervalo $(\bar{x}-s, \bar{x}+s)$ se encuentra el **68%** de los datos.
- En el intervalo $(\bar{x}-2s, \bar{x}+2s)$ se encuentra el **95%** de los datos.
- En el intervalo $(\bar{x}-3s, \bar{x}+3s)$ se encuentra el **99%** de los datos.

Figura 59. Introducción de la normal en 3SM

En ambos libros se observa de lo forzado de la descripción de la normal debido a que los alumnos aún no tienen conocimientos para poder exponerla de forma adecuada.

6.5.2. Elementos lingüísticos.

El lenguaje que emplean los libros de texto es muy rico y variado, podemos encontrar, como indicaban Estepa y Ortega, (2005a) los siguientes términos entre otros,

> Cuadrado de las desviaciones, desviación, desviación a la tendencia central, desviación típica, desviación standard, dispersión, dispersión absoluta, dispersión relativa, error, error promedio de medición, fuentes de varianza, grado de dispersión, grado de variabilidad, homogeneidad de los datos, índice de variabilidad, más representativo, media cuadrática, menos representativo, medidas de dispersión, medidas de dispersión absolutas, medidas de dispersión relativas, promedio de las desviaciones, separación de cada valor respecto a la media, valores de desviación, variabilidad, varianza (p.11).

En este análisis se van a consignar solo los más comunes y la frecuencia con la que aparecen en los libros de texto, ya que analizar todas y cada una de las expresiones que surgen es una tarea titánica, sin embargo, seleccionar algunos términos y notaciones va a dar una idea de lo complejas que son las medidas de dispersión y va a hacer visible los potenciales conflictos semióticos que surgen.

En los elementos lingüísticos se van a diferenciar tres tipos, los elementos textuales (LT), que son descripciones hechas de forma textual, los elementos notacionales (LN), que son las diferentes letras y expresiones que se emplean y los elementos gráficos (LG) que son los gráficos e imágenes que se incluyen para aclarar conceptos.

En el análisis se han obviado algunos elementos que aparecen en todos los textos, o algunos que solo parecen en uno, algunos como medidas de dispersión, medidas estadísticas, etc., … si se ha considerado oportuno incluir los términos que en el curriculum aparecen como preceptivos.

Para el análisis se va a emplear la siguiente codificación:

LT1. Ser regular.

LT2. Desviaciones.

LT3. Desviación típica.

LT4. Datos dispersos/datos agrupados (en el sentido de dispersión, no de datos agrupados para tabular)

LT5. Varianza.

LT6. Dispersión relativa

LT7. Bigotes (del diagrama de caja)

LT8. Valores atípicos.

LT9. Rango.

LN1. σ

LN2. σ_x

LN3. s

LN4. σ^2

LN5. s^2

LN6. CV

LN7. R

LG1. Gráficos estadísticos. Histogramas, diagramas de barras, de puntos, y diagrama de caja.

LG2. Gráficos aclaratorios. Son gráficos cuya misión es explicitar algún concepto o actividad que se trabaja en el texto.

LG3. Gráficos ilustrativos. Su función es adornar o ilustrar las actividades.

En la tabla 27 se va a analizar en qué textos aparecen los elementos lingüísticos textuales y notacionales que aparecen en los textos.

Tabla 27. Elementos lingüísticos que aparecen en los libros de texto

Elemento lingüístico	3A	3S	3O	3SM	4AA	4BA	4AS	4BS	4AO	4BO	4ASM	4BSM
LT1		X		X								
LT2		X		X	X	X	X	X	X	X	X	X
LT3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
LT4	X	X	X	X			X	X	X	X		X
LT5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

Elemento lingüístico	3A	3S	3O	3SM	4AA	4BA	4AS	4BS	4AO	4BO	4ASM	4BSM
LT6	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X
LT7			X									
LT8				X						X	X	X
LT9	X	X	X	X			X	X	X	X	X	X
LN1	X	X	X		X	X	X	X	X	X		
LN2			X									
LN3			X	X							X	X
LN4		X	X		X	X	X	X	X	X		
LN5			X	X							X	X
LN6	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X
LN7		X	X				X	X	X	X	X	X

En esta tabla se observan dos aspectos interesantes. En primer lugar, algunos elementos aparecen de forma textual y no de forma notacional o al revés, esto sucede porque algunos libros definen un concepto de forma textual, pero no añaden la fórmula, aunque si un ejemplo gráfico. Un ejemplo puede ser 3A con el rango (preceptivo en el currículum) que se muestra en la imagen 60.

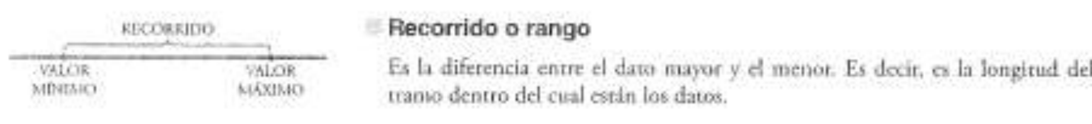


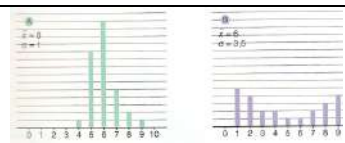
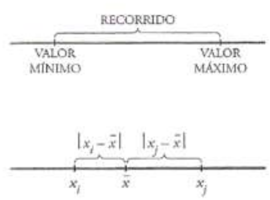
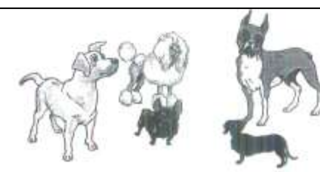
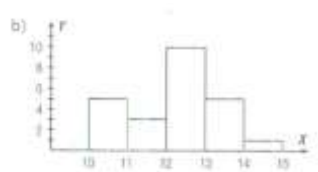
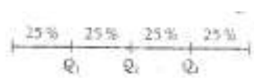
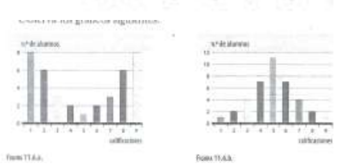
Figura 60. Definición del rango en 3A

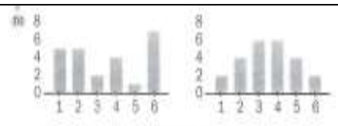
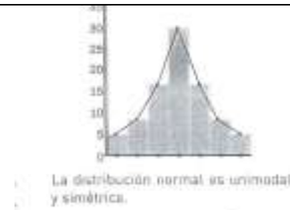
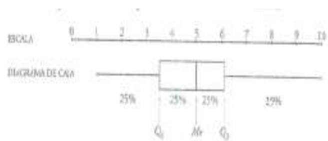
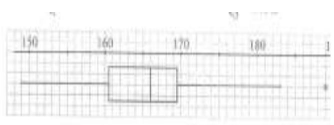
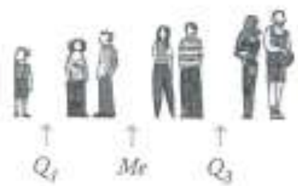
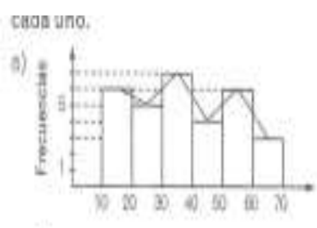
En el próximo apartado se analizarán los conceptos y las diferentes definiciones que se hacen y se diferenciarán las definiciones textuales de las fórmulas y se volverá a ver este efecto.

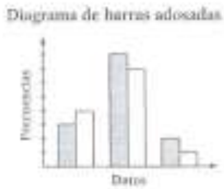
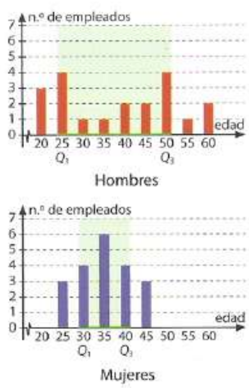
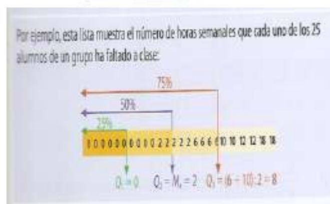
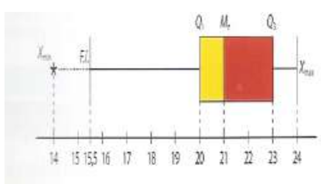
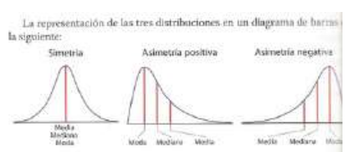
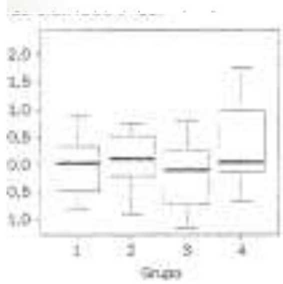
Otro aspecto destacable es el uso de la notación s en los libros de SM para la desviación típica y σ en el resto, que como ya se indicaba en el capítulo 1 hacen alusión a conceptos diferentes, en este caso a la desviación típica muestral y poblacional, así dependiendo del tipo de datos que se utilicen en el ejemplo y en las situaciones se debería utilizar uno u otro.

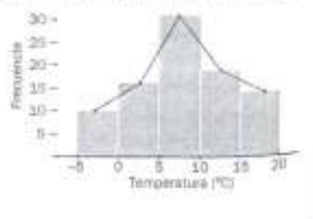
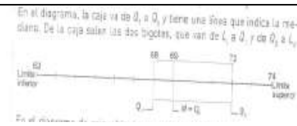
En la tabla 28 se va a mostrar un ejemplo de cada texto de cada uno de los tipos de gráficos que aparecen.

Tabla 28. Ejemplos de gráficos en los textos

Libro de texto	LG1	LG2	LG3
3A			
3S			
3O			

Libro de texto	LG1	LG2	LG3
3SM			
4AA			
4BA			
4AS			

<table>
<tr><th>Libro de texto</th><th>LG1</th><th>LG2</th><th>LG3</th></tr>
<tr><td>4BS</td><td>
</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>4AO</td><td>
</td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>4BO</td><td></td><td>
</td><td></td></tr>
<tr><td>4ASM</td><td>
</td><td>
</td><td></td></tr>
</table>

Libro de texto	LG1	LG2	LG3
4BSM			 Gustav Fechner (1801-1887)

Con este breve análisis del lenguaje gráfico se quiere poner de manifiesto que todos los textos incluyen y cuidan los gráficos, incluyendo ejemplos de los tres tipos, la excepción en este punto son 4AO y 4BO que no contienen gráficos de tipo 3, que aporta amenidad y ayuda a aclarar conceptos. Este aspecto se podría analizar más adelante cuando se estudie la idoneidad afectiva, pero es difícil de cuantificar, por tanto, se hará con las situaciones – problema. Además, tal y como veíamos en el capítulo 3, Howson (2013) indica que los libros de texto de matemáticas deben tener ilustraciones que faciliten la comprensión y centren la atención de los estudiantes, y como podemos comprobar, no todos los textos cumplen estos requisitos.

6.5.3. Conceptos.

En este apartado se van a analizar las definiciones de las diferentes medidas de dispersión, solo se va a incluir en la codificación una definición textual concreta y algunas fórmulas, pero no las de todos y cada uno de los textos teniendo en cuenta lo que señalaban Estepa y Ortega, (2005a).

> Aunque las definiciones son equivalentes, obviamente se complementan y completan las concepciones que el estudiante puede obtener en el proceso de estudio. Pero a algunos estudiantes, al principio, les pueden parecer distintas. Además, ningún libro contiene todas las definiciones de manera explícita, aunque sí de manera implícita. Estos dos

hechos pueden dificultar los aprendizajes. Cada definición enfatiza el trabajo que se desarrollará a continuación en cada libro, lo que es un indicador del desarrollo posterior del tema. (p.14).

Es decir, las definiciones que dan los textos son equivalentes, sin embargo, es cierto, que como se observa en el análisis de los elementos anteriores algunas definiciones complementan a otras y hablan del enfoque que el texto da al tema de la dispersión, aun así, no tiene sentido incluir todas las diferentes definiciones cuando son equivalentes, así que solo se consignarán las diferencias más significativas.

En la tabla 29 se puede ver la codificación para cada concepto.

Tabla 29. Codificación de los conceptos

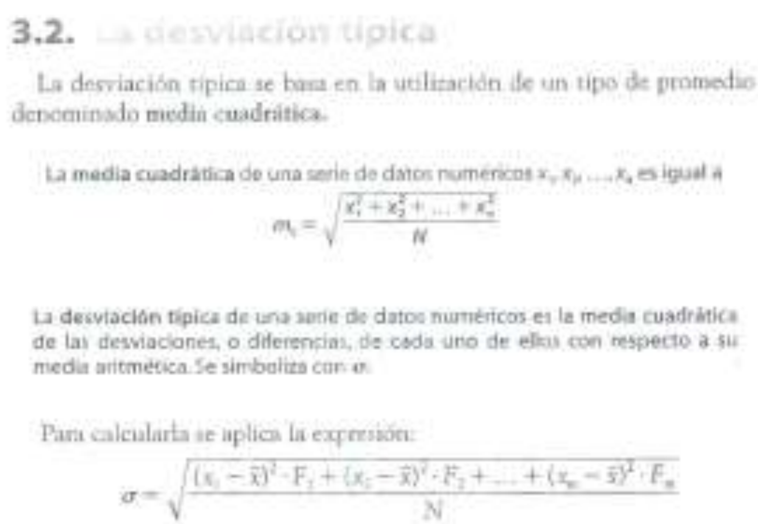
Concepto	Definición
Rango	D1. Es la diferencia entre el dato mayor y el menor.
	D2. Fórmula. R = Máx - Min
Varianza	D3. Es el promedio de las distancias al cuadrado de los datos a la media.
	D4. Es la media de los cuadrados de las desviaciones.
	D5. Fórmula. $\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}=\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$
Desviación típica	D6. Es la raíz cuadrada positiva de la varianza.
	D7. Fórmula. $\sigma=\sqrt{varianza}$
	D8. Fórmula. $\sigma=\sqrt{\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum f_i}}$
Coeficiente de variación	D9. Es el cociente entre la desviación típica y la media.
	D10. Fórmula. $C.V.=\frac{\sigma}{\bar{x}}$
	D11. Sirve para comparar la dispersión en conjuntos de datos heterogéneos.
Desviación media	D12. Es la media de los valores absolutos de las diferencias de cada uno de los datos con respecto a la media aritmética.
	D13. Fórmula. $DM=\frac{\lvert x_1-\bar{x}\rvert+\lvert x_2-\bar{x}\rvert+\cdots+\lvert x_n-\bar{x}\rvert}{n}=\frac{\sum\lvert x_i-\bar{x}\rvert}{n}$

En la tabla 30 se mostrará si aparecen o no las diferentes definiciones, después se realizará un breve comentario sobre las incidencias más llamativas, en los casos, por ejemplo, en los que no aparezca alguna de las medidas que si lo haga en el currículum.

Tabla 30. Conceptos que aparecen en los libros de texto

Concepto	3A	3S	3O	3SM	4AA	4BA	4AS	4BS	4AO	4BO	4ASM	4BSM
D1	X	X		X			X	X	X	X	X	X
D2		X					X	X	X	X		X
D3	X		X		X	X			X	X	X	X
D4		X		X			X	X				
D5	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X
D6	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X
D7	X				X	X			X	X		
D8	X	X	X				X	X				
D9	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X
D10	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X
D11		X		X			X	X		X	X	X
D12	X	X	X				X	X				
D13	X	X	X				X	X				

Uno de los aspectos más interesantes en cuanto a las definiciones es que no en todos los libros se introducen de la misma forma. En 3O se explica la desviación típica a partir de la media cuadrática y no de la varianza, de hecho, define la varianza a través de la desviación típica, en lugar de al revés, esto se puede apreciar en la figura 61.



3.2. La desviación típica

La desviación típica se basa en la utilización de un tipo de promedio denominado **media cuadrática**.

La media cuadrática de una serie de datos numéricos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ es igual a

$$m_c = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{N}}$$

La desviación típica de una serie de datos numéricos es la media cuadrática de las desviaciones, o diferencias, de cada uno de ellos con respecto a su media aritmética. Se simboliza con σ.

Para calcularla se aplica la expresión:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot F_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot F_2 + \ldots + (x_n - \bar{x})^2 \cdot F_n}{N}}$$

Figura 61. Exposición de la desviación típica en 3O

En las tablas 31 y 32 se verá cómo afecta esta construcción al número de fórmulas y expresiones de la varianza y la desviación típica en este libro.

Este mismo libro tampoco incluye el rango, que como se vio en el capítulo 2, es preceptivo para este curso.

Es interesante volver a hacer hincapié en que algunos textos no desarrollan conceptos que son preceptivos según el currículum, esto se puede deber en parte, a que, tal y como se indica en EFE ECONOMÍA (2014) desde 2006 se ha eliminado la supervisión que hacía el Ministerio de Educación de los libros, en la que revisaba que el curriculum estuviese debidamente desarrollado en los textos entre otras cosas. La LOE dice actualmente en su disposición adicional cuarta, apartado dos

> 2. La edición y adopción de los libros de texto y demás materiales no requerirán la previa autorización de la Administración educativa. En todo caso, éstos deberán adaptarse al rigor científico adecuado a las edades de los alumnos y al currículo aprobado por cada Administración educativa. (MEC, 2006, p.86)

Esta disposición adicional cuarta no ha sido modificada en la LOMCE (MECD, 2013), es decir, sigue vigente. Posteriormente se analizará la idoneidad didáctica de la enseñanza de las medidas de dispersión en los libros de texto, en ese análisis se pondrá de manifiesto de nuevo este problema, este análisis nos dará una visión global de cómo las medidas de dispersión se enseñan en los libros.

Para profundizar en este análisis se va a incluir las diferentes fórmulas que se emplean para la varianza y la desviación típica en los diferentes textos. Este análisis se hace interesante porque Estepa y Ortega (2005b) encontraron 19 fórmulas diferentes para la varianza y 20 para la desviación típica en el estudio del significado de referencia de estas medidas de dispersión. Estas fórmulas se muestran en las tablas 32 y 33.

Tabla 31. Diferentes fórmula para la varianza que aparecen en los textos

Libro	Varianza
3A	$varianza = \frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$ $varianza = \frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$
3S	$\sigma^2 = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}$
3O	No presenta fórmula
3SM	$s^2 = \frac{f_1(x_1-\bar{x})^2+f_2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+f_n(x_n-\bar{x})^2}{f_1+f_2+\cdots+f_n}$ $s^2 = \frac{f_1x_1^2+f_2x_2^2+\cdots+f_nx_n^2}{f_1+f_2+\cdots+f_n} - \bar{x}^2$
4AA	$Var = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}$ $Var = \frac{\sum f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$
4BA	$Var = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}$ $Var = \frac{\sum f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$
4AS	$\sigma^2 = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}$ $\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$
4BS	$\sigma^2 = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}$ $\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$
4AO	$\sigma^2 = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}$ $\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$
4BO	$\sigma^2 = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}$ $\sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{N} - \bar{x}^2$
4ASM	$s^2 = \frac{f_1(x_1-\bar{x})^2+f_2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+f_n(x_n-\bar{x})^2}{f_1+f_2+\cdots+f_n} = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum f_i}$ $s^2 = \frac{\sum f_i {x_i}^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2$
4BSM	$s^2 = \frac{f_1(x_1-\bar{x})^2+f_2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+f_n(x_n-\bar{x})^2}{f_1+f_2+\cdots+f_n} = \frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum f_i}$ $s^2 = \frac{\sum f_i {x_i}^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2$

En esta tabla se aprecia que hay cuatro expresiones básicas para la varianza, dos expresiones para datos no agrupados, simplificada y sin simplificar, y las mismas dos versiones para datos agrupados. Sin embargo, además cada libro opta por su propia nomenclatura, utilizando la palabra varianza, σ^2 o s^2 según la editorial, y utilizando N o la suma de f_i en los denominadores, esto genera un ecosistema en el que cada fórmula es, al menos, ligeramente diferente de las demás.

En la tabla 32 se muestran las fórmulas de la desviación típica para los textos estudiados.

Tabla 32. Diferentes fórmulas para la desviación típica que aparecen en los textos

Libro	Varianza
3A	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{\sum f_i}}$
	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{\sum f_i} - \bar{x}^2}$
	$\sigma = \sqrt{varianza}$
3S	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}}$
3O	$\sigma = \sqrt{\frac{F_1(x_1-\bar{x})^2+F_2(x_2-\bar{x})^2+\cdots+F_m(x_m-\bar{x})^2}{N}}$
	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum F_i(x_i-\bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}$
	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum F_i {x_i}^2}{N} - \bar{x}^2} = \sqrt{\sum {f_i}^2 x_i^2 - \bar{x}^2}$
3SM	No presenta fórmula
4AA	$\sigma = \sqrt{varianza}$
4BA	$\sigma = \sqrt{varianza}$
4AS	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}}$
	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
4BS	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i-\bar{x})^2}{N}}$
	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
4AO	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
4BO	$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$
4ASM	$s = \sqrt{s^2}$
4BSM	$s = \sqrt{s^2}$

En la tabla 32 se aprecia que frente a la amplia variedad que se daba en la varianza, esto no se repite en la desviación típica, ya que la mayoría de los textos la referencian a la varianza, salvo en 3O que como se comentaba en la figura 60 hace una construcción diferente del concepto, obteniendo la varianza a partir de la desviación típica, además este texto es, en los dos casos, varianza y desviación típica, el que más tipos diferentes de fórmulas presenta.

Presentar diferentes fórmulas no es en sí algo malo, el problema es que no se justifican, salvo porque facilitan los cálculos, de donde y por qué surgen, aunque los alumnos tienen conocimientos algebraicos suficientes para derivar unas de otras.

6.5.4. Procedimientos.

Los procedimientos explican cómo utilizar un concepto en un caso práctico, es decir, cómo aplicar los conceptos para resolver situaciones – problema o ejercicios. Suelen venir explicitados en la exposición o en los ejercicios resueltos que se estudiaban en la microestructura. En la tabla 33 se van a codificar los diferentes procedimientos que se han hallado en los libros de texto.

Tabla 33. Codificación de los procedimientos

Código	Procedimiento
PR1	Para calcular el rango se resta al valor mayor el valor menor
PR2	Para calcular la desviación se resta al valor la media
PR3	Para calcular la desviación media se calcula la media de los valores absolutos de las diferencias entre los datos y la media
PR4	Para calcular la varianza se calcula la media de los cuadrados de las diferencias entre los datos y la media
PR5	Para calcular la desviación típica se realiza la raíz cuadrada positiva de la varianza
PR6	Para comparar dos distribuciones de datos se calcula el coeficiente de variación y el que tenga mayor coeficiente de variación tendrá mayor dispersión
PR7	El coeficiente de variación se calcula dividiendo la desviación típica entre la media
PR8	El recorrido intercuartílico se calcula restando al tercer cuartil el primero

Código	Procedimiento
PR9	Para calcular el diagrama de caja se debe: - Realizar un rectángulo que abarque el espacio de Q_1 a Q_3 - En ese rectángulo se marca la mediana - Para calcular el bigote de la izquierda, se calcula el recorrido intercuartílico: RIC = Q_3-Q_1. Se calcula Q_1 - 1'5 RIC, si Q_1 - 1'5 RIC < Mín el bigote de la izquierda se traza desde Q1 hasta el mínimo. Si Q_1 - 1'5 RIC > Mín, se traza desde ese valor a Q_1. Los valores comprendidos entre el mínimo y Q_1 - 1'5 RIC se denominan valores atípicos. - Para calcular el bigote de la derecha, se calcula el recorrido intercuartílico: RIC = Q_3-Q_1. Se calcula Q_3 + 1'5 RIC, si sobrepasa el máximo, el bigote de la derecha se traza desde Q_3 hasta el máximo. Si Q_3 + 1'5 RIC < Máx, se traza desde ese valor a Q_3. Los valores comprendidos entre Q_3 + 1'5 RIC y el máximo se denominan valores atípicos.

Los procedimientos deben estar claramente expuestos en los libros de texto, ya que ayudan al alumno a comprender el uso del concepto, y forma parte de la triple faceta de los contenidos, que son conceptuales, procedimentales y actitudinales.

En la tabla 34 se indican que procedimientos vienen o no detallados en cada libro de texto.

Tabla 34. Procedimientos que se exponen en los diferentes libros de texto

Proc.	3A	3S	3O	3SM	4AA	4BA	4AS	4BS	4AO	4BO	4ASM	4BSM
PR1	X			X			X	X	X	X	X	X
PR2				X								
PR3	X		X				X	X				
PR4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
PR5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
PR6	X	X		X						X	X	X
PR7	X	X		X	X	X	X	X		X	X	X
PR8									X	X		
PR9					X	X	*	*		X	X	X

*Como se indicaba en 6.4.2 se muestra el procedimiento de forma breve y poco clara.

En los textos de 3º de ESO no aparecen PR8 y PR9 debido a que son procedimientos de 4º de ESO, sin embargo, los procedimientos PR1 y PR5 sí que son preceptivos en 3º de ESO y ya en el apartado anterior se apreciaba que en 3O no aparecían definiciones asociadas al rango y ahora tampoco aparecen sus procedimientos, ya que no se hace referencia a él. En 3S sí que aparecían las definiciones asociadas al rango, pero no se plantea el cómo se usa, a pesar de que su uso es sencillo.

En los textos de 4º de ESO se presentan los procedimientos que la ley exige, pero es conveniente para entender mejor el procedimiento PR9, procedimiento asociado al diagrama de caja, trabajar el procedimiento PR8, recorrido intercuartílico, que como se puede observar, no se trabaja en ninguno de los textos específicamente, salvo en 4AO y 4BO.

Finalmente, se han incluido en la tabla los procedimientos PR2 y PR3, asociados a las diferencias de los datos con la media, porque se considera que trabajar estos procedimientos permite una mejor comprensión, tanto de los conceptos asociados a la desviación típica y la varianza como de los procedimientos asociados, PR4 y PR5.

6.6.5. Propiedades.

Se pueden diferenciar tres tipos de propiedades en el estudio de las medidas de dispersión, las propiedades numéricas, algebraicas y estadísticas.

Las propiedades numéricas (PN) son aquellas que se refieren al tipo de números que se obtienen de las medidas de dispersión y a sus unidades.

Las propiedades algebraicas (PA) se refieren a la forma de la fórmula.

Las propiedades estadísticas (PE) son aquellas que están relacionadas con el significado de la medida de dispersión concreta.

Atendiendo a estos tres tipos de propiedades se codifican las que aparecen en los textos tal y como se muestra en la tabla 35.

Tabla 35. Codificación de las propiedades

Código	Propiedad
PN1	La varianza y la desviación típica son no negativas
PN2	La varianza se mide en unidades cuadradas de los datos y la desviación típica en la misma unidad que los datos
PN3	La desviación media es no negativa
PN4	El coeficiente de variación es no negativo
PN5	El coeficiente de variación es adimensional
PN6	El rango se mide en las mismas unidades que los datos
PA1	El valor de la varianza y la desviación típica dependen de cómo están agrupados los datos
PA2	La varianza es invariante ante cambio de origen
PA3	La varianza y la desviación típica tienen propiedades algebraicas y aritméticas más cómodas que la desviación media.
PA4	El rango es la medida de dispersión más fácil de calcular
PE1	La suma de las desviaciones respecto a la media es 0
PE2	La varianza y la desviación típica son nulas si y solo si todos los datos son iguales
PE3	Un mayor valor de la varianza y la desviación típica significa mayor dispersión. El valor cero significa ausencia de dispersión.
PE4	En el cálculo de la varianza y la desviación típica intervienen todos los valores que toma la variable.
PE5	La modificación de algunos datos y añadir o eliminar algunos datos producen cambios en la varianza y desviación típica.
PE6	Los rangos miden la dispersión sin referencia a promedios. La desviación típica y la varianza miden la dispersión de las observaciones alrededor de la media.
PE7	Si no se recomienda la media como medida de tendencia central, tampoco se debe recomendar la desviación típica y la varianza como medidas de dispersión. Esto es especialmente cierto en las distribuciones asimétricas, en las que es preferible utilizar la mediana y el rango intercuartílico.

En la tabla 36 se muestran las diferentes propiedades que aparecen en los libros de texto.

Tabla 36. Propiedades que aparecen en los libros de texto

Propiedad	3A	3S	3O	3SM	4AA	4BA	4AS	4BS	4AO	4BO	4ASM	4BSM
PN1		X		X			X	X	X	X	X	X
PN2	X			X	X	X					X	X
PN3			X	X								

Propiedad	3A	3S	3O	3SM	4AA	4BA	4AS	4BS	4AO	4BO	4ASM	4BSM
PN4									X	X		
PN5	X			X								
PN6	X			X							X	X
PA1	X	X	X	X			X	X	X	X	X	X
PA2	X				X	X						
PA3			X	X								
PA4	X	X		X			X	X	X	X	X	X
PE1				X								
PE2				X								
PE3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
PE4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
PE5	X				X	X						
PE6	X	X					X	X	X	X	X	X
PE7									X	X		

Hay algunas propiedades que aparecen en todos los libros de texto o en la mayoría, son las propiedades estadísticas 3 y 4, que indican que intervienen todos los valores y como crece o decrece la desviación típica, algunas otras propiedades estadísticas no aparecen en todos los libros porque algunos libros de texto no contienen las medidas de dispersión a las que van asociadas estas propiedades.

Sin embargo, las propiedades numéricas y algebraicas aparecen menos, por ejemplo, tan solo 3A, 4AAy 4BA (Anaya) trabaja la propiedad de que la varianza y la desviación típica son invariantes ante cambio de origen, y lo hacen en los ejercicios, no en la parte de exposición, otro punto interesante a comentar como breve conclusión de este aspecto es que pocos libros trabajan las propiedades que hablan de cuando las medidas son nula, en este caso PE1 y PE2, solo un texto indica claramente que la suma de las desviaciones es 0, y aunque puede ser evidente hay que mostrarlo, los demás textos no lo indican ni implícitamente, igualmente es el mismo texto el que trata sucintamente que la varianza pueda ser 0 si todos los datos son iguales, aunque no lo expresa explícitamente.

En general, hay 4 propiedades que sí se trabajan en la mayoría de los textos, que son la no negatividad de la desviación típica, no expresada de forma tan explícita para la varianza, las propiedades estadísticas 3 y 4, como se indicaba en el párrafo superior y la propiedad estadística 1, es decir, la idea de que la varianza y desviación típica dependen de cómo están agrupados los valores en torno a la media. El resto de propiedades, y se han citado 17, se trabajan solo en algunos textos, siendo probablemente este aspecto uno de los que permite una mejor comprensión de las medidas de dispersión y su comportamiento.

6.5.6. Argumentos.

Los argumentos relacionan los diferentes elementos de significado entre sí. En los textos podemos encontrar argumentos basados en propiedades de números y operaciones (APNO), argumentos con ejemplos, contraejemplos y comprobaciones (AECC), argumentos apoyados en ostensivos (AAO), argumentos verbales deductivos (AVD) y argumentos algebraicos deductivos (AAD).

Los argumentos sobre propiedades de números y operaciones son los que relacionan las operaciones con sus propiedades y con los números que se trabajan, como al indicar que una fórmula es más sencilla que otra de emplear.

Los argumentos de ejemplos, contraejemplos y comprobaciones, se pueden caracterizar, como se indica en Estepa y Ortega (2005a), por ejemplo

> cuando se decide la homogeneidad de dos conjuntos de datos de la misma media, comparando las desviaciones típicas. Esta situación sirve de contraejemplo para comprobar que la igualdad de medias de dos conjuntos de datos no implica la misma homogeneidad, en cuanto a la dispersión. (p. 18).

Los argumentos que se apoyan en ostensivos son los que se apoyan en gráficos, imágenes y tablas. Y por último los argumentos deductivos, verbales o algebraicos, es cuando se hace alguna deducción sobre las fórmulas, ya sea de forma textual, o de forma algebraica.

En la tabla 37 se ha cuantificado las veces que aparece cada tipo de argumento en los textos.

Tabla 37. Frecuencia de los argumentos por libros de texto

Argumentos	3A	3S	3O	3SM	4AA	4BA	4AS	4BS	4AO	4BO	4ASM	4BSM
APNO	8	5	3	8	5	5	5	5	5	6	8	8
AECC	13	9	7	10	8	8	14	14	6	9	11	12
AAO	15	7	7	13	14	14	9	9	9	14	14	15
AVD	4	2	1	3	2	2	3	3	2	3	3	3
AAD	3	1	6	4	1	1	1	1	1	2	4	4

Se aprecia en la tabla 37 que la mayoría de los libros mantienen un número de argumentos elevados sobre los ejemplos y apoyados en ostensivos (imágenes, gráficos o tablas) y es hasta ciertos punto lógico, debido a que la mayoría de demostraciones se hacen mediante ejemplos y gráficas, sin embargo, a excepción 3O, que ya se veía en otros elementos de significado que era un texto que presentaba gran variedad de fórmulas, lo que hace que presente muchos argumentos algebraicos deductivos, las deducciones que se realizan en los libros son escasas.

6.6. Idoneidad epistémica

En este apartado vamos a tratar de evaluar la idoneidad epistémica de los libros de texto, para ello vamos a recurrir a la tabla 7, en la que, para analizar la idoneidad epistémica, Godino (2013) proponía una serie de descriptores para cada elemento de significado.

6.6.1. Situaciones problema.

El descriptor de este elemento indica que para ser adecuadas las diferentes situaciones problemas deben responder a una “selección de una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. Propuesta de situaciones de generación de problemas.” (Godino, 2013, p.119)

Para evaluar este aspecto en los textos vamos a contabilizar, la cantidad y variedad de ejercicios y problemas, así como el número de problemas puros. Ciertamente valorar netamente la idoneidad es muy difícil, por tanto, lo vamos a hacer de forma comparativa con los textos del mismo nivel, para tratar de dilucidar cual texto tiene unas condiciones de idoneidad más alta frente al resto de editoriales.

6.6.1.1. Situaciones problema en 3A (3º de ESO Anaya)

Observando la tabla 24 el texto de Anaya presenta 41 ejercicios y problemas sobre medidas de dispersión. Dentro de ellos 29 problemas y 12 ejercicios. La mitad de ellos se corresponde con el tipo 2 que se indicaba en el apartado 6.5.1., variación por desviaciones, tal y como se advertía en Del-Pino y Estepa (2017). Hay 7 tipos diferentes de situaciones y ejercicios. Se puede percibir que a pesar de tener un número relativamente alto de ejercicios y situaciones estas no son muy variadas y por tanto es difícil ajustarlas al descriptor en el sentido de que no son una muestra representativa de situaciones, ya que además se deja algunos aspectos prescriptivos de la unidad por tratar.

Es el segundo texto con más ejercicios detrás de SM, y el tercero (de cuatro) en variedad de ejercicios. Con respecto al número de problemas empata en primer lugar con

SM con 29 problemas. Por tanto, en este descriptor no se puede afirmar que sea más idóneo que el resto de los textos, ya que no recoge ni más cantidad, ni más variedad de ejercicios.

6.6.1.2. Situaciones problema en 3S (3º de ESO Santillana)

En la tabla 24 podemos observar que el texto de Santillana contiene 36 ejercicios y problemas sobre medidas de dispersión. Dentro de ellos 28 problemas y 8 ejercicios. Casi la mitad de ellos se corresponde con el tipo 2 al igual que en el texto de Anaya hay una preponderancia de este tipo de situaciones y ejercicios. En este caso el texto muestra 8 tipos diferentes de situaciones y ejercicios. El número de ejercicios y problemas es inferior al de otras editoriales y deja aspectos por cubrir de la unidad.

Es el tercer texto con más ejercicios, y el segundo (de cuatro) en variedad de ejercicios. Es también el tercer texto en número de problemas. Por tanto, en este descriptor no se puede afirmar que sea más idóneo que el resto de los textos, ya que queda tercero en todos los aspectos que se están valorando.

6.6.1.3. Situaciones problema en 3O (3º de ESO Oxford)

Observamos en la tabla 24 que el texto de Oxford contiene 27 ejercicios y problemas sobre medidas de dispersión. Dentro de ellos 19 problemas y 8 ejercicios. Más de la mitad de ellos (16) se corresponde con el tipo 2 al igual que en los textos precedentes hay una preponderancia de este tipo de situaciones y ejercicios. En este caso el texto muestra 5 tipos diferentes de situaciones y ejercicios. El número de ejercicios y problemas es inferior al de otras editoriales y deja aspectos por cubrir de la unidad.

Es el último texto en todos los indicadores que estamos valorando. Por tanto, en este descriptor se puede indicar que es el menos idóneo de los libros estudiados.

6.6.1.4. Situaciones problema en 3SM (3º de ESO SM)

En la tabla 24 se advierte que el texto de SM contiene 44 ejercicios y problemas sobre medidas de dispersión. Dentro de ellos 29 problemas y 15 ejercicios. Casi la mitad de ellos (20) se corresponden con el tipo 2 al igual que en los textos anteriores. En este caso el texto muestra 9 tipos diferentes de situaciones y ejercicios. Este texto cubre el espectro más amplio de tipos de situaciones.

Es el texto con más situaciones – problema y más variedad de estos, además de ser el texto que más problema propone.

Se puede afirmar que de entre los cuatro textos de tercero es el más idóneo en este descriptor.

6.6.1.5. Situaciones problema en 4AA (4º de ESO opción A Anaya)

En la tabla 25 se muestran las situaciones – problema para los textos de 4º de ESO de la opción A. El libro de Anaya contiene para las medidas de dispersión 21 problemas y ejercicios de 6 tipos diferentes de problemas y ejercicios. Casi la mitad, 9 de ellos, son de tipo 2, tal y como sucedía en los textos de 3º de ESO.

Es el libro con menos situaciones – problemas y con menos variedad, en este nivel es probablemente el que bajo este descriptor presenta una idoneidad más baja.

6.6.1.6. Situaciones problema en 4AS (4º de ESO opción A Santillana)

Observando la tabla 25 el texto de Santillana presenta 25 ejercicios y problemas sobre medidas de dispersión. Dentro de ellos 18 problemas y 7 ejercicios. La mitad de ellos (13) se corresponden con el tipo 2. Hay 7 tipos diferentes de situaciones y ejercicios.

Este texto está empatado con el siguiente en su propuesta de ejercicios, pero la propuesta de este texto es menos diversa, por tanto, lo vamos a considerar en 3ª posición para este descriptor de la idoneidad.

6.6.1.7. Situaciones problema en 4AO (4º de ESO opción A Oxford)

Se puede observar en la tabla 25 el texto de Oxford contiene 25 ejercicios y problemas sobre medidas de dispersión. Dentro de ellos 19 problemas y 6 ejercicios. Es llamativo que en este caso tan solo se presentan 8 problemas o ejercicios de tipo 2. Hay 8 tipos diferentes de situaciones y ejercicios.

Es el segundo texto con más ejercicios empatado con Santillana, pero presenta más variedad y una mejor distribución de estos. Por tanto, se va a considerar como la segunda opción.

6.6.1.8. Situaciones problema en 4ASM (4º de ESO opción A SM)

En la tabla 25 se puede observar que el libro de SM contiene 32 ejercicios y problemas sobre medidas de dispersión, todos ellos son problemas. 15 de ellos, casi la mitad, son de tipo 2. Hay 7 tipos diferentes de situaciones y ejercicios.

Este libro presenta una gran cantidad de problemas y bastante variados, por tanto, podemos considerarlo como el más idóneo en este aspecto para 4º de ESO opción A.

6.6.1.9. Situaciones problema en 4BA (4º de ESO opción B Anaya)

En la tabla 26 observamos que el libro de Anaya contiene 21 ejercicios y problemas sobre medidas de dispersión, 11 de ellos son problemas. 9, casi la mitad, son de tipo 2. Hay 6 tipos diferentes de situaciones y ejercicios.

Este libro es el que presenta menos cantidad y variedad de ejercicios, por tanto, es el menos idóneo para este descriptor.

6.6.1.10. Situaciones problema en 4BS (4º de ESO opción B Santillana)

En la tabla 26 advertimos que el libro de Santillana contiene 24 ejercicios y problemas sobre medidas de dispersión, 21 de ellos son problemas. 12, la mitad, son de tipo 2. Hay 7 tipos diferentes de situaciones y ejercicios.

Este libro, al igual que el anterior presenta pocos problemas y ejercicios y poco variados, su idoneidad es algo más alta que la anterior, pero se sitúa en tercer lugar para 4º de ESO opción B.

6.6.1.11. Situaciones problema en 4BO (4º de ESO opción B Oxford)

En la tabla 26 se puede observar que el libro de Oxford contiene 43 ejercicios y problemas sobre medidas de dispersión, 38 de ellos son problemas. 14, la tercera parte, son de tipo 2. Hay 8 tipos diferentes de situaciones y ejercicios.

Este libro presenta una gran cantidad de problemas y bastante variados, pero menos que el siguiente texto, por tanto, en este caso consideramos que hay un empate entre los textos de Oxford y SM.

6.6.1.12. Situaciones problema en 4BSM (4º de ESO opción B SM)

Contamos en la tabla 26 que el libro de SM contiene 38 ejercicios y problemas sobre medidas de dispersión, 33 de ellos son problemas. 16, casi la mitad, son de tipo 2. Hay 10 tipos diferentes de situaciones y ejercicios.

Este libro presenta una gran cantidad de problemas y bastante variados, por tanto, podemos considerarlo como el más idóneo junto con el de Oxford en este aspecto para 4º de ESO opción B.

6.6.2. Lenguaje.

El descriptor de este elemento indica que para ser adecuado el lenguaje debe "Usar diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico y conversiones entre los mismos)" contener un "nivel de lenguaje adecuado a quienes se dirige" y una "propuesta de situaciones de expresión e interpretación." (Godino, 2013, p.119)

Para evaluar este aspecto en los textos vamos a utilizar el lenguaje gráfico, en el que todos los textos presentan variedad, excepto los textos de 4º de Oxford (4AO y 4BO) y la cantidad de elementos lingüístico evaluados en el apartado 6.5.2. y que se sintetiza en la tabla 27.

De esta forma, para 3º de ESO los textos ordenados de más idóneo a menos idóneo serían: Con un empate en la primera posición 3S, 3O y 3SM, con 11 elementos lingüísticos diferentes, y a continuación 3A con tan solo 8.

Para 4º de ESO opción A: en primer lugar, tenemos 4AS y 4ASM, con 10 elementos lingüísticos diferentes, a continuación, 4AA con tan solo 8 y por último 4AO que a pesar de tener 10 elementos lingüísticos diferentes no incluye gráficos de los tres tipos.

Para 4º de ESO opción B: en primer lugar, tenemos 4BSM con 11 elementos lingüísticos, a continuación, 4BS, con 10 elementos lingüísticos diferentes, después, 4BA con tan solo 8 y por último 4BO que a pesar de tener 10 elementos lingüísticos diferentes no incluye gráficos de los tres tipos.

6.6.3. Elementos regulativos.

El descriptor de este elemento indica que para ser adecuado los elementos regulativos deben contener una “presentación de los enunciados y procedimientos fundamentales del tema según el significado de referencia y el nivel educativo.” (Godino, 2013, p.119)

Para evaluar este aspecto en los textos vamos a utilizar los conceptos y procedimientos que se exponen en las tablas 30 y 34.

De esta forma, para 3º de ESO los textos ordenados de más idóneo a menos idóneo serían: En primer lugar, 3A con 10 conceptos y 6 procedimientos, en segundo lugar, 3S con 11 conceptos y 4 procedimientos, en tercer lugar, 3SM con 7 conceptos y 6 procedimientos y por último 3O con 4 conceptos y 3 procedimientos.

Para 4º de ESO opción A: en primer lugar, tenemos 4AS con 11 conceptos y 5 propiedades, a continuación, 4ASM con 7 conceptos y 6 procedimientos, en tercera posición 4AO con 8 conceptos y 4 procedimientos y finalmente 4AA que tan solo presenta 6 conceptos y 4 procedimientos.

Para 4º de ESO opción B: en primer lugar, tenemos un empate entre 4BS y 4BO el primero con 11 conceptos y 5 procedimientos y el segundo con 9 conceptos y 7 procedimientos, en tercer lugar, 4BSM con 8 conceptos y 5 procedimientos, en último lugar 4BA con 6 conceptos y 4 procedimientos.

6.6.4. Argumentos.

El descriptor de este elemento indica que para ser adecuado los argumentos deben tener como característica la "Adecuación de las explicaciones, demostraciones y comprobaciones al nivel educativo al que se dirigen." (Godino, 2013, p.119)

Para evaluar este aspecto en los textos vamos a utilizar los argumentos que se exponen en la tabla 37, ya que los argumentos son adecuados al nivel, de nuevo utilizaremos la cantidad de éstos para clasificar los textos.

De esta forma, para 3º de ESO los textos ordenados de más idóneo a menos idóneo serían: En primer lugar, 3A con 43 argumentos, en segundo lugar, 3SM con 38 argumentos y en último lugar, empatados, 3S y 3O con 24 argumentos.

Para 4º de ESO opción A: en primer lugar, tenemos 4ASM con 40 argumentos, a continuación, 4AS con 32 argumentos, en tercer lugar, 4AA con 30 argumentos y finalmente 4AO que tan solo presenta 23 argumentos.

Para 4º de ESO opción B: en primer lugar, se sitúa 4BSM con 42 argumentos, seguido de 4BO con 34 argumentos, 4BS con 32 argumentos y 4BA con 30.

6.6.5. Relaciones.

El descriptor de este elemento indica que para ser adecuadas las relaciones deben ser una "relación y articulación significativa entre los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan." (Godino, 2013, p.119)

Para evaluar este aspecto en los textos vamos a utilizar las microestructuras expositivas de la tabla 21, ya que en esta tabla se da cuenta de los elementos que están relacionados entre sí a lo largo del texto.

De esta forma, para 3º de ESO los textos ordenados de más idóneo a menos idóneo serían: En primer lugar, empatados 3A y 3SM, a continuación, 3S y por último 3O.

Para 4º de ESO opción A: en primer lugar, tenemos 4ASM y 4AA, a continuación, 4AS y por último 4AO.

Para 4º de ESO opción B: en primer lugar, se sitúa 4BO después 4BSM, 4BA y 4BS.

6.6.6. Resumen gráfico.

Para comparar los textos se va a utilizar un gráfico radial, en el que ordenaremos los textos por el área que abarca cada uno.

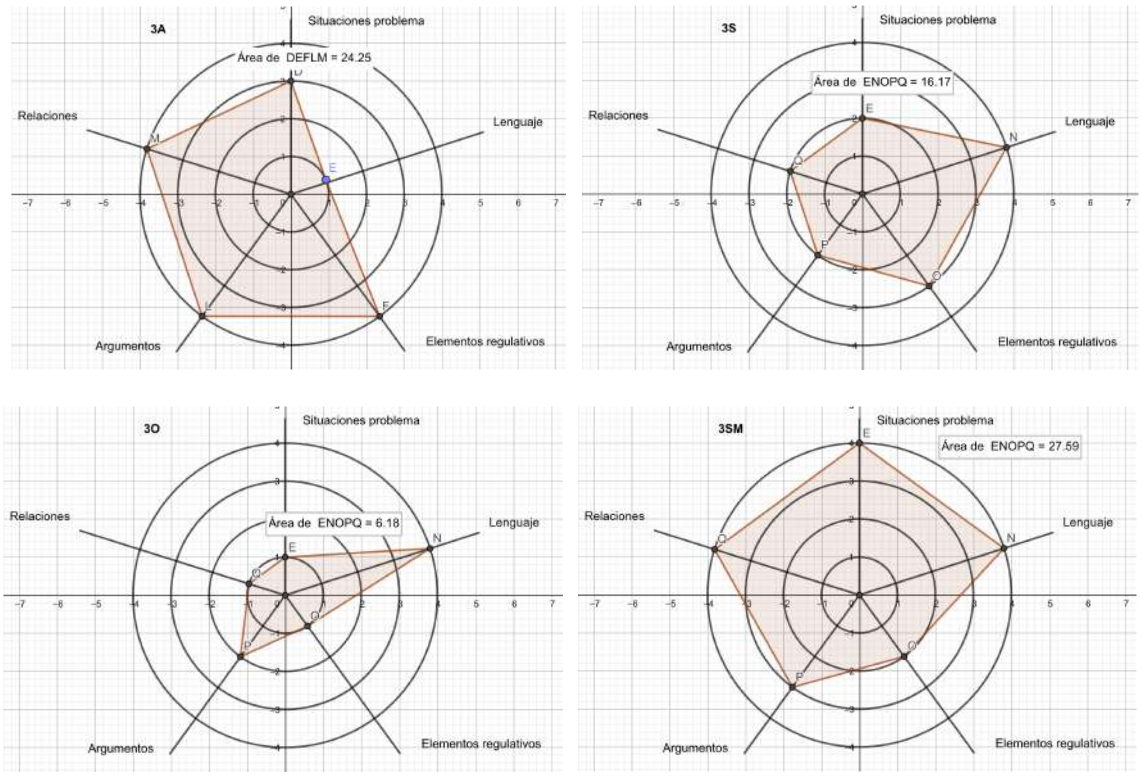
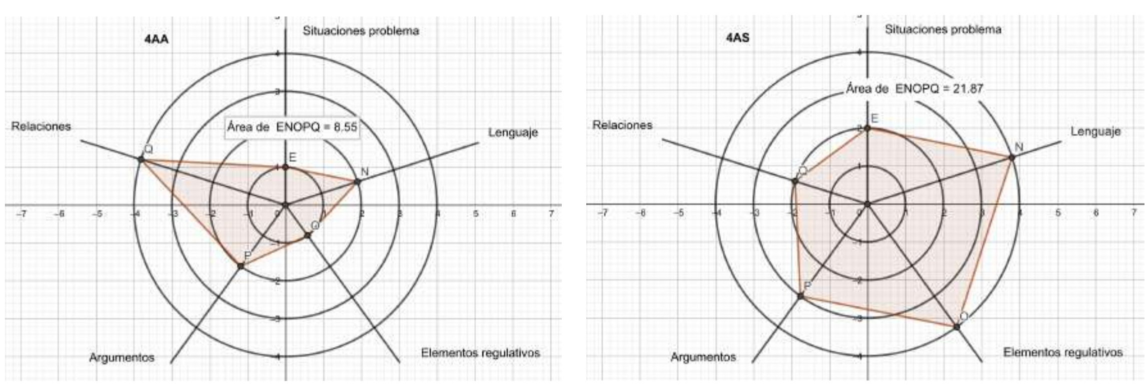


Figura 62. Gráficos radiales para la idoneidad epistémica de los textos de 3º de ESO

En los gráficos se ha incluido el área de cada polígono, se puede observar en la figura 62 que la idoneidad epistémica sigue el siguiente orden de mayor a menor idoneidad: 3SM, 3A, 3S y 3O.



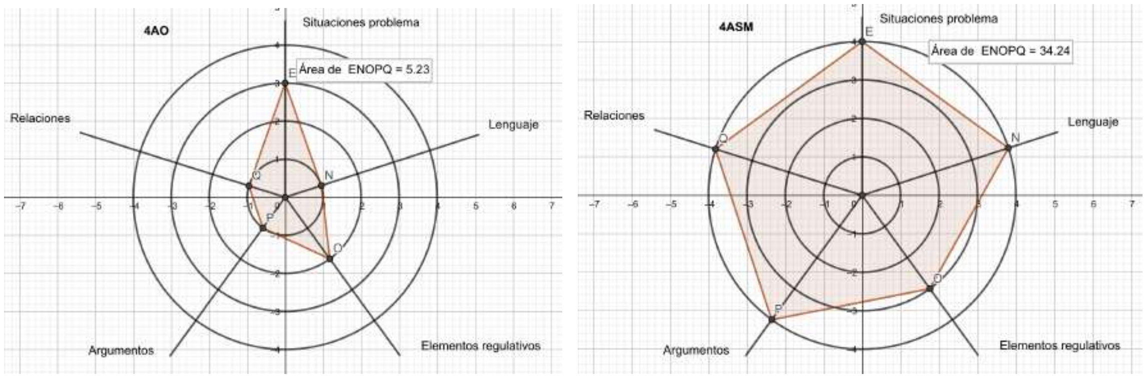


Figura 63. Gráficos radiales para la idoneidad epistémica de los textos de 4º de ESO A

En los gráficos se ha incluido el área de cada polígono, se puede observar en la figura 63 que la idoneidad epistémica sigue el siguiente orden de mayor a menor idoneidad: 4ASM, 4AS, 4AA y 4AO.

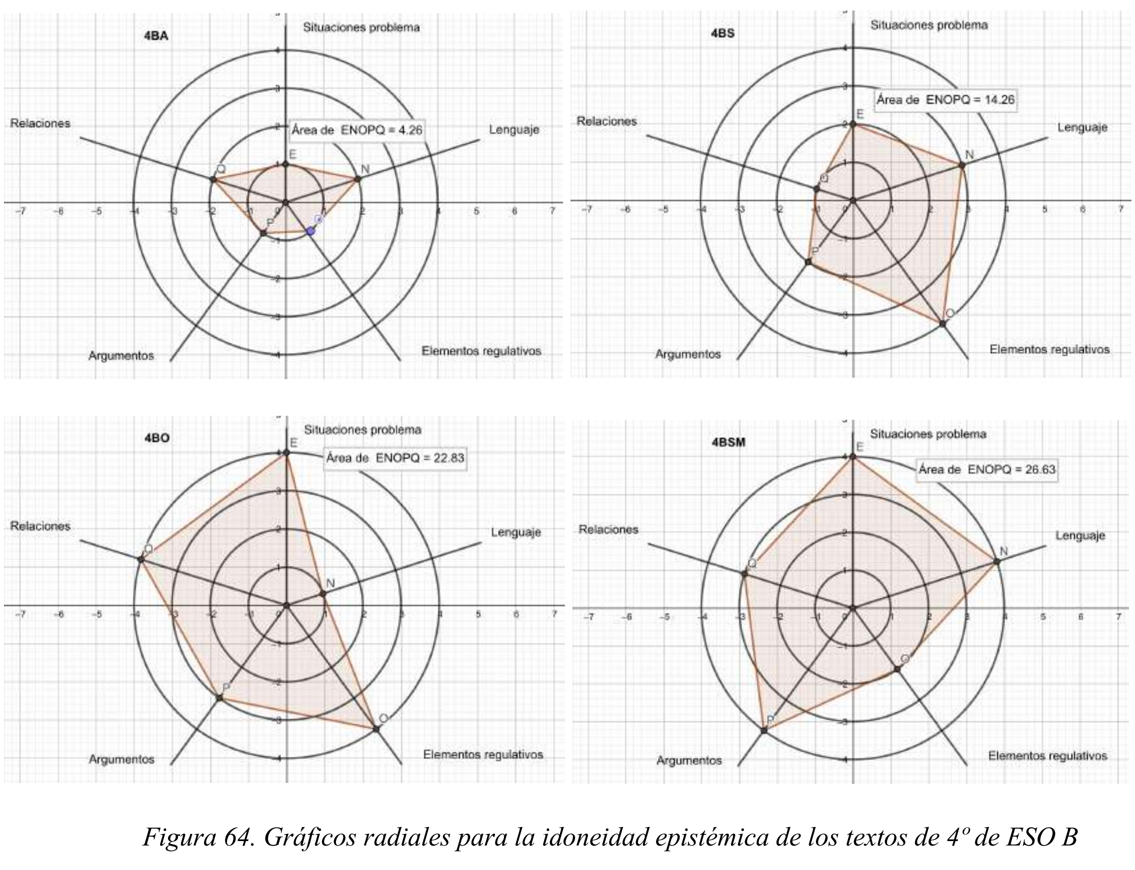


Figura 64. Gráficos radiales para la idoneidad epistémica de los textos de 4º de ESO B

En los gráficos se ha incluido el área de cada polígono, se puede observar en la figura 64 que la idoneidad epistémica sigue el siguiente orden de mayor a menor idoneidad: 4BSM, 4BO, 4BS y 4BA.

6.7. Idoneidad cognitiva

En este apartado vamos a evaluar la idoneidad cognitiva de la enseñanza, algunos apartados son difíciles de estudiar, puesto que el test que se ha realizado a los estudiantes es post instrucción, pero vamos a intentar dar respuesta al mayor número posible.

6.7.1. Conocimientos previos.

El descriptor de este elemento indica que para analizar este apartado debemos poner el foco en si “los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema (bien se ha estudiado anteriormente o el profesor ha planificado su estudio). Los contenidos pretendidos se pueden alcanzar (tienen una dificultad manejable) en sus diversas componentes.” (Godino, 2013, p.121)

En este caso, y al situar la unidad como última de los cursos 3º y 4º de ESO se garantiza que los conocimientos previos son los adecuados, ya que se han trabajado las unidades de aritmética, álgebra y funciones, que proporcionan los conocimientos necesarios para realizar las operaciones necesarias y las representaciones gráficas correspondientes para el análisis de los datos que se les ofrecen.

Además de estos contenidos trabajados con anterioridad a lo largo del curso, los estudiantes conocen algunos de los procedimientos que se trabajan en la unidad, como la media, de su uso cotidiano.

Por tanto, se puede afirmar que los conocimientos previos que tienen los alumnos son adecuados.

Con respecto a la dificultad de estos, como se podremos observar en los resultados de la prueba que se muestra en el siguiente capítulo, los contenidos acerca de las medidas de tendencia central son fácilmente alcanzables por los estudiantes, pero los contenidos sobre las medidas de dispersión y su representación gráfica son más complejos para los estudiantes. Esto también se indicaba en la mayor parte de la bibliografía expuesta en capítulos anteriores.

6.7.2. Adaptación curricular.

El descriptor de este elemento indica que para analizar este apartado debemos centrarnos en si “Se incluyen actividades de ampliación y refuerzo. Se promueve el acceso y el logro de todos los estudiantes.” (Godino, 2013, p.121)

Para ello vamos a observar la tabla 20 con las microestructuras para los capítulos, y podemos ver que, aunque todos los textos proponen ejercicios finales y propuestas de investigación, que suelen ser actividades de ampliación, no todos los textos proponen actividades introductorias o mapas mentales que sirven para el refuerzo de contenidos, estos textos, que serían menos idóneos bajo este descriptor serían 3A y 3S para 3º de ESO, 4AA, 4AS y 4AO para 4º opción A y 4BA y 4BO para 4º de ESO opción B.

6.7.3. Conclusiones.

Como hemos podido ver, los conocimientos previos del alumnado se ajustan a lo necesario, siendo un punto de especial dificultad las medidas de dispersión, la mayoría de los textos presentan actividades de desarrollo y ampliación, aunque algunos no presentan actividades introductorias. Por último, el modelo de evaluación es mejorable para que el estudiante tenga una retroalimentación instantánea que le permita mejorar su proceso de aprendizaje, sin embargo, sí que se evalúan las competencias y la oralidad por ley, así como se les da difusión a dichas calificaciones.

6.8. Idoneidad interaccional

En este caso no se ha estudiado la práctica docente, por tanto, no tenemos unos resultados para este apartado de idoneidad.

6.9. Idoneidad mediacional

En este apartado tratamos de evaluar los medios que proporcionan los libros de texto y haremos algunos comentarios sobre la distribución temporal que se utiliza en las aulas habitualmente.

6.9.1. Recursos materiales.

El descriptor de este elemento indica que para estudiar este apartado el libro o el profesor debe hacer "uso de materiales manipulativos e informáticos que permiten introducir buenas situaciones, lenguajes, procedimientos, argumentaciones adaptadas al significado pretendido. Las definiciones y propiedades son contextualizadas y motivadas usando situaciones y modelos concretos y visualizaciones." (Godino, 2013, p.125).

Para ello vamos a acudir a la tabla 15, en la que indicamos que libros de texto emplean materiales informáticos adicionales, dando por supuesto, que en 3º de ESO y para estas unidades finales en todos los centros se emplean calculadoras, que es el material informático por excelencia en el aula de matemáticas.

En 3º de ESO 3S no ofrece ningún material y 3A lo hace vía web, 3O y 3SM lo ofrece a través de un CD que incluye el libro.

En 4º de ESO tanto en la opción A como en la B todas las editoriales salvo Santillana ofrecen CD con recursos digitales para favorecer la comprensión y la práctica de la unidad.

6.9.2. Conclusiones.

En este apartado hemos visto que los libros de texto de algunas editoriales no presentaban materiales informáticos adicionales. Sin embargo, en los nuevos textos los cds están desapareciendo frente al uso de plataformas propias con mucho material interactivo que además facilita el seguimiento de su uso al profesorado, ya que cada estudiante tiene su propia cuenta y sus logros se registran.

6.10. Idoneidad afectiva

En la idoneidad afectiva se evalúa la implicación de los estudiantes en su aprendizaje. Para estudiar este apartado vamos a centrarnos en si las actividades y problemas propuestos despiertan su interés y qué se puede hacer para despertarlo.

6.10.1. Intereses y necesidades.

El descriptor de este elemento indica que para estudiar este apartado en el libro de texto "las tareas tienen interés para los alumnos Se proponen situaciones que permitan valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional." (Godino, 2013, p.122)

Para evaluar este aspecto vamos a acudir a las tablas 24, 25 y 26 y vamos a utilizar el total de situaciones propuestas, ya que las situaciones, frente a los ejercicios, están contextualizadas y hacen referencia habitualmente al entorno de los estudiantes. Se podría haber analizado también la presencia de gráficos atractivos, pero este aspecto era más difícil de cuantificar, por tanto, se ha optado por analizar las situaciones.

En 3º de ESO los textos ordenados de mayor a menor número de situaciones – problema son: 3S, con 30, 3A y 3SM con 29 y 3O con 20.

En 4º de ESO opción A los textos ordenados de mayor a menor número de situaciones – problema son: 4ASM, con 32, 4AO con 20, 4AS con 18 y 4AA con 12.

En 4º de ESO opción B los textos ordenados de mayor a menor número de situaciones – problema son: 4BO, con 39, 4BSM con 33, 4BS con 21 y 4BA con 12.

6.10.2. Actitudes y emociones.

En este caso no se ha estudiado la práctica docente, por tanto, no tenemos unos resultados para este apartado de idoneidad.

6.11. Idoneidad ecológica

En este apartado, a pesar de que no nos focalicemos en un centro concreto, podemos estudiar el ajuste de los libros de texto al curriculum.

6.11.1. Adaptación al currículo.

El descriptor de este elemento indica que para estudiar este apartado debemos centrar nuestra atención en si en el libro de texto “los contenidos, su implementación y evaluación se corresponden con las directrices curriculares.” (Godino, 2013, p.126)

Para evaluarlo vamos a utilizar las tablas 21, 22 y 23, en las que se mostraba si los contenidos que se proponen como obligatorios en el curriculum se desarrollaban correctamente en los libros de texto.

Con la información proporcionada por estas tablas podemos ordenar de más a menos idóneos los textos.

Para 3º de ESO tenemos: 3A y 3SM en primer lugar ya que exponen los 5 contenidos, 3S a continuación y 3O finalmente.

Para 4º de ESO opción A: 4AA y 4SM en primer lugar ya que trabajan los 6 contenidos preceptivos, 4AS después que no trabaja el diagrama de caja, pero si los otros cinco contenidos y finalmente 4AO que tan solo trabaja tres de los seis contenidos preceptivos.

Para 4º de ESO opción B: 4BO en primer lugar que trabajo los ocho contenidos que indica la legislación, seguido de 4BSM que trabaja siete de los ocho, después 4BA con seis de los ocho contenidos y por último 4BS que trabaja solo cuatro.

6.11.2. Apertura a la innovación didáctica.

El descriptor de este elemento indica que para ser más idóneo en este apartado el libro de texto debe presentar "integración de nuevas tecnologías (calculadoras, ordenadores, TIC, etc.) en el proyecto educativo." (Godino, 2013, p.126).

Como hemos indicado anteriormente, el uso de calculadoras está extendido a este nivel completamente, por lo tanto, nos centramos en las propuestas digitales de las editoriales.

Para ello ponemos nuestra atención en la tabla 15, en una de sus filas indicábamos si las editoriales presentaban material informático o no. Utilizando esta información podemos ordenar las editoriales por cursos bajo el criterio de si ofrecen o no dicho material.

En 3º de ESO 3S no ofrece ningún material y 3A lo hace vía web, 3O y 3SM lo ofrece a través de un CD que incluye el libro.

En 4º de ESO tanto en la opción A como en la B todas las editoriales salvo Santillana ofrecen CD con recursos digitales para favorecer la comprensión y la práctica de la unidad.

6.11.3. Adaptación socio – profesional y cultural. Educación en valores.

El objeto de este estudio no es centrarse en estas características de los textos, por tanto, no vamos a desarrollar estos aspectos.

6.11.4. Conexiones intra e interdisplinares.

El descriptor de este elemento indica que para ser más idóneo en este apartado en el libro de texto se debe observar que "los contenidos se relacionan con otros contenidos intra e interdisciplinares." (Godino, 2013, p.126).

En los libros de texto esto suele darse únicamente en las propuestas de investigación de final de capítulo o unidad. En la tabla 20 veíamos que todas las editoriales presentan este tipo de actividades de ampliación, por lo que no podemos utilizarlo para discriminar los libros, entendiendo que todos plantean dicha interdisciplinariedad.

6.11.5. Conclusiones.

En este apartado hemos visto que no todos los libros se adaptan al curriculum oficial o presentan material innovador, sin embargo, todos presentan actividades de investigación que favorecen la interdisciplinariedad.

Los textos ordenados de mayor a menor idoneidad por cursos serían:

Para 3º de ESO: 3A y 3SM empatados en primer lugar, a continuación, 3O y 3S.

Para 4º de ESO opción A: 4AA y 4SM en primer lugar, 4AS después y finalmente 4AO.

Para 4º de ESO opción B: 4BO en primer lugar, seguido de 4BSM, después 4BA y por último 4BS.

6.12. Conclusiones generales sobre la idoneidad didáctica

En este apartado vamos a realizar un gráfico radial como el que obteníamos en 6.6.6., en este caso vamos a representar las diferentes idoneidades con una escala de baja, media, alta, muy alta. Comparando las diferentes áreas que se generen podremos comparar la idoneidad didáctica de los diferentes libros de texto.

6.12.1. Idoneidad didáctica de los libros de texto de 3º de ESO.

Los diagramas radiales para los libros de 3º de ESO son los siguientes:

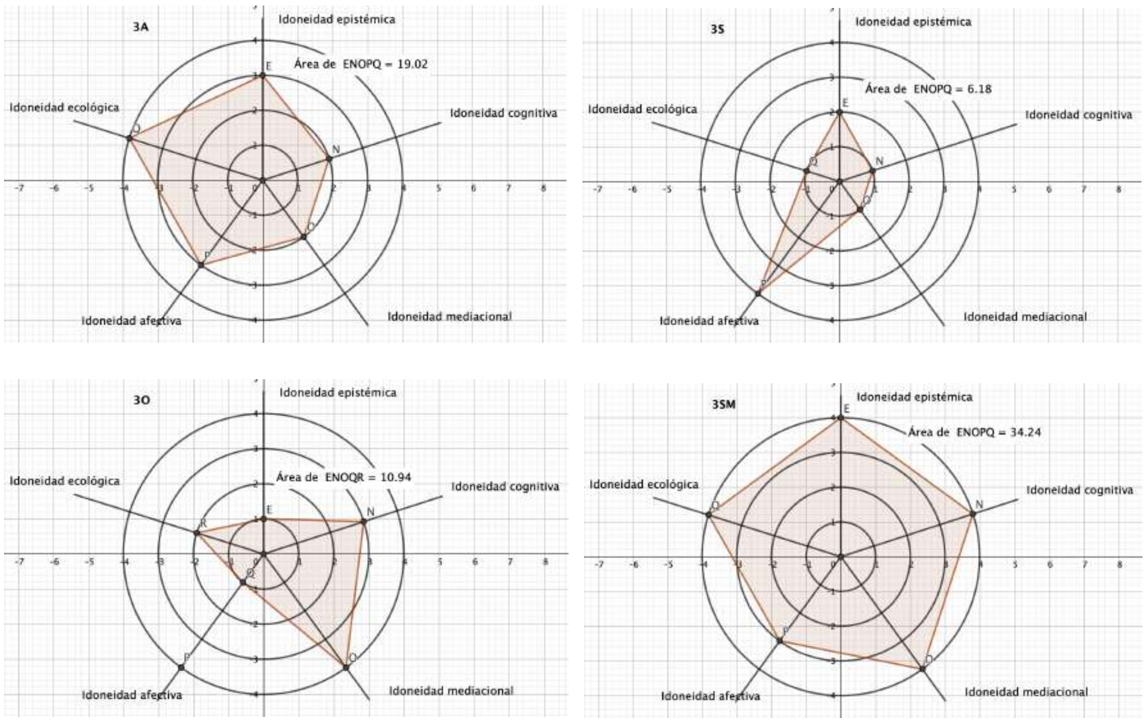


Figura 65. Gráficos radiales para la idoneidad didáctica de los textos de 3º de ESO

En la figura 65 podemos ver los diferentes libros de texto y sus gráficos radiales: 3S, el texto de Santillana presenta una idoneidad más baja que el resto, 3O presenta en sentido ascendente una idoneidad baja – media, 3A muestra una idoneidad media y finalmente el libro de SM, 3SM, que presenta una idoneidad alta o muy alta en comparación con el resto de los libros, ya que encabeza el ranking en casi todos los tipos de idoneidades.

6.12.2. Idoneidad didáctica de los libros de texto de 4º de ESO opción A.

Los diagramas radiales para los libros de 4º de ESO opción A son los siguientes:

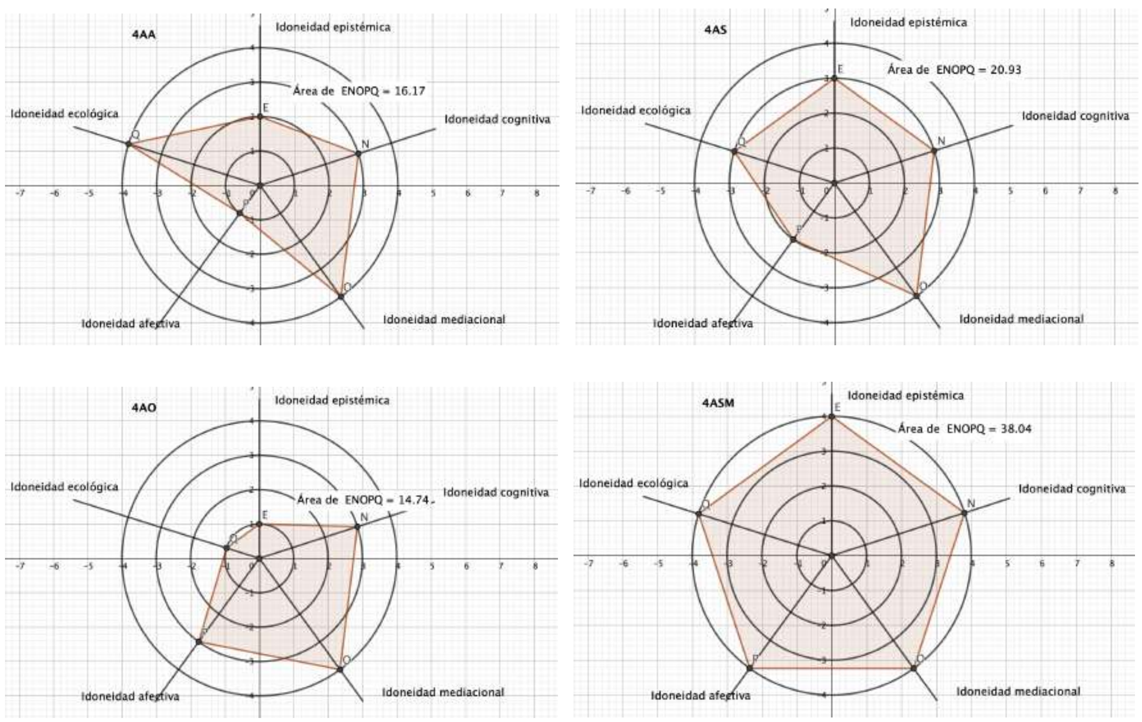


Figura 66. Gráficos radiales para la idoneidad didáctica de los textos de 4º de ESO A

En la figura 66 podemos ver los diferentes libros de texto y sus gráficos radiales: 4AO, el texto de Oxford presenta una idoneidad más baja que el resto, 4AA presenta en sentido ascendente una idoneidad baja – media, 4AS muestra una idoneidad media – alta y finalmente el libro de SM, 4ASM, que presenta una idoneidad muy alta en comparación con el resto de los libros, ya que encabeza el ranking en casi todos los tipos de idoneidades.

6.12.3. Idoneidad didáctica de los libros de texto de 4º de ESO opción B.

Los diagramas radiales para los libros de 4º de ESO opción B son los siguientes:

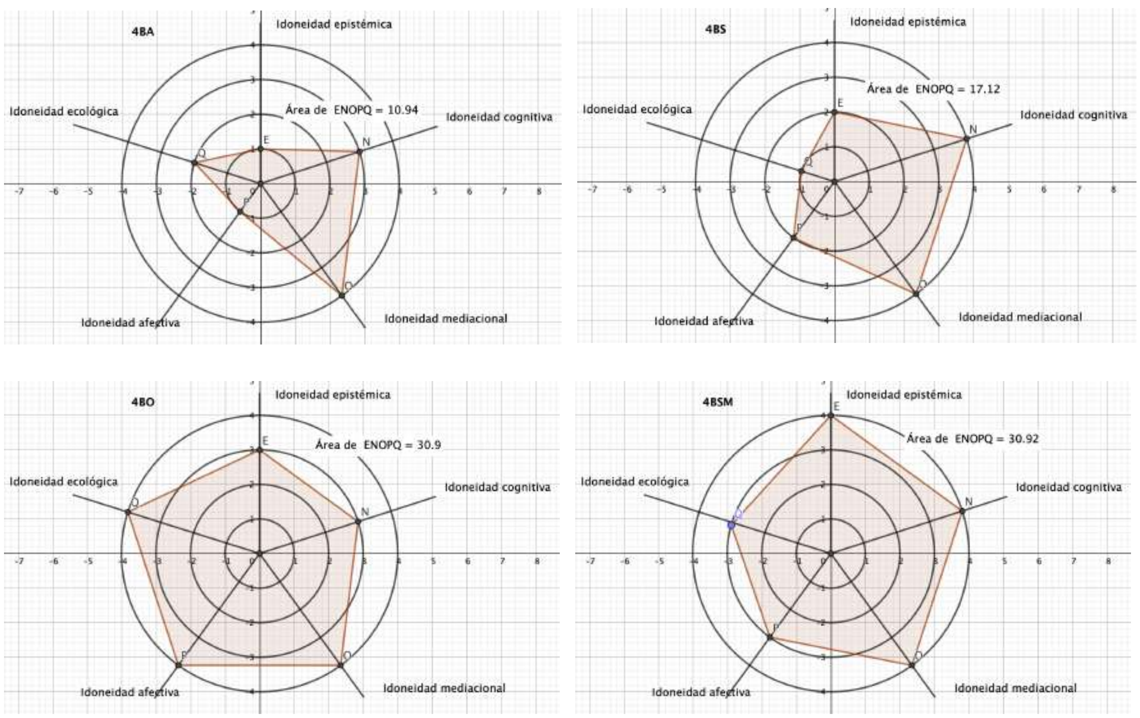


Figura 67. Gráficos radiales para la idoneidad didáctica de los textos de 4º de ESO B

En la figura 67 podemos ver los diferentes libros de texto y sus gráficos radiales: 4BA, el texto de Anaya presenta una idoneidad más baja que el resto, 4BS presenta en sentido ascendente una idoneidad baja – media, 4BO y 4BSM presentan una idoneidad didáctica alta o muy alta, prácticamente similares.

6.13. Potenciales conflictos semióticos

En esta parte del análisis se van a diferenciar tres posibles tipos de conflictos semióticos, los conflictos ocasionados por significados que deberían aparecer y no aparecen en el texto, es decir, según el curriculum deberían aparecer pero el libro de texto no los incluye, esto genera que el alumno debiera construir un significado personal y definitivamente no lo haga, los conflictos ocasionados por significados confusos o cuyos conceptos y propiedades no están bien trabajados, y sus argumentos son pobres, no articular bien los elementos de significado genera errores en la construcción del significado personal del alumno, por último los conflictos ocasionados por significados bien trabajados, pero en los que los argumentos no ligan del todo bien diferentes elementos de significado y puede generar problemas en la construcción de un significado personal.

6.13.1. Potenciales conflictos semióticos debidos a significados no incluidos.

Si no se trabaja un concepto este no se aprende, en este caso se puede considerar que en realidad no surge un conflicto semiótico, sin embargo, esos conceptos son preceptivos, es decir, el currículum indica que se deben trabajar, desde esta perspectiva el conflicto surge cuando, como vemos a continuación, si surgen en actividades o ejercicios o pruebas posteriores como la evaluación inicial del curso siguiente y estos no se han trabajado. También porque la ausencia de estos conceptos genera una falsa concepción acerca de ciertas nociones estadísticas.

En el capítulo 2 se introducía el curriculum, y en el apartado 6.4.2, en concreto en las tablas 21, 22 y 23 se estudiaba si todos los contenidos que indicaba el curriculum se incluían en los libros. Más tarde, en el análisis de significado se observa al igual que en las tablas anteriores, que todos los libros no presentan los mismos contenidos.

En dichos apartados se observaba que para 3º de ESO, los textos 3S y 3O no incluían la interpretación conjunta de la media y la desviación típica y la comparación de distribuciones, perdiendo una oportunidad de generar un significado más completo al trabajar la aplicación práctica de dichos conceptos. De hecho, esto genera que 3O no incluya el coeficiente de variación, generando una pérdida con respecto a los significados que un alumno de 3º de ESO debe construir. Esto redunda también en los elementos de significado, ya que 3O no incluye los elementos lingüísticos referentes a la comparación, tampoco las propiedades, situaciones, procedimientos, ni los argumentos que ligan a unos con otros.

En 4º de ESO opción A, 4AS no incluye la comparación de distribuciones en el texto, lo incluye en un ejercicio del final de tema que queda a discreción del profesor realizar o no, en 4AO no se incluye ni la comparación de distribuciones ni el diagrama de caja. Según el curriculum uno de los significados que debe construir el alumno es el de diagrama de caja, por tanto, los alumnos que cursen 4º opción A no construirían este significado, generando cierta carencia instruccional en su formación estadística en el paso por la secundaria obligatoria. Como en 3º de ESO, esto se refleja en la variedad de lenguaje, procedimientos, conceptos y argumentos puestos en juego, ya que el diagrama de caja da la oportunidad de ver más allá de la dupla media y desviación típica para resumir los datos, aportando una herramienta de comparación de distribuciones que enriquece la cultura estadística que adquiere el alumno.

En 4º de ESO opción B, tan solo 4BO incluye el estudio de los valores atípicos y sus consecuencias sobre las medidas a utilizar para resumir la información de una distribución de datos, indicando que en dicho caso la media y el rango intercuartílico son mejores indicadores resumen. Esto genera en el alumno la falsa idea de que pase lo que pase la media y la desviación típica son los mejores parámetros para resumir una distribución de datos. Este curso es quizá el que más problemas de este tipo genera, ya que como se indica, tan solo 4BO presenta el curriculum al completo.

6.13.2. Potenciales conflictos semióticos debidos a significados incompletos.

Si como se indicaba en el apartado anterior, los conflictos semióticos a causa de que no aparezca un concepto son graves, también lo son los debidos a significados incompletos o mal trabajados. Tenemos significados incompletos cuando se introduce un concepto, pero no va ligado a un procedimiento, sus propiedades y sus argumentos, o cuando alguno de ellos es deficiente. Este tipo de conflictos semióticos genera en el alumno significados erróneos. En el anterior, el problema era la carencia de generación de un significado personal debido a un concepto inexistente pero que debía aparecer, ahora por contraste, el significado personal se genera, pero lo hace de forma desestructurada o incompleta, generando problemas de comprensión.

En 3º de ESO, lo más llamativo es el concepto de rango en 3S, que no va a asociado a su procedimiento. En la tabla 30 se observaba que, si se introduce la definición de forma completa, tanto de forma textual como de fórmula, sin embargo, en la tabla 34 no aparece el procedimiento, aunque es cierto que el cálculo del rango es sencillo, hay que indicar que es uno de los contenidos preceptivos, y por tanto, al menos estos hay que trabajarlos de forma completa y correcta.

En 4º de ESO opción A, se ha observado que en 4AS el concepto y procedimiento, así como el resto de elementos de significados asociados al diagrama de caja se trabajan de manera defectuosa, se introduce al final y no se realiza la exposición de manera correcta, obviando el rango intercuartílico y los valores atípicos que quedan fuera del bigote, en la figura 57 se evidencia la diferencia entre un texto que lo introduce de forma correcta y 4AS, que lo hace de forma bastante deficitaria, esto genera un conflicto semiótico ya que el alumno no va a ser capaz de representar el diagrama de caja de forma correcta con la explicación dada por el libro. Otro concepto que aparece de forma pobre en este nivel es el coeficiente de variación en 4AO, ya se observaba que este es un parámetro algo más difícil de utilizar, ya que sirve para comparar distribuciones y por tanto que no aparezca el procedimiento asociado a este concepto dificulta en gran parte el uso del parámetro en situaciones – problema.

En 4º de ESO opción B los libros son más completos, y aunque tienen carencias a la hora de incluir contenidos, los que presentan lo hacen de forma completa. Cuando se analiza el libro de 4º de ESO opción B, la sensación que puede tener el lector es que los autores se toman más seriamente la corrección de contenidos, presentando todos los contenidos de forma completa, que en los demás niveles. Esto no los libra, como se veía en el apartado anterior, de no incluir todos los contenidos que según el curriculum son preceptivos a este nivel.

6.13.3. Potenciales conflictos semióticos debidos a falta de argumentos.

La falta de argumentos genera que unos elementos de significado no se unan correctamente a otros, generando significados personales aislados, pero no estructurados en el alumno. El principal conflicto semiótico que se encuentra en los textos es por falta de argumentos deductivos ya sean verbales o algebraicos, aunque mucho más estos últimos.

En el análisis se ha mostrado la gran cantidad de fórmulas que aparecen para la varianza y la desviación típica tal y como ya presentaban Estepa y Ortega (2005b). Estas fórmulas se pueden resumir en 4 para la varianza y 4 para la desviación típica. Dos serían para datos agrupados y dos para datos sin agrupar, y en cada bloque se tendría una simplificada y otra sin simplificar.

Sin embargo, el problema surge de la falta de argumentos para pasar de unas a otras y para explicar sus características esenciales, lo que puede generar un conflicto semiótico al no explicar al alumno por qué son equivalentes, cuando el alumno tiene los conocimientos algebraicos suficientes para entender la equivalencia entre ecuaciones, por tanto, la ausencia de argumentos deductivos de tipo algebraico deja algunas fórmulas vacías de sentido y confunde al alumno que no las relaciona. La simplificación se muestra en la figura 68 donde la única dificultad es el desarrollo de un binomio cuadrado.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2\,x_i\,\overline{x} + \overline{x}^2) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\,\overline{x}\,\underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i)}_{=\overline{x}} + \frac{1}{n} n\,\overline{x}^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\,\overline{x}^2 + \overline{x}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \overline{x}^2
\end{aligned}
$$

Figura 68. Simplificación de la fórmula de la varianza. (Barón, 1998)

Otro de los problemas que genera el amplio espectro de fórmulas es un exceso de lenguaje notacional no argumentado, como se ha visto y remarcado con anterioridad se emplean las letras s^2 y σ^2 sin indicar sus diferencias. El problema que esto genera es que en el curso 2016-2017 se están reemplazando los libros de texto y podemos encontrar centros con un texto para 1º y 3º de ESO, otro para 2º y 4º de ESO y otra editorial en bachillerato. El alumno, a lo largo de los cursos trabaja con diferente notación que no está bien argumentada y se presta a confusión, sin embargo, el alumno trabaja en los temas de estadística los conceptos de muestra y población, y de nuevo, puede perfectamente entender la diferencia, incluso puede ser un buen camino para introducir situaciones de muestreo e inferencia.

6.14. Dimensión normativa

Indicábamos con anterioridad que para iniciar un estudio de la dimensión normativa proponemos entre otros:

- El objetivo de la dimensión normativa debe ser también mejorar los procesos para ello se deben fijar también unos criterios de *idoneidad didáctica.*
- Un criterio de *idoneidad didáctica* es una regla de corrección que indica como debe ser un proceso de instrucción, que deben ser consensuadas por la comunidad científica.

Por tanto, y aunque no se analicen aquí las diferentes facetas de la dimensión normativa vamos a realizar unas pequeñas propuestas para mejorar la idoneidad didáctica.

Para que los textos mejoren sus valores en la idoneidad didáctica deberían ceñirse al curriculum oficial, con un correcto desarrollo de microestructura. Deberían incluir un número adecuado de situaciones problema contextualizadas que sean de interés y motiven al alumnado. Deben incluir elementos informáticos interactivos que sirvan de actividades de refuerzo y ampliación. Además, debe favorecer la intra e interdisciplinariedad.

Por último y para que la unidad se pueda trabajar con unos tiempos correctos se debería cambiar el orden de esta y adelantarla en algunos cursos, de forma que se puedan abordar las dificultades que surgen con más tranquilidad.

6.15. Conclusiones

En este capítulo se han realizado cuatro tipos de análisis, un análisis cualitativo de los textos, un estudio de la macroestructura, un análisis de la microestructura y un análisis de los elementos de significado y de la idoneidad didáctica, cada uno de ellos aporta unas conclusiones diferentes.

En el análisis cualitativo se tuvieron en cuenta algunos aspectos que indicaban autores como Mikk (2000) e incluso el breve resumen que realizaba el autor de esta tesis en el capítulo 3 para evaluar los libros. Los profesores no siempre se guían por este tipo de pautas, muchas veces también influye la amistad con el comercial, la tradición del centro, o lo que ofrezca la editorial, así como el ideario en centros privados y concertados, sin embargo, era un análisis que a la vista es interesante y aporta algunas ideas de en qué aspectos se centran más unas y otras editoriales.

En el análisis de la macroestructura se ha observado, por una parte, la estructura capitular de los libros de texto, donde se aprecia que los temas de estadística están en todos los textos trabajados en último lugar, esto, unido a un curriculum bastante cargado en secundaria y a las propias características del alumnado, genera que cuando no queda tiempo los temas que se quedan sin trabajar son los de estadística. El otro análisis realizado sobre la macroestructura ha sido el porcentaje dedicado a cada bloque de contenidos, donde se observa que el porcentaje del libro dedicado al bloque de estadística es bajo en 3º de ESO y 4º opción A, pero que crece para ponerse a la par de otros bloques en la opción B.

En el análisis de la microestructura se articulan también dos sub análisis, por una parte, el estudio de los diferentes elementos que presentan los capítulos del libro, sin llegar a la profundidad de la matriz de Rivers (1990) en la que se analiza exhaustivamente la filosofía y tendencias del libro, da una idea del énfasis que ponen los diferentes textos en el trabajo sobre ideas previas, el resumen final, o las lecturas de textos históricos. En este análisis se aprecia que algunas editoriales como Santillana, no trabajan las actividades iniciales, y otros como Anaya u Oxford para 4º de ESO no incluyen resúmenes finales, dejando ese trabajo en manos del maestro, que puede no hacerlo si no tienen un material propio. El segundo análisis que se hizo de la microestructura era el estudio de si los contenidos que indica el curriculum según el capítulo 2 se trabajaban con la estructura exposición-ejemplo-actividad, obteniendo como resultado que la mayoría de los libros no lo hacen e incluso omiten contenido curricular obligatorio, generando posibles conflictos semióticos como se ha indicado en el apartado anterior.

Por último, se ha realizado un análisis de los elementos de significado y de la idoneidad didáctica que se utilizan en los textos bajo el EOS. En este análisis, además de contribuir a dar un significado pretendido para la institución secundaria de las medidas de dispersión, se han encontrado numerosos conflictos semióticos potenciales, debido a tres posibles causas, significados que no aparecen, como ya se indicaba en el párrafo anterior, significados incompletos y a falta de argumentos, este último vinculado sobre todo a transformaciones algebraicas que se hacen sin dar los pasos necesarios y que generan un inexplicable ecosistema de ecuaciones referidas a un mismo concepto, de forma mal articulada, que ocasionan más perjuicio que beneficio sobre el alumno.

En el próximo capítulo se analizará, a través de un cuestionario, como afectan algunos de estos problemas a la instrucción, con un análisis de lo que los alumnos aprenden utilizando diferentes textos.

Para la mayoría de los estudiantes la estadística es un tema misterioso donde operamos con números por medio de fórmulas que no tienen sentido.

Graham.

Capítulo 7

Evaluación del conocimiento de los estudiantes.

7.1. Introducción

A lo largo de este capítulo se va a abordar un cuestionario sobre el conocimiento de los alumnos de las medidas de dispersión. Para ello se va a elegir una muestra sobre la que realizar la prueba, eligiendo a la vez un curso en función del cuestionario a pasar. Se construirán unas preguntas, teniendo en cuenta lo que los alumnos deben conocer en ese nivel sobre medidas de dispersión según la ley actual (MECD, 2013) y para ello se utilizarán ítems ya validados.

7.2. Elección de la muestra

Como el cuestionario es exploratorio, la muestra es intencional y responde a los criterios de accesibilidad y disponibilidad por parte del autor de ésta.

Partiendo de que el autor de la tesis conocía a varios profesores de la provincia de Jaén debido a su experiencia como docente, se les pidió participar en el cuestionario a 15 docentes de la provincia. Sin embargo, la mayoría declinaron participar en el mismo debido a que uno de los requisitos era haber trabajado la unidad de estadística y la mayor parte de ellos no lo habían hecho.

7.2.1. Descripción de la muestra.

Finalmente, la muestra está constituida por 38 alumnos, de tres grupos diferentes, dos de la opción académica y uno de la opción aplicada de un mismo centro.

14 son chicos y 24 chicas. 13 estudiantes cursan la opción aplicada y 25 la opción académica. 8 estudiantes están repitiendo 3º de ESO, 30 no. Hay 14 alumnos con 14 años, 17 alumnos con 15 años y 7 alumnos con 16 años.

7.3. Construcción del cuestionario

Para la construcción del cuestionario se ha elegido el modelo en el que se utilizan ítems ya validados en otros estudios, debido a que el proceso de validación de los ítems de un cuestionario propuesto en Batanero y Díaz (2005) es muy extenso en el tiempo se ha optado por un modelo abreviado, que consiste en la elección de ítems ya validados en otras investigaciones.

Por tanto, en la construcción se va a recurrir a la base de datos ARTIST de Garfield, delMas, y Chance (2003) que tienen elaborados y validados numerosos ítems.

7.3.1. Selección de contenidos a evaluar.

Para la selección de los contenidos a evaluar, después de sopesar varias opciones, se ha valorado que lo ideal es utilizar los estándares de aprendizaje evaluables (en adelante EAE) del MECD (2015b) que se indicaban en el capítulo 2, ya que los EAE indican como elemento curricular lo que el alumno debe saber al acabar el curso, en ese sentido son terminales, y a su vez son evaluables, ya que el objetivo de la LOMCE era poder hacer evaluaciones externas mediante la reválida, aunque actualmente esta parte se encuentra en suspenso. Para apoyar una mejor descripción se apoyará a su vez en los contenidos. Se utiliza este sistema por dos motivos:

- El curso que se plantea evaluar es un curso donde ya está implantada la LOMCE.
- A pesar del cambio normativo, la única diferencia existente entre la anterior ley y esta es la introducción del diagrama de caja, y en consecuencia del rango intercuartílico, en 3º de ESO, cambio que se tendrá en cuenta.

La propuesta de EAE e ítems para evaluar se puede ver en la tabla 38

Tabla 38. Propuesta inicial de contenidos a evaluar

EAE/Contenidos
Calcula los parámetros de dispersión (rango, recorrido intercuartílico y desviación típica) Cálculo e interpretación de los parámetros de dispersión de una variable estadística (con calculadora y hoja de cálculo) para comparar la representatividad de la media y describir los datos Emplea la calculadora y medios tecnológicos para organizar los datos, generar gráficos estadísticos y calcular parámetros de tendencia central y dispersión.
Emplea medios tecnológicos para comunicar información resumida y relevante sobre una variable estadística analizada. Diagrama de caja y bigotes.
Interpretación conjunta de la media y la desviación típica.

Desglosando los diferentes EAE y contenidos los diferentes aspectos que se van a evaluar son los siguientes:

- Concepto y procedimiento de cálculo de rango, varianza, desviación típica, mediana, cuartiles, máximo, mínimo, recorrido intercuartílico, gráfico de la caja, coeficiente de variación.
- Interpretación de la desviación típica, haciendo hincapié en la interpretación conjunta de la media y la desviación típica.

- Las siguientes propiedades de las medidas de dispersión: la desviación típica es cero cuando todas las medidas son iguales, la desviación típica es invariante ante cambio de origen, la desviación típica es definida positiva.

Los ítems que se escogen pertenecen a los archivos de ARTIST solicitados a Robert delMas a través de su página web, en concreto se han seleccionado de las bases de datos "medidas de dispersión" y test CAOS (Comprehensive Assessment of Outcomes in a first Statistics Course). A pesar de que estos cuestionarios tienen por objetivo evaluar en algunos trabajos los conocimientos previos y en otros los posteriores a una instrucción de alumnos de cursos introductorios, muchos de los ítems valen perfectamente para alumno de la secundaria española.

En la tabla 39 se proponen diferentes ítems para evaluar estos aspectos.

Tabla 39. Propuesta de ítems

<table>
<tr><th colspan="2">Variable</th><th>Ítem</th></tr>
<tr><td>Calcular</td><td>Rango</td><td>La Agencia de Protección Ambiental (EPA) utiliza una medida llamada Índice de Normas de Contaminantes (PSI) para medir la calidad del aire en una ciudad. Una lectura de PSI de más de 100 indica un día cuando la calidad del aire se considera insalubre. Las mediciones representan el número de días en 1995 en que la ISP fue de más de 100 para veinte áreas metropolitanas en el Medio Oeste de los Estados Unidos.
<table>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>4</td><td>7</td><td>4</td><td>1</td><td>2</td><td>11</td><td>4</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2</td><td>4</td><td>5</td><td>3</td><td>1</td><td>14</td><td>7</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
</table>
1. Calcula la media, la mediana, la desviación típica, el rango y el recorrido intercuartílico.
2. Realiza un diagrama de caja</td></tr>
<tr><td></td><td>Recorrido intercuartílico</td><td>Figura en otras cuestiones</td></tr>
<tr><td></td><td>Desviación típica</td><td>1. Para cada lista de datos que se presentan a continuación selecciona la mejor estimación para la desviación estándar. La media de cada lista es 50. No se requieren cálculos para responder a estas preguntas.
LISTA A: 49, 51, 49, 51, 49, 51, 49, 51, 49, 51</td></tr>
</table>

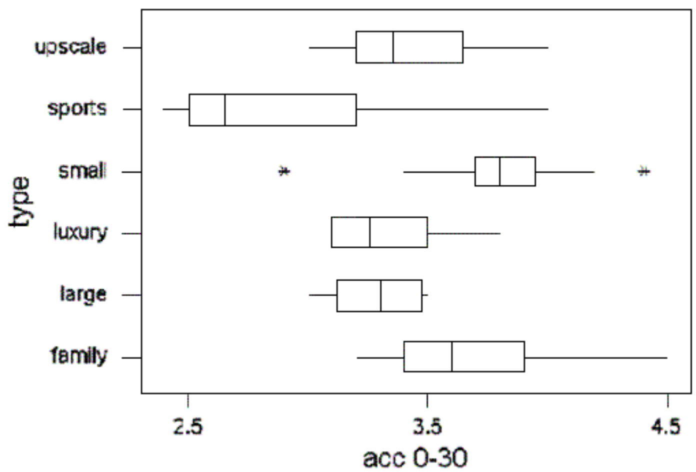
<table>
<tr><th></th><th>Variable</th><th>Ítem</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>A. 1
B. 2
C. 5
LISTA B: 31, 36, 48, 50, 50, 53, 54, 56, 60, 62
A. 1
B. 3
C. 8
D. 20

2. Los siguientes datos representan el resultado de un test de inteligencia medido del 1 al 10.
<table>
<tr><td>Resultado del test</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Número de personas</td><td>12</td><td>24</td><td>38</td><td>23</td><td>2</td><td>1</td></tr>
</table>

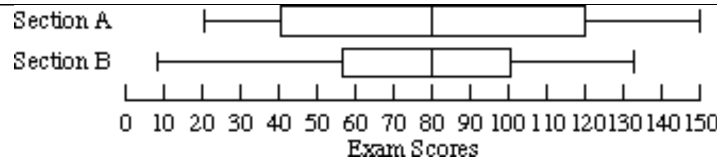
Calcula la desviación típica</td></tr>
<tr><td>Interpreta</td><td>Rango</td><td>Se toma una muestra de las medidas de las patas de un grupo de osos. Se obtienen los siguientes parámetros. Media = 12,8 cm, mediana = 12,7 cm, desviación típica = 1,4 cm, recorrido intercuartílico = 2 cm. La distribución está centrada y es simétrica. Basándose únicamente en esta información, elija las mejores estimaciones para los valores mínimo y máximo de la distribución.
A. Min = 11,4 y máximo = 14,2
B. Min = 10,7 y máximo = 14,7
C. Min = 8,6 y máximo = 17,0</td></tr>
<tr><td></td><td>Recorrido intercuartílico</td><td>(Viene del gráfico de caja de más abajo) Si se extrajeron los valores atípicos del conjunto de datos de vehículos small, ¿cuál de las siguientes medidas de dispersión se vería menos afectada?
A. Rango.
B. Recorrido intercuartílico.
C. Desviación típica
D. Ninguna de las anteriores.</td></tr>
<tr><td></td><td>Desviación típica</td><td>1. Una clase de 30 alumnos realiza un test con 15 preguntas. Si la desviación típica es 0 tu sabes que:
A. La mitad de las puntuaciones están por encima de la media.
B. Se ha cometido un error en las cuentas.
C. Todos han contestado de forma correcta el mismo número de preguntas.
D. La media, la moda y la mediana deben ser 0

2. En un examen con 15 preguntas, para cada una, un estudiante recibe un punto por una respuesta correcta; 0 puntos sin respuesta; y pierde un punto por una respuesta incorrecta. Las puntuaciones totales de las pruebas podrían oscilar entre</td></tr>
</table>

Variable		Ítem
		+15 puntos y -15 puntos. El profesor calcula la desviación típica de los resultados de las pruebas y obtiene que es -2.30. ¿Qué sabemos? A. **La desviación estándar se calculó incorrectamente.** B. La mayoría de los estudiantes recibieron puntuaciones negativas. C. La mayoría de los estudiantes obtuvo calificaciones por debajo de la media. D. Ninguna de las anteriores. 3. ¿El tamaño de la desviación típica de un conjunto de datos depende de dónde está la media? A. Sí, cuanto mayor sea la media, mayor será la desviación típica B. Sí, porque hay que saber la media para calcular la desviación típica C. No, el valor de la desviación típica no se ve afectado por el valor de la media D. **No, porque la desviación típica es medir cómo los valores difieren de unos a otros.** 4. ¿Puede la desviación típica ser negativa? ¿Por qué? Explica tu respuesta 5. Supongamos que estás en una empresa de cereales y estás llenando cajas de cereales y controlando los pesos de las cajas para propósitos de control de calidad. Explica por qué es buena una pequeña desviación típica de pesos. 6. Juana y Pablo están estudiando los dos conjuntos de datos siguientes. Conjunto de datos A: 110, 112, 114, 115, 116, 118. Conjunto de datos B: 2, 6, 15, 28, 59, 112. Para el conjunto de datos A, Juana y Pablo encuentran que la desviación típica de la muestra es 42, mientras que la desviación estándar de la muestra para el conjunto de datos B es 3. Han cometido un error en sus cálculos. Explique por qué sabe que la desviación típica de la muestra para el conjunto de datos A debe ser menor que la desviación estándar de la muestra para el conjunto de datos B SIN CALCULAR las desviaciones típicas.
Compara	Media y desviación típica	1. Considera dos poblaciones en la misma provincia. Ambas poblaciones son del mismo tamaño (22.000). La población 1 está formada por todos los estudiantes de la universidad estatal. La población 2 se compone de todos los residentes en una pequeña ciudad. Considere la variable Edad. ¿Qué población

	Variable	Ítem
		probablemente tendría la mayor desviación estándar? A. La población 1 tendría más probablemente una mayor desviación típica que la población 2. B. **La población 2 tendría más probabilidad de tener una mayor desviación típica que la población 1.** C. Probablemente tendrían la misma desviación típica) para la edad porque tienen el mismo tamaño de población. D. No hay suficiente información para contar. 2. De las tres muestras que se presentan a continuación ¿cuál tiene una mayor variación? Sample 1: 10, 11, 12, 13, 14, 15 Sample 2: 10, 10, 10, 15, 15, 15 Sample 3: 10, 12.5, 12.5, 12.5, 12.5, 15
Diagrama de	Caja y bigotes	1. Se presenta el siguiente diagrama de caja sobre la aceleración de 0 a 50 km/h de varios coches. Los coches también se clasificaron en seis categorías según el tipo.  ¿Qué tipo de coche tiene el recorrido intercuartílico más pequeño para la aceleración? A. Upscale. B. Sports. C. **Small.** D. Luxury. E. Large. F. Family. 2. Los dos diagramas de caja siguientes muestran los resultados a un mismo examen de dos grupos del mismo curso.

Variable	Ítem



2.1. ¿Qué sección esperaría tener una mayor desviación estándar en las calificaciones de los exámenes?

A. **Sección A.**
B. Sección B.
C. Ambas secciones son casi iguales.
D. Es imposible decirlo.

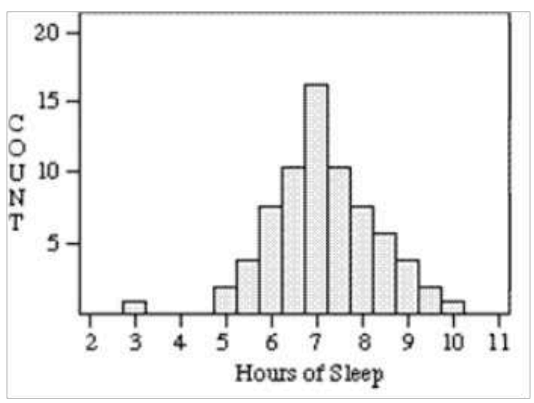
2.2. ¿Qué conjunto de datos tiene un mayor porcentaje de estudiantes con calificaciones iguales o inferiores a 30?

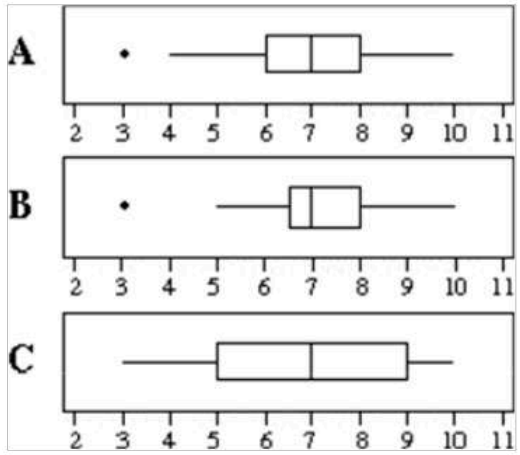
A. Sección A.
B. Sección B.
C. Ambas secciones son casi iguales.
D. **Es imposible decirlo.**

2.3. ¿Qué sección tiene un mayor porcentaje de estudiantes con calificaciones iguales o superiores a 80?

A. Sección A.
B. Sección B.
C. **Ambas secciones son casi iguales.**

3.- ¿Cuál de los tres diagramas de caja que se adjuntan se corresponde a los datos mostrados en el siguiente histograma?



Variable	Ítem
	

Se han señalado en negrita las respuestas correctas.

7.3.2. Elaboración del cuestionario.

Una vez realizada la propuesta de contenidos a evaluar y una primera propuesta de ítems se van a seleccionar algunos de estos para el test atendiendo dos cuestiones, en primer lugar, que se cubran todos los contenidos a evaluar, en segundo lugar, que sean aptos para los alumnos de dicho curso, es decir, se primarán ejercicios que se parezcan a las situaciones – problema que se estudiaban en el capítulo anterior y además se tendrá en cuenta que deben favorecer también el razonamiento del alumno, para poder apreciar el conocimiento sobre las medidas de dispersión. Para que sean aptos los ejercicios se van a contextualizar siguiendo un modelo más similar al de los libros de texto. Igualmente, la longitud del test no debe ser excesiva para que se pueda realizar en 45-50 minutos, que es el tiempo del que se dispondrá para realizar el mismo.

Con estas condiciones se propone el siguiente cuestionario.

1.- Actualmente las autoridades están muy preocupadas por el medioambiente, como sabéis, esta situación es especialmente crítica en Madrid. Allí las autoridades comprueban el exceso de partículas contaminantes. Los días en los que las medidas de ciertas partículas han sido excesivas durante los últimos 20 meses vienen dados en la siguiente tabla.

0	1	4	7	4	1	2	11	4	1
2	4	5	3	1	14	7	0	0	1

a) Calcula la media, la mediana, la varianza, la desviación típica, coeficiente de variación, el rango y el recorrido intercuartílico.

b) Realiza un diagrama de caja

En esta cuestión que se ha contextualizado a la polución de la ciudad de Madrid, se evalúa el cálculo del rango, la varianza, la desviación típica el recorrido intercuartílico y la representación en diagrama de caja. Se ha introducido con respecto al de ARTIST el cálculo de la varianza, ya que se puede introducir como paso normal para el cálculo de la desviación típica y el coeficiente de variación, ya que se aprovecha el cálculo de la media y la desviación típica para realizar este cálculo. Es una cuestión numérica, que exigirá una posterior categorización de las posibles respuestas. Está obtenido a partir de la primera propuesta de la tabla 39. Este ítem junto con todos los de cálculo intenta indagar en la propuesta de Hart (1983) que indicaba que hallar las medidas de dispersión es complicado para los estudiantes que cursan por primera vez estadística, a ello añadimos que los profesores subestiman esta dificultad como explicaba Gardfield (1995).

2.- De las tres muestras que se presentan a continuación, ¿cuál tiene una mayor dispersión?

Sample 1: 10, 11, 12, 13, 14, 15
Sample 2: 10, 10, 10, 15, 15, 15
Sample 3: 10, 12.5, 12.5, 12.5, 12.5, 15

En este ítem el alumno debe utilizar el coeficiente de variación para comparar las dos distribuciones, por tanto, evalúa los siguientes conocimientos, cálculo de la desviación típica, cálculo del coeficiente de variación, comparación de distribuciones utilizando la media y la desviación típica. Como las medias son similares, también se puede realizar comparando solo las deviaciones típicas, siempre que se argumente de forma correcta esa solución también se considerará válida. En este caso, también se deben categorizar las respuestas. Se obtiene de la cuestión 13 de la tabla anterior tal cual está formulada. Este tipo de ejercicio va en línea con el propuesto por Sánchez y Orta (2013) en los que se usan de forma conjunta medidas de tendencia central y dispersión para comparar distribuciones.

3.- Los siguientes datos representan el resultado de un test de inteligencia medido del 1 al 10. Calcula la varianza y la desviación típica

Resultado del test	5	6	7	8	9	10
Número de personas	12	24	38	23	2	1

En este ítem se evalúa el cálculo de la varianza y la desviación típica para datos expresados en una tabla de frecuencias absolutas. Este ítem se extrae de la tercera propuesta de la tabla 39, añadiendo el cálculo de la varianza, necesario para obtener la desviación típica.

4.- Una clase de 30 estudiantes realiza un test con 15 preguntas. Si la desviación típica de las puntuaciones obtenidas por cada estudiante en dicho test es 0 sabes que:

A. La mitad de las puntuaciones están por encima de la media.

B. Se ha cometido un error en las cuentas.

C. Todos han contestado de forma correcta el mismo número de preguntas.

D. La media, la moda y la mediana deben ser 0

5.- En un examen con 15 preguntas, para cada una, un estudiante recibe un punto por una respuesta correcta; 0 puntos sin respuesta; y pierde un punto por una respuesta incorrecta. Las puntuaciones totales de las pruebas podrían oscilar entre +15 puntos y -15 puntos. El profesor calcula la desviación típica de los resultados de las pruebas y obtiene que es -2.30. Estamos seguros de que:

A. La desviación estándar se calculó incorrectamente.

B. La mayoría de los estudiantes recibieron puntuaciones negativas.

C. La mayoría de los estudiantes obtuvo calificaciones por debajo de la media.

D. Ninguna de las anteriores es verdadera.

6.- En el último examen la media de la clase ha sido un 4. Preocupado por la situación, el profesor decide sumarles dos puntos a todos los alumnos. ¿Afecta esta suma a la desviación típica?

A. Sí, cuanto mayor sea la media, mayor será la desviación típica

B. Sí, porque hay que saber la media para calcular la desviación típica

C. No, el valor de la desviación típica no se ve afectado por el valor de la media

D. No, porque la desviación típica no cambia si cambian todas las puntuaciones por sumarle la misma cantidad.

7.- ¿Puede la desviación típica ser negativa? ¿Por qué? Explica tu respuesta

Los ítems del 4 al 7 exploran las propiedades de la desviación típica. En este caso las cuestiones tienen respuesta tipo test salvo la 7. Se corresponden con los ítem 6 – 9 de la tabla 39 tal cual han sido formuladas en la propuesta. En estas cuestiones se ahonda en la comprensión del alumnado sobre la desviación típica ya que en la mayoría de los estudios previos se recoge como, por ejemplo, en Dubreil-Frémont, Chevallier-Gaté, y Zendrera (2014), Turegun (2011) u Ortega y Estepa (2006).

8.- Considera dos poblaciones en la misma provincia. Ambas poblaciones son del mismo tamaño (22.000). La población 1 está formada por todos los estudiantes de la universidad estatal. La población 2 se compone de todos los residentes en una pequeña ciudad. Considere la variable Edad. ¿Qué población probablemente tendría la mayor desviación estándar?

A. La población 1 tendría más probablemente una mayor desviación típica que la población 2.

B. La población 2 tendría más probabilidad de tener una mayor desviación típica que la población 1.

C. Probablemente tendrían la misma desviación típica para la edad porque tienen el mismo tamaño de población.

D. En el enunciado no se da suficiente información.

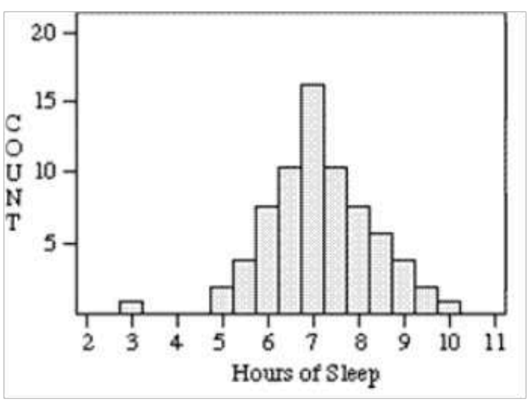
El ítem 8 evalúa la interpretación de la desviación típica, así como la comparación de distribuciones, en este caso sin datos, con lo cual exige un razonamiento más profundo al estudiante. Se corresponde con la cuestión 12 de la tabla 39 y se ha formulado de la misma forma que está propuesta. Este ejercicio y el siguiente examina las ideas de cultura científica que desarrollan autores como Gardfield (1999), Watson (2006) o Batanero et al. (2013)

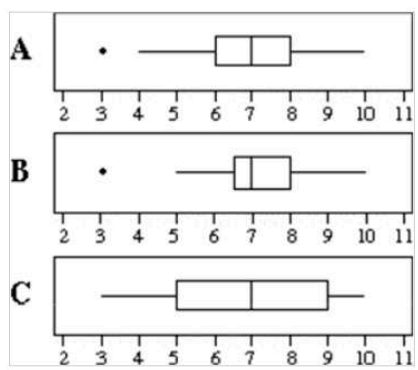
9.- Juana y Pablo están estudiando los dos conjuntos de datos siguientes. Conjunto de datos A: 110, 112, 114, 115, 116, 118. Conjunto de datos B: 2, 6, 15, 28, 59, 112.

Para el conjunto de datos A, Juana y Pablo encuentran que la desviación típica de la muestra es 42, mientras que la desviación estándar de la muestra para el conjunto de datos B es 3. Los dos han cometido un error en sus cálculos. Explique por qué sabe que la desviación típica de la muestra para el conjunto de datos A debe ser menor que la desviación típica de la muestra para el conjunto de datos B SIN CALCULAR las desviaciones típicas.

En este caso el ítem evalúa la interpretación de la desviación típica, pero también está relacionada con la evaluación de la interpretación de otras medidas de dispersión como el rango. Se corresponde a la cuestión 11 de la tabla 39, formulada tal cual aparece en la misma.

10.- ¿Cuál de los tres diagramas de caja que se adjuntan se corresponde a los datos mostrados en el siguiente histograma?





En este ítem se evalúa la traducción de datos de un gráfico a otro, en la misma unidad los alumnos han estudiado los histogramas, en este ejercicio se pretende evaluar una comprensión más gráfica del concepto de recorrido intercuartílico y de los valores atípicos, así como del diagrama de caja y el rango. Esta cuestión es la 16 de la tabla 39 y de nuevo se ha formulado sin modificar. La opción correcta es la B. Algunos autores mostraban la dificultad tanto de elaboración como de comprensión y uso de este tipo de gráficos, entre ellos podemos señalar a Batanero, Estepa, y Godino (1991), Pfannkuch (2006) o Minnaard et al. (2002).

En la tabla 40 se muestra que contenido evalúa cada ítem.

Tabla 40. Contenido evaluado en cada ítem

Contenido evaluado	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cálculo del rango	X								X	X
Cálculo de la varianza	X		X							
Cálculo de la desviación típica	X	X	X							
Cálculo del recorrido intercuartílico	X									X
Cálculo de la mediana	X									X
Cálculo del diagrama de caja	X									X
Cálculo del coeficiente de variación	X	X								
Interpretación de la media y la desviación típica		X						X	X	
Desviación típica cero				X			X			
Desviación típica invariante						X				
Desviación típica positiva					X					

Como se observa en la tabla 40, salvo las propiedades, todos los contenidos aparecen en al menos dos ítems.

Como se permite el uso de calculadora, en los ejercicios de cálculo se evalúa tangencialmente el uso de ésta, y aunque no es el objetivo final de este test, sí que es interesante porque los alumnos que cometan errores numéricos y no de concepto pueden ser achacables a mal manejo de la calculadora.

La selección de estos ítems y no otros, se debe a una selección de dificultad, ya que la base de datos ARTIST está pensada para el uso en cursos preuniversitarios, por ello se han elegido las cuestiones que además de adaptarse a los contenidos de 3º de ESO se adaptan en nivel de dificultad a lo que los alumnos son capaces de hacer.

7.3.3. Validez del cuestionario.

Sobre la validez de los ítems, delMas, Garfield, Ooms y Chance (2007) definieron la realización del test y como seleccionaron los diferentes ítems.

Si bien es cierto que los ítems están validados para trabajarlos en grupos de estudiantes de estadística en curso pre - universitarios o introductorios, la selección que se ha hecho para este test de los ítems y estos mismos han sido adecuados al trabajo realizado en clase que se corresponde con lo desarrollado en los libros de texto del nivel escogido para pasar la prueba.

7.4. Análisis de los resultados

Se analizará el resultado ítem a ítem, explicando qué se buscaba en cada uno de ellos y qué se ha obtenido.

7.4.1. Ítem 1. Medidas de tendencia central, posición y dispersión. Diagrama de caja.

En el ítem 1 se incluía el cálculo de varias medidas de tendencia central y dispersión, así como la realización de un diagrama de caja.

7.4.1.1. Apartado a.

En este apartado se evaluaban las medidas, vistas una a una quizá no parezcan muy relevantes, pero uno de los objetivos de esta pregunta era estudiar cómo se manejan los alumnos con los diferentes cálculos de medidas, para conocer también si los cálculos de medidas de tendencia central están más asentados que los de medidas de dispersión. Por tanto, en este apartado había muchos cálculos de ambos tipos.

- Media.

La media es uno de los cálculos más utilizados por los estudiantes, de hecho, saben perfectamente calcular la media de sus notas en el momento que se las das, por tanto, lo que se hizo es incrementar el número de datos hasta 20, para estudiar también tangencialmente el manejo de la calculadora.

De los 38 estudiantes que realizaron el test, 30 contestaron a esta pregunta y 8 no. De los 30 que contestaron hay 3 que tuvieron un error numérico o de manejo de calculadora, ya que obtuvieron valores cercanos, pero no el valor exacto, y 2 respuestas incorrectas. Los restantes 25 obtuvieron respuestas correctas.

Los alumnos que obtuvieron una medida incorrecta no comprenden la media, ya que no dividen por el número de datos que obtienen (aunque sea incorrecto) y tampoco obtienen, ni utilizan una suma adecuada de los datos, en las figuras 69 y 70 se presentan sus respuestas

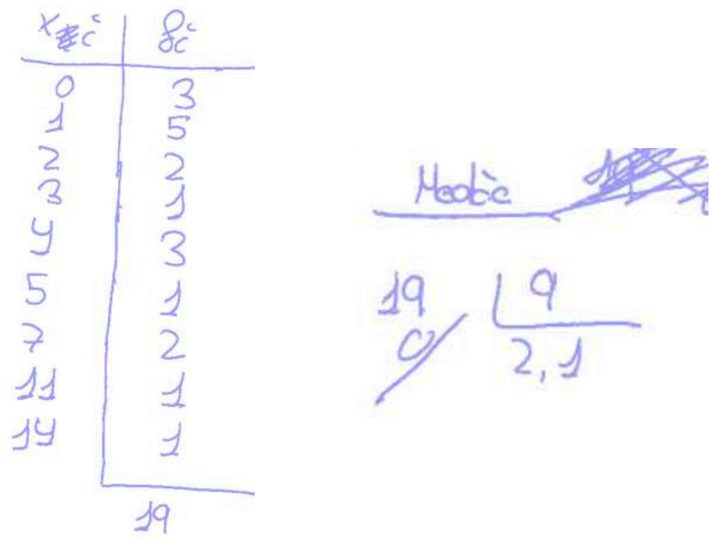


Figura 69. Respuesta incorrecta en el cálculo de la media 1

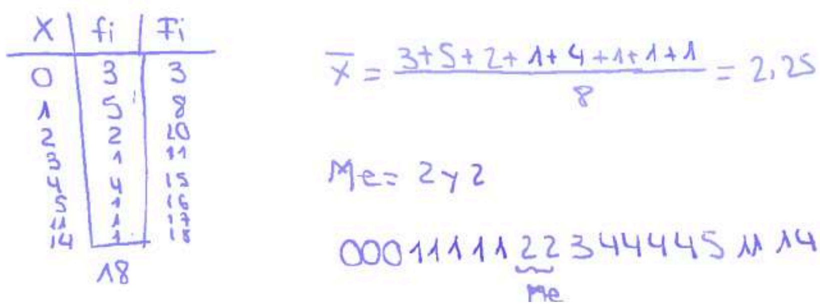


Figura 70. Respuesta incorrecta en el cálculo de la media 2

Se puede observar que ambos errores son iguales, dividen la suma de las frecuencias entre el número de filas que hay en dicha columna. En estos casos no han entendido no solo qué es la media o cómo se calcula, sino que tampoco han entendido como se resumen los datos en una tabla y que significan las columnas de esta tabla.

En porcentajes obtenemos los siguientes resultados:

- No contestan: 21,05 %

- Contestan incorrectamente: 5, 26 %
- Contestan correctamente: 65,79 %
- Tienen errores numéricos o de calculadora: 7,9 %

Si finalmente nos quedamos solo con los que responden:

- Error numérico: 10,01 %
- Error general: 6,66 %
- Responden correctamente: 83,33 %

  - Mediana.

La mediana es un cálculo algo más complejo que la media para los alumnos, si lo hacen con todos los datos suelen hacerlo correctamente, pero utilizando las tablas resumen se confunden y no saben hacerlo correctamente, esto se observa a nivel general en los test.

De los 38 estudiantes 11 no contestan a la cuestión. De los 27 que contestan 15 lo hacen de forma correcta, 9 lo hacen de forma incorrecta debido a no haber contado los datos correctamente o por error en la colocación de los datos y 3 tienen un error de concepto y no lo hacen correctamente.

En las figuras 71 y 72 se mostrará un error por colocación de datos y un error por no haber contado los datos correctamente.

Figura 71. Cálculo erróneo de la mediana por mala colocación de los datos.

Se observa en la figura 71 que no se han colocado los datos de forma ordenada de menor a mayor, por tanto, el valor que se obtiene de la mediana es erróneo. Este tipo de error es muy conocido en la literatura acerca de los errores comunes en el cálculo de la mediana apareciendo en Barr (1980), Mayen, Batanero y Díaz (2009) o Batanero et al. (1994).

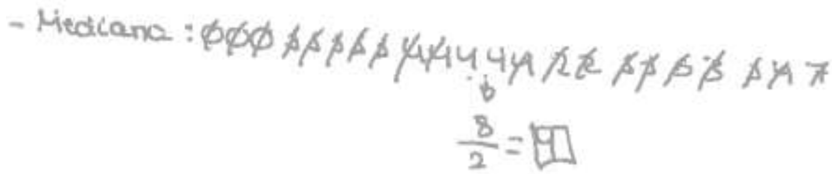


Figura 72. Cálculo erróneo de la mediana por mal conteo de datos.

En la figura 72 se observa que en lugar de los 20 datos originales se han incluido 22 datos, generando una mediana errónea.

Entre los errores de concepto podemos destacar los cálculos sin ordenar los datos, como en la figura 73.

Figura 73. Error en el cálculo de la mediana debido a no utilizar los datos.

Finalmente, para la mediana obtenemos los siguientes porcentajes:

- No contestan: 28,94 %
- Error de concepto: 7,89 %
- Error en la manipulación de datos: 23,68 %

- Responden correctamente: 39,47 %

Si finalmente nos quedamos solo con los que responden:

- Error de concepto: 11,11 %
- Error en la manipulación de datos: 33,33 %
- Responden correctamente: 55,55 %

  - Varianza.

La varianza es la primera medida de dispersión que se pide en el test. No es la más fácil de calcular, siendo la más sencilla el rango, pero es de las más utilizadas. Sin embargo, su algoritmo es algo más complicado y este curso es la primera vez que los alumnos estudian su cálculo. Aun así, los grupos han trabajado su cálculo de diferentes formas y se espera que puedan calcularla.

De los 38 estudiantes que realizaron el test 26 no contestaron este ítem, solo 12 lo hicieron. Este hecho ya nos da una idea de la dificultad que se presenta, puesto que en las medidas de tendencia central o posición las respuestas eran más numerosas, incluso las respuestas correctas en general eran ya más altas en número que las respuestas a este apartado.

De los 12 que contestan 7 lo hacen de forma correcta, 2 aplican la fórmula correcta y utilizan bien los datos, pero cometen un error numérico, 2 cometen errores en la fórmula y 3 tienen errores mayores.

En las figuras 68 y 69 se muestran ejemplos de los errores en fórmula y de los errores considerados mayores, como por ejemplo confusión con otra medida de dispersión. Estos errores aparecen en un cuestionario que hacen Del Puerto, Seminara y

Minnaard (2007) sobre los errores al realizar cálculos en estadística descriptiva, en el que confundir la fórmula aparece hasta un 27% de las veces en estudiantes de ingeniería argentinos, mientras que otros errores como la confusión con otra medida de dispersión (ellos hablan específicamente de confundir la desviación típica con la varianza) aparece un 5% de las veces. En nuestro análisis el error en fórmula tan solo alcanza al 5% de los estudiantes y la confusión de medidas arroja valores menores.

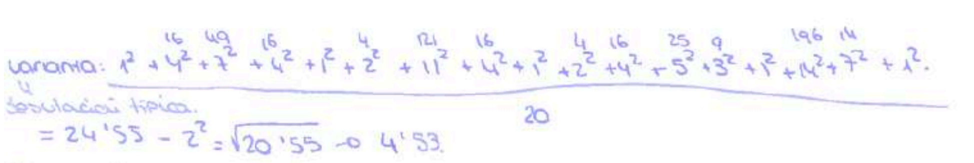


Figura 74. Error en el empleo de la fórmula en el cálculo de la varianza.

Se observa en la figura 74 que utiliza el cuadrado de los datos y resta un valor al cuadrado, el dato que resta es el que el estudiante ha calculado como mediana anteriormente, y no la media, que le habría dado el resultado correcto. Este error lo aplican dos alumnos de grupos diferentes, pero es un error sencillo de corregir con una breve explicación.

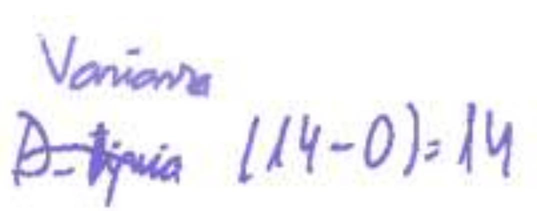


Figura 75. Confusión de medida de dispersión.

En la figura 75 se muestra un error más grave, que es la confusión de la medida, en este caso confunde el rango con la varianza.

En resumen, calculando porcentajes obtenemos:

- No contestan: 68,42 %
- Error numérico: 5,26 %
- Error en la fórmula: 5,26 %
- Incorrecto: 7,89 %
- Responden correctamente: 18,42 %

Si finalmente nos quedamos solo con los que responden:

- Error numérico: 16,65 %
- Error en la fórmula: 16,65 %
- Error general: 8,38 %
- Responden correctamente: 58,32 %

  - Desviación típica.

Es de esperar que quienes han contestado correctamente a la pregunta anterior puedan responder correctamente a esta, ya que la desviación típica se calcula sencillamente como la raíz de la varianza. Se han considerada correctas las respuestas que han dado aquello estudiantes que han cometido un error numérico en el apartado anterior y han utilizado "su" varianza para calcular la desviación típica si lo han hecho de forma correcta.

Tras estas consideraciones obtenemos que de los 38 estudiantes 26 no contestan al ítem, 10 lo hacen de forma correcta, uno de forma incorrecta y otro escribe la fórmula, pero no da la respuesta numérica.

En este caso no hay mucho que reseñar, por tanto, a continuación, se muestran los porcentajes de los resultados:

- No contestan: 68,42 %
- Solo fórmula: 2,63 %
- Incorrecto: 2,63 %
- Responden correctamente: 26,31 %

Si finalmente nos quedamos solo con los que responden:

- Solo fórmula: 8,32 %
- Incorrecto: 8,32 %
- Responden correctamente: 83,36 %

  - Coeficiente de variación.

Al igual que en el apartado anterior se han considerado como correctas las respuestas que utilizando la media o desviación típica obtenida errónea, si calculan adecuadamente este coeficiente.

De los 38 estudiantes solo 3 contestan, de los 3 que contestan uno de ellos lo hace de forma correcta y dos realizan la división al revés, dividiendo la media entre la desviación típica, este caso se considera incorrecto.

En porcentajes se obtiene:

- No contestan: 92,1 %
- Incorrecto: 5,26 %
- Responden correctamente: 2,63 %

Si finalmente nos quedamos solo con los que responden:

- Incorrecto: 66,58 %
- Responden correctamente: 33,42 %

- Rango.

Es de esperar que esta medida de dispersión, por su facilidad de cálculo, sea calculado por la mayoría de los estudiantes, sin embargo, como se muestra a continuación, no es así como sucede.

De los 38 estudiantes, 24 no contestan, de los 14 que sí lo hacen, hay 12 respuestas correctas y dos incorrectas. Uno de los estudiantes que responde de forma incorrecta lo confunde con el recorrido intercuartílico y el otro simplemente indica un número erróneo.

En porcentajes se obtiene:

- No contestan: 63,16 %
- Incorrecto: 5,26 %
- Responden correctamente: 31,58 %

Si finalmente nos quedamos solo con los que responden:

- Incorrecto: 14,27 %
- Responden correctamente: 85,73 %

- Recorrido o rango intercuartílico.

Este parámetro también es uno de los más complicados junto con la varianza, ya que el cálculo de cuartiles es algo que les cuesta asimilar a los alumnos.

En este caso, de los 38 estudiantes tan solo 8 responden, 6 lo hacen de forma correcta, y los 2 restantes se equivocan en el cálculo de los cuartiles, pero comprenden los que deben hacer.

En porcentajes se obtiene:

- No contestan: 78,94 %
- Incorrecto: 5,26 %
- Responden correctamente: 15,79 %

Si finalmente nos quedamos solo con los que responden:

- Incorrecto: 25 %
- Responden correctamente: 75 %

7.4.1.2. Apartado b.

Para poder realizar este cálculo es necesario que se realizasen de forma correcta cálculos previos, como la mediana o el recorrido intercuartílico. En este caso, la sorpresa viene de hallar más respuestas que en la última cuestión del apartado anterior, paso necesario para representar el diagrama de caja.

De los 38 estudiantes, 26 no contestan, 12 lo hacen, 2 de ellos de forma correcta y 10 de ellos de forma incorrecta. Entre los errores nos encontramos 2 estudiantes que hacen otro tipo de diagrama, uno de ellos un diagrama de sectores y otro un diagrama de barras, 3 que no utilizan datos, solo dibujan un diagrama de caja sin hacer cálculos, 3 que lo hacen todo bien salvo que no calculan los valores atípicos, por lo cual no se puede considerar que el diagrama de caja esté completo, y por último otros 2 con respuesta incomprensible. Por tanto 2 lo hacen de forma correcta y 3 lo hacen todo, excepto los valores atípicos, los otros 5 se agrupan como incorrectos.

En porcentajes se obtiene:

- No contestan: 68,42 %
- Incorrecto: 13,16 %
- Responden correctamente: 5,26 %
- Responden con errores (no calculan valores atípicos): 7,89 %

7.4.1.3. Comentarios a los resultados del primer ítem.

En este último apartado del primer ítem, dado que es uno de los más extensos, se va a construir una tabla para que se puedan comparar los resultados de cada pequeño apartado, con el objetivo de conseguir, no solo resultados parciales, sino de poder analizar el ítem de forma global.

Por tanto, en la tabla 41, se muestran los resultados por apartado, mostrando en cada uno el porcentaje de respuestas correctas, incorrectas y de no respuestas, agrupando en las incorrectas todos los tipos de error.

Tabla 41. Porcentaje de respuestas a los diferentes apartados del ítem 1

	Media	Median	Varianz	Desv. típica	Coef. Var.	Rango	Rec. Interc.	Diag. de caja
No contesta	21,05	28,94	68,42	68,42	92,1	63,16	78,94	68,42
Correcta	65,79	39,47	18,42	26,31	2,63	31,58	15,79	5,26
Incorrecta	13,16	31,57	18,41	5,26	5,26	5,26	5,26	21,05

A pesar del tamaño de la muestra y del alto número de no respuestas, se aprecian en la tabla algunos elementos de discusión. Las medidas de tendencia central obtienen muchas más respuestas y muchas más respuestas correctas que las medidas de dispersión. Entre las medidas de dispersión el rango y la desviación típica, calculada como la raíz cuadrada positiva de la varianza, reciben más respuesta y más acierto que el resto de las medidas de dispersión que tienen algoritmos más complejos.

A pesar de haber utilizado las sugerencias de algunos autores para la explicación de estos contenidos, como, por ejemplo, Yap (2008) o Hart (1984) creo que los profesores caen siempre en la subestimación de la dificultad de estos cálculos como indicaba Gardfield (1995). Solo hay que observar que bajo número de respuestas se presentan a pesar de haber trabajado estos procedimientos de forma repetitiva en clase. Aunque es difícil contrastar estos resultados con los de otros autores, ya sea por la edad de los participantes o por el tipo de ejercicio (cálculo usado en este estudio frente a razonamiento utilizado en estudios previos) Clark et al. (2007) utilizaron estudiantes universitarios sobresalientes en estadística y a pesar de sus calificaciones previas más de un tercio de dichos estudiantes tenían dificultades de razonamiento y cálculo, con más razón encontraremos las mismas dificultades cuando en la muestra hay estudiantes que han suspendido la unidad o muestran dificultades previas en el tema y en la propia asignatura de matemáticas, ya sea por la desmotivación intrínseca de la vía o por su relación con las matemáticas como indicaban Bazán y Pereda (2006).

7.4.2. Ítem 2. Comparación de distribuciones.

En este ítem, que se contestaba de forma tipo test, pero en el que se esperaba que se realizasen ciertos cálculos, para calcular el coeficiente de variación, o algún dibujo que explique la respuesta, los alumnos no han trabajado según lo esperado. Debido a que el cálculo del coeficiente de variación es el que, según la tabla 42, más les cuesta a los alumnos, el resultado está dentro de lo que se espera tras analizar el ítem 1. También se podía hacer tan solo con la desviación típica si el estudiante se percataba de que la media de las tres muestras era la misma, lo que con la calculadora era rápido.

En este ítem la respuesta correcta era la muestra 3, que tiene la desviación típica y, por tanto, el coeficiente de variación más bajo.

De los 38 alumnos 20 no han respondido, 17 han dado una respuesta y 1 un pequeño argumento sin llegar a concretar la misma. De las 17 respuestas 6 respondieron la muestra 1, 6 la muestra 2 y 5 la muestra 3.

Por tanto, y en vista del resultado del primer ítem, las respuestas se han dado de forma aleatoria o sin realizar ningún cálculo. Para fortalecer este aspecto se debe trabajar durante más tiempo de la forma que propone Sánchez y Orta (2013) que ya avanzaban que existían dificultades cuando se trabaja de forma conjunta la media y las medidas de dispersión para comparar distribuciones.

7.4.3. Ítem 3. Varianza y desviación típica a partir de datos tabulados.

El ítem 3 pretendía, en este caso, evaluar el cálculo de la varianza y la desviación típica en datos tabulados. De los 38 estudiantes, al primer apartado, solo 9 contestaron, 4 de forma correcta, 4 de forma incorrecta y un estudiante tuvo un error numérico. Al segundo apartado contestaron 8, 7 dieron una respuesta correcta y uno un argumento, se han considerado respuestas correctas todas aquellas que están bien calculadas a partir de la varianza del apartado anterior, aunque la varianza fuese errónea.

Porcentualmente tenemos para el primer apartado:

- No contestan: 76,32 %
- Incorrecto: 10,52 %
- Responden correctamente: 10.52 %
- Error numérico: 2,64 %

Y para el segundo apartado:

- No contestan: 78,94 %
- Argumento: 2,64 %
- Responden correctamente: 18,42 %

Por comparación con el ítem 1 se puede percibir que el cálculo de la varianza y la desviación típica a partir de datos tabulados es más difícil para los estudiantes que con datos no tabulados.

7.4.4. Ítem 4. La desviación típica solo es 0 cuando todas las medidas son iguales.

En este ítem se pretende evaluar la comprensión de que la desviación típica solo es 0 cuando todas las medidas son iguales, a pesar de haberse explicado explícitamente en clase no todos los alumnos son conscientes de este hecho.

La respuesta correcta es la C. Sin embargo, la respuesta A se plantea como distractor, ya que muchos estudiantes no entienden lo que los cuadrados aportan a la varianza y por ende a la desviación típica, ya que ninguna medida de dispersión relativa a la media es sensible a que los datos sean mayores o menores que la media. La respuesta B también es un distractor, en el sentido de que a los estudiantes se les explica que la desviación típica es positiva y muchos piensan que no puede ser 0. Por último, los estudiantes que eligen la respuesta D piensan que la relación con las medidas de tendencia central es más fuerte de lo que en realidad es.

Una vez realizadas estas consideraciones, los porcentajes de respuestas dadas son:

De los 38 estudiantes, 6 no contestan. De los que contestan, 6 responden A, 2 responden B, 12 responden C y 12 responden D.

En porcentaje de respuestas tenemos:

- No contestan: 15,79 %
- Contestan A: 15,79 %
- Contestan B: 5,26 %
- Contestan C: 31,57 %
- Contestan D: 31,57 %

Las respuestas C y D son las más ampliamente elegidas.

7.4.5. Ítem 5. Positividad de la desviación típica.

En este ítem se trata de evaluar si el estudiante comprende que la desviación típica siempre ha de ser no negativa y que, como se indicaba en el apartado anterior, solo es 0 si todas las medidas coinciden.

En este caso la respuesta correcta es la A. Los distractores B y C, hacen referencia a las puntuaciones y la media para comprobar hasta qué punto los estudiantes consideran que influyen el cálculo.

De los 38 estudiantes contestaron 31, 12 contestaron la A, 10 la B, 4 la C y 5 la D.

En porcentaje de respuestas tenemos:

- No contestan: 18,42 %
- Contestan A: 31,57 %
- Contestan B: 26,31 %
- Contestan C: 10,52 %
- Contestan D: 13,16 %

Las respuestas A y B son las más ampliamente dadas.

7.4.6. Ítem 6. Invariancia ante traslación de la desviación típica.

En este ítem se trata de evaluar el conocimiento de la propiedad de invariancia ante traslación de la desviación típica, es decir, si a toda la colección de datos se le añade o resta la misma cantidad, la desviación típica no cambia.

En este caso la D es la respuesta correcta, los distractores A y B mostrarán estudiantes que razonen que la media es más importante que el conjunto de los datos y no se percaten de que en la desviación típica se trabaja con distancias. Y la C mostrará estudiantes que piensen que la media no importa para el cálculo de la desviación típica.

De los 38 estudiantes contestan 32, 4 responden la A, 14 responden la B, 2 responden la C, 12 responden la D.

En porcentaje de respuestas tenemos:

- No contestan: 15,79 %
- Contestan A: 10,52 %
- Contestan B: 36,84 %
- Contestan C: 5,26 %
- Contestan D: 31,57 %

Las respuestas B y D son las más ampliamente dadas. Los que responden B no conocen la propiedad de la media: Si se suma/resta el mismo número a todos los valores de un conjunto de datos la media aritmética aumenta/disminuye en ese mismo número.

7.4.7. Ítem 7. Razonamiento sobre la positividad de la desviación típica.

En este caso se pretendía lo mismo que en el ítem 5, pero mediante un razonamiento. Hay 19 respuestas, todas en el mismo sentido, indicando que la desviación típica no puede ser negativa. Esto contrasta con las respuestas al ítem 5 donde tan solo 10 estudiantes respondieron de forma correcta.

En este caso 4 estudiantes no argumentan, solo indican que no puede ser negativa. 4 hacen alusión al hecho de que la raíz cuadrada no puede dar un resultado negativo. 3 de ellos la confunden con la desviación media, ya que indican que al usarse valores absolutos no puede salir negativa. 2 estudiantes indican que no puede salir porque el 0 es su mínimo. 1 de ellos hace alusión a que al utilizar datos al cuadrado no puede salir negativa. El resto de las respuestas hasta 5 hacen alusión a la media o al orden de los datos, son alumnos que saben que no puede dar negativa, pero los motivos que aducen indican que no lo tienen claro.

Resumiendo, 10 alumnos argumentan de forma clara, aunque 3 de ellos errónea y los otros 9 o no argumentan, o los argumentos no son claros. Esto si encaja con el ítem 5 donde solo 10 estudiantes indicaron que si la desviación típica era negativa se debía a un error en las operaciones.

En porcentajes se obtiene:

- No contestan: 50 %
- Argumento correcto: 18,43 %
- Argumento erróneo: 7,89 %
- No argumentan o argumento no claro: 23,68 %

7.4.8. Ítem 8. Razonamiento sobre la desviación típica.

En este ítem se mostraban dos distribuciones al alumno y se le pedía razonar acerca de cuál de las dos distribuciones tenía una desviación típica mayor. La respuesta correcta es la B.

De los 38 estudiantes 32 contestaron a la cuestión. 3 optaron por la respuesta A, 16 optaron por la respuesta B, 4 por la respuesta C y 9 por la respuesta D.

En porcentaje de respuestas tenemos:

- No contestan: 15,79 %
- Contestan A: 7,89 %
- Contestan B: 42,1 %

- Contestan C: 10,52 %
- Contestan D: 23,68 %

Las respuestas B y D son elegidas más ampliamente. Las respuestas D muestran la no consideración del contexto y las características de los elementos de la muestra para la estimación de la desviación típica. Las respuestas C consideran erróneamente que el tamaño de la población influye en la desviación típica

En la tabla 42 se resumen las respuestas de los ítems 4 a 8, excepto el 7 (que es argumentativo).

Tabla 42. Respuestas a los items sobre propiedades de la desviación típica

	ítem 4	ítem 5	ítem 6	ítem 8
No contesta	15,79	18,42	15,79	15,79
Correcta	31,57	31,57	31,57	42,1
Incorrecta	52,64	50,01	52,64	42,09

Al igual que en estudios previos, las dificultades en el razonamiento de los estudiantes sobre la desviación típica y sus propiedades son persistentes, tal y como indicaban Mathews y Clark (2007) o Turegun (2011) que indicaba que a pesar de que los alumnos conocen el algoritmo cuando se pide una propiedad o un razonamiento en un contexto con datos manifiestan dificultades que radican en que no son capaces de conectar el número que obtienen con su significado. Por ejemplo, el propio Turegun indicaba que los estudiantes utilizaban su propio vocabulario para hablar acerca de las medidas de dispersión, algo que se aprecia también en el siguiente ítem.

7.4.9. Ítem 9. Razonamiento sobre la desviación típica.

En este ítem, al igual que en el anterior, se les pedía discernir cuál será la desviación típica sin hacer operaciones, la dificultad añadida al anterior es que ahora se pretende que expresen con sus palabras el razonamiento que siguen.

De los 38 estudiantes solo 10 responden, algunas de las respuestas dadas se pueden observar en la figura 76.

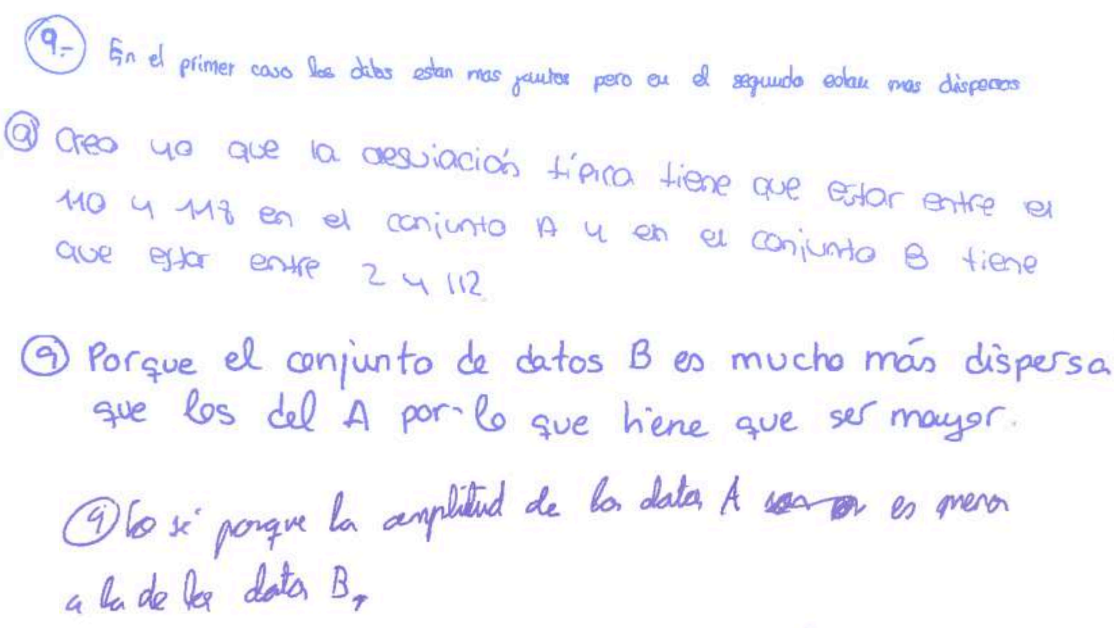


Figura 76. Respuestas al ítem 9.

La primera respuesta que da un estudiante dice “en el primer caso los datos están más juntos, pero en el segundo más dispersos” esta respuesta es esencialmente correcta, ya que la desviación típica mide cómo de agrupados están los datos en torno a la media. Otras tres respuestas van en el mismo sentido, aunque con diferentes palabras.

Tres estudiantes dan respuestas son correctas, pero mediante una ligera "trampa", ya que se les pedía en el enunciado que no hiciesen cálculos y los han hecho.

La segunda respuesta no da mucha información, dice el estudiante "creo yo que la desviación típica tiene que estar entre el 110 y el 118 en el conjunto A y en el conjunto B tiene que estar entre 2 y 112" algo que no es cierto, y no indica ningún razonamiento acerca de por qué una desviación típica debería ser mayor que otra. Probablemente ha atribuido a la desviación típica la propiedad de la media aritmética que dice: "El valor de la media aritmética está comprendido entre el máximo y el mínimo".

Otra respuesta es errónea también, ya que dice que la desviación típica del conjunto cuyos datos están entre 110 y 118 no tiene por qué ser menor que la de la distribución que está entre 2 y 112, aduciendo que el tamaño de las cifras no influye en la desviación típica, por lo que parece que el estudiante confunde la invariancia ante traslación de la desviación típica con el tamaño de ésta y lo que afecta a ella.

Por último, hay una respuesta errónea todo lo contraria a la anterior, en este caso el estudiante indica que debido a que hay números más pequeños en la segunda distribución la desviación típica debe ser menor, sin considerar la amplitud del conjunto de datos.

En porcentaje de respuestas obtenemos:

- No contestan: 73,69 %
- Contestan correctamente: 10,53 %
- Contestan correctamente realizando cálculos: 7,89 %
- Contestan erróneamente: 7,89 %

7.4.10. Ítem 10. Razonamiento gráfico sobre el diagrama de caja.

En este ítem se pretendía evaluar la comprensión y traducción gráfica entre dos diagramas diferentes, sin duda es uno de los ejercicios más difíciles porque en ningún texto se trabaja explícitamente este tipo de ejercicios, es pues, ir un poco más allá de lo que tradicionalmente pide el libro.

En este caso la respuesta correcta es la B, se puede dilucidar por diferentes motivos, el tamaño de la caja o hasta donde llega el bigote inferior.

De los 38 estudiantes 31 contestaron a la cuestión. 5 optaron por la respuesta A, 7 optaron por la respuesta B y 19 por la respuesta C.

En porcentaje de respuestas tenemos:

- No contestan: 18,42 %
- Contestan A: 13,16 %
- Contestan B: 18,42 %
- Contestan C: 50 %

La respuesta C es elegida más ampliamente, a partir de esta respuesta mayoritaria se puede inferir que los estudiantes no calculan correctamente los bigotes debido a que en los textos este cálculo no viene bien explicado.

7.5. Discusión y conclusiones de los resultados

El cuestionario tiene carácter exploratorio y la muestra es intencional, por tanto, los resultados obtenidos no son extrapolables, pero que nos dan información acerca de algunas debilidades de la enseñanza de las medidas de dispersión.

Realizado este comentario se va a pasar a analizar los resultados de los test, y que a pesar de que la muestra es pequeña se pueden obtener algunas conclusiones interesantes.

En la tabla 42, que es el resumen el primer ítem, se observa que las medidas de centralización y posición, es decir, la media y la mediana, la realizan correctamente el 66% y el 40% de los estudiantes, prácticamente el doble que las medidas de dispersión, excepto el rango, que es más sencillo de calcular, que solo calculó correctamente el 31% de los estudiantes. Esto lleva a concluir para esta muestra, que las medidas de centralización están más trabajadas y son más asequibles a los estudiantes, además relegan las medidas de dispersión a un segundo lugar, debido a que no saben calcularlas o no las entienden.

En dicha tabla se analiza también la representación del diagrama de caja, si observamos el número de respuestas correctas, que son 2, y las casi correctas, que son otras 3, se deduce que es uno de los conceptos que más necesita ser trabajado. Es cierto que este curso académico es la primera vez que se incluye en el temario de 3º de ESO, ya que en la LOE no aparecía hasta 4º de ESO, por tanto, se debe hacer una oportunidad de este cambio, ya que permite trabajarlo en dos cursos en lugar de en uno, como sucedía con la anterior legislación. Este ítem se puede analizar junto con el ítem 10, que lejos del análisis profundo de cómo han traducido un gráfico a otro, se puede observar cómo piensa el estudiante que debe ser un diagrama de caja, la caja simétrica y sin valores atípicos. Es curioso que bastantes estudiantes hayan escogido este modelo, frente a los otros dos, que se aproximaban bastante más al diagrama que correspondía a los datos.

Con respecto al ítem 2, y también al 1, se observa en este caso que el coeficiente de variación es uno de los cálculos al que menos sentido ven los alumnos y que más les cuesta dentro de las medias de dispersión. Solo 1 estudiante calculó correctamente el coeficiente de variación, aunque 2 se equivocaron en el orden de la fórmula, en el ítem 2, al ser tipo test, y en vista de la simetría de las respuestas, no se puede descartar la aleatoriedad. Sí es de mencionar, que el estudiante que calculó correctamente el coeficiente de variación en el primer ítem también respondió correctamente el ítem 2.

En el tercer ítem solo 4 estudiantes calculan correctamente la varianza, frente a los 7 del primer ítem, la diferencia es que en el primer ítem los datos eran independientes y en el ítem 3 se presentaban de forma agrupada en una tabla. Por tanto, se observa que, incluso en los estudiantes que consiguen dominar la varianza, el que existan varias fórmulas para datos tabulados y sin tabular representa un problema, que se debe de atajar trabajando más en profundidad esta fórmula.

Los ítems 4, 5 y 6 evaluaban las propiedades de la desviación típica, es cierto que el que la respuesta sea tipo test invita al alumno a responder, aunque sea de forma aleatoria, pero también es cierto que estas preguntas son más sencillas de responder para los estudiantes, ya que son propiedades que se han nombrado en clase y que se les quedan grabadas, mientras que los algoritmos, si no los trabajan en profundidad no los aprenden, y precisamente los algoritmos de las medidas de dispersión son complejos y es la primera vez que los estudian. En la tabla 43 se presenta un breve resumen de las respuestas a estas tres preguntas.

Tabla 43. Resumen de los ítems 4, 5 y 6.

	Desviación típica 0	Positividad de la desviación típica	Invariancia de la desviación típica
Respuesta correcta	31,57 %	31,57 %	31,57 %
Respuesta incorrecta	52,64 %	50,01 %	52,64 %
No contesta	15,79 %	18,42 %	15,79 %

De los 12 estudiantes que responden cada ítem correctamente, 6 tienen los tres ítems simultáneamente correctos. Lo que nos indica que la mitad de los estudiantes que contestan no conocen todas las propiedades o lo hacen de forma aleatoria, pero al menos un 15,79 % de los estudiantes comprenden las propiedades de las medidas de dispersión.

En el ítem 7 se les pedía a los estudiantes que argumentaran acerca de la no negatividad de la desviación típica, 19 alumnos contestaron que no podía serlo, pero no todos argumentaron, estas 19 respuestas colisionan con el ítem 5 donde solo 5 estudiantes indicaban que la desviación típica negativa era un error operacional, sin embargo, si de estas 19 respuestas nos quedamos solamente con las 7 que están bien argumentadas se alinean bastante bien los dos test, teniendo en cuenta además que los alumnos que responden bien a ambas cuestiones coinciden. Por tanto, se puede hablar de entre 5 y 7 alumnos que comprenden bien esta propiedad.

El ítem 8 evaluaba la comprensión, pero también la intuición sobre el tamaño de la desviación típica de dos distribuciones, con casi un 42 % de respuestas correctas es una de las preguntas con más aciertos eliminando los cálculos de medidas de tendencia central, sin embargo, si evaluamos junto con el ítem 9, que era la misma pregunta, pero con argumentación, se observa que tan solo la mitad de estos estudiantes comprenden de verdad lo que están haciendo. En este caso puede suceder que al ser el ítem 8 una cuestión de elección múltiple otros estudiantes hayan marcado aleatoriamente la respuesta correcta. Por tanto, solo se puede decir de 8 estudiantes que realmente entienden que a una mayor dispersión de datos un mayor tamaño de desviación típica.

En el ítem 9 se puede apreciar que el razonamiento de los estuantes muchas veces es pobre y falto de lenguaje, como ya indicaban en sus estudios previos sobre la expresión del razonamiento estadístico en medidas de dispersión Watson y Kelly (2008).

Como conclusiones se pueden obtener varias interesantes. En primer lugar, que las medidas de centralización, como la media, son más fáciles de calcular y los alumnos las manejan mejor que las de dispersión como ya indicaban Garfield (2002), Shaughnessy (2006) o Lee y Lee (2011). En segundo lugar, que las medidas de dispersión son complejas para los alumnos, siendo el rango la más sencilla de calcular y le sigue la desviación típica como raíz de la varianza. Además, les cuesta menos calcularlas para datos independientes que para datos agrupados, quizá porque estos últimos no son tampoco bien comprendidos. En tercer lugar, el uso de las medidas, para comparar distribuciones es casi nulo en estos estudiantes, el uso del coeficiente de variación es muy difícil para ellos. Tampoco tienen facilidad para la representación de diagramas de caja, teniendo un concepto de él diferente al que debe ser. En cuarto lugar, las propiedades las conocen, pero no su fundamento, por lo tanto, saben que la desviación típica no puede ser negativa, pero cuando se profundiza en su comprensión se observa que no saben por qué y no saben aplicarlo.

7.6. Encuesta sobre el nivel de enseñanza de estadística en 3º de ESO.

A pesar de que la muestra utilizada en el cuestionario era puramente intencional nos percatamos de que en nuestro entorno la mayoría de los grupos no trabajaban la unidad didáctica de estadística. Tras ser conscientes de que no se había cuantificado que impacto tenía este hecho y que el que no se enseñe la estadística no está demostrado empíricamente decidimos plantearnos la siguiente pregunta. ¿Se enseña la estadística o no? Y decidimos lanzar una encuesta en la comunidad andaluza con esta pregunta como motivo principal.

Para ello se ha obtenido el listado de centros andaluces por provincia de la página web de la junta de Andalucía http://vscripts.ced.junta-andalucia.es/centros/index.asp#. En la lista figuran 867 centros, de los cuales 79 son de Almería, 126 de Cádiz, 89 de Córdoba, 93 de Granada, 60 de Huelva, 86 de Jaén, 143 de Málaga y 191 de Sevilla.

7.6.1. Elección de la muestra.

Consultando diversos manuales para calcular el tamaño de la muestra existen diversas fórmulas muy similares, se ha optado por utilizar bibliografía ampliamente difundida y consolidada como Pérez (2010), Hernández, Fernández y Baptista (2014) que se halla en su sexta edición, o Martínez (2012) que se encuentra en su decimotercera edición.

Para el cálculo de la muestra se ha utilizado el software Stats 2.0 que provee el manual de Hernández et al. (2014) y que se puede descargar gratuitamente en la página https://www.decisionanalyst.com/download/.

Con este software, considerando un error máximo del 5 % y un nivel de confianza del 95 % se obtiene una muestra de tamaño 267.

Para la elección de los 267 centros considera que la población se encuentra distribuida en 8 provincias, que consideramos conglomerados, que se comportan de forma heterogénea acerca de las variables a analizar.

La elección pues, se hace repartiendo los 267 centros proporcionalmente a los centros que hay en cada provincia, resultando 24 centros de Almería, 39 de Cádiz, 27 de Córdoba, 29 de Granada, 18 de Huelva, 27 de Jaén, 44 de Málaga y 59 de Sevilla.

Para elegirlos se toma el listado de la provincia ordenado alfabéticamente y se generan la cantidad de números que tiene la muestra entre 1 y el número de centros de la provincia aleatoriamente sin repetición a través de la web http://www.alazar.info/generador-de-numeros-aleatorios-sin-repeticion.

7.6.2. Elaboración y distribución del cuestionario.

El cuestionario se realiza en a través de un formulario de Google que se encuentra en la página https://goo.gl/forms/6QmEVmlgZiZl0VC63 y en el apéndice 4 y que consta de tres preguntas que identifican al centro, que son: nombre del centro, localidad del mismo y provincia. Otras dos preguntas referentes a los grupos en los que se impartió la unidad de estadística, donde se les pregunta el número de grupos de matemáticas de 3ª de

ESO que había en el centro y el número de grupos en los que se impartió la unidad de estadística. Por último, se lanzan dos preguntas abiertas para que expliquen el motivo por el que no se trabajó el tema de estadística en todos los grupos y cuál es la opinión del docente que responde acerca de que no se llegue a este tema.

Con este cuestionario se pretende principalmente analizar en cuántos grupos se imparte la estadística y de paso conocer la opinión del profesorado acerca del posible bajo nivel de implantación de este tema.

El método para hacer llegar el cuestionario a los centros fue a través del correo electrónico de los directores de los centros educativos seleccionados y a través del grupo de docentes de matemáticas de Andalucía de Facebook.

Con estos métodos esperábamos tener una no respuesta elevada, pero el resultado sorprendió por la baja tasa de respuesta, con lo que se fue llamando uno a uno a los centros que no respondieron por los dos métodos anteriores. A pesar del esfuerzo realizado para llamar a casi 180 centros, uno a uno, en muchos no se obtuvo una respuesta. Las no respuestas se deben principalmente a tres motivos: a) en cuatro o cinco llamadas al centro no se nos pudo pasar con un responsable de matemáticas, b) en los centros no permanecía ningún profesor que hubiese estado el año anterior, c) a pesar de la insistencia los profesores contactados simplemente no dieron una respuesta al cierre del periodo establecido para la encuesta.

7.6.3. Análisis del cuestionario.

En esta encuesta hemos encontrado un nivel de no participación previamente esperado muy elevado tal y como se indicaba al final del apartado anterior. Este será el primer punto que se analice.

En la tabla 44 mostramos la tasa de no respuesta por provincia y en general.

Tabla 44. Tasa de no-respuesta al cuestionario.

Provincia	Centros encuestados	Centros que responden	Porcentaje de no respuesta
Almería	24	13	45.83%
Cádiz	39	34	12.82%
Córdoba	27	21	22.22%
Granada	29	21	27.59%
Huelva	18	17	5.56%
Jaén	27	27	0%
Málaga	44	10	77.27%
Sevilla	59	49	16.95%
Total	267	192	28.09%

A pesar de la alta tasa de no respuesta se obtuvieron unos datos muy ilustrativos de este 22% de los centros andaluces encuestados. El número de grupos totales y en los que se imparte la estadística de forma completa se muestra en la tabla 45.

Tabla 45. Porcentaje de grupos en los que no se enseña la estadística en 3º de ESO.

Provincia	Número de grupos	Grupos en los que se enseña la estadística	Porcentaje de grupos en los que no se enseña la estadística
Almería	47	14	70.21%
Cádiz	104	33	68.27%
Córdoba	62	23	62.90%
Granada	58	13	77.59%
Huelva	48	15	68.75%
Jaén	80	20	75%
Málaga	33	14	57.57%
Sevilla	149	55	63.09%
Total	581	187	67.81%

Todas las provincias se mantienen por encima del 50% de grupos en los que no se trabaja la estadística, entre el 57% de Málaga y el 77% de Granada, teniendo a nivel general en Andalucía un 67.81% de los grupos en los que no se trabaja la estadística.

En este estudio intentábamos contrastar que el porcentaje de grupos en los que se imparte estadística es bajo.

Hemos obtenido que tan solo un 32% de los grupos de los 192 centros que han respondido estudian estadística.

Además de esta cuestión se pidió a los profesores una explicación acerca de por qué no se había llegado a este bloque, la respuesta es oral y en ocasiones larga, por tanto, se ha categorizado para un resumen más sencillo. La mayoría de los profesores que responden al test completo lo hacen con información de otros profesores que no impartieron la materia debido a la rotación de plantillas, así que no responden la cuestión, los que lo hacen, por tanto, son pocos, y algunos casos recogieron este hecho en acta de reunión de departamento y es la respuesta que enviaron. Las respuestas que proporcionan se resumen en la tabla 46.

Tabla 46. Respuestas a por qué no se enseña estadística en 3º de ESO

Respuesta	Número de respuestas
El temario es muy extenso	23
Falta de tiempo	42
El nivel de los estudiantes no permite llegar	11
Son los últimos temas y no se dan	6
Baja del profesor / tardanza en sustituciones	4
Total	86

De los 192 centros que contestan, tan solo 86 responden a esta pregunta, evidentemente tan solo responden aquellos en los que no se trabajan los temas de estadística. Categorizar las respuestas ha sido complejo, así que se han utilizado sus respuestas textuales, aunque algunas categorías implican la misma problemática.

La primera categoría indica que “el temario es muy extenso”, con estas mismas palabras o similares lo han indicado los encuestados. En esta expresión subyace la idea de que la estadística es el último tema y que debido a la extensión del curriculum es el tema que se deja, ya que suelen seguir el orden establecido.

La segunda categoría, que se complementa con la anterior, expresa que “falta tiempo”, normalmente los encuestados han empleado esta frase de forma literal. De nuevo la idea que existe debajo es la longitud del curriculum del nivel y que la estadística se encuentra al final y en este orden se trabaja.

La tercera categoría responde a una queja de muchos profesores, pero no en esta encuesta, “el nivel o perfil del alumnado”. En este caso justifican que no se trabaja estadística porque no se puede trabajar todo el temario debido al nivel del alumnado y de nuevo la estadística se sitúa al final y es la que paga esta situación.

La cuarta categoría la conforman los que responden directamente que “son los últimos temas”, aunque debajo y sin indicarlo subyacen las problemáticas de las tres primeras categorías.

Por último y aunque son pocos, aquellos que indican que debido a ausencias del profesorado y su tardanza en sustituir el temario no se dio de forma completa, pero que se suele dar.

En realidad, las cuatro primeras categorías muestran la misma problemática, la estadística se encuentra al final y no se contempla, dentro de la autonomía pedagógica de los departamentos, cambiar ese orden, por tanto, como el temario es muy largo, el tiempo escaso o los estudiantes lo ponen difícil no se llega.

Sin embargo, y aunque no se incluye en la tabla 46, la mayoría de los centros, 30 de 34 centros, en los que la estadística si se imparte, se hace porque el orden se modifica en dicho curso, adelantando el bloque de estadística. En otros centros indican que en 3º de ESO no se imparte, pero para que se vea en algún curso, ese cambio de orden se hace en 4ºde ESO. Por tanto, existe una posible solución, en uno o varios cursos hay que seguir un orden diferente al que marca el curriculum estatal y autonómico.

La última cuestión que se plantea en la encuesta aborda la opinión que les merece como profesionales el hecho de no impartir estadística en caso de que en su centro no se haga, aunque si se impartía también podían opinar sobre el hecho de que en muchos centros no se haga. En este caso la inmensa mayoría indicaba que les parecía mal o frustrante, pero también hay profesores que podemos denominar "aritmético – algebraicos" que les parece oportuno sacrificar la estadística en pos de dedicar más tiempo a los primeros bloques.

Para finalizar el capítulo transcribo literalmente algunas de esas opiniones, ya que es oportuno dar voz a los profesionales que se enfrenta al problema a diario.

- Entre los que le parece mal destaco las siguientes:

“Me parece negativo para el alumnado. Deberían contar con los profesores a la hora de realizar el curriculum para que se adapte a las necesidades reales de la sociedad y eso incluye que se dé la estadística en 3º de ESO.”

“Es un hecho que hoy día la Estadística tiene un mayor alcance y aplicación en el campo de todas las disciplinas sociales y científicas que la matemática que se da en bachillerato. El problema es que esta materia no se imparte en bachillerato científico-tecnológico, en el que se da mayor prioridad a otros temas matemáticos ya si no en desuso, sí con una utilidad mínima y específica, tales como la Geometría analítica en el espacio, o los métodos de integración. A partir de aquí, dado que la Universidad exige estos contenidos en Selectividad, está montado todo el sistema desde abajo. Es decir, se priorizan estudios de funciones u operaciones con números fraccionarios antes que el conocimiento básico del concepto de muestreo, por ejemplo. Craso error, sin duda. Creo que es un imperativo de la sociedad del conocimiento que la Estadística tenga un lugar propio en los sistemas educativos y sea una materia casi de carácter obligatorio a partir de un cierto nivel, que bien podría ser 3º ESO, además de ser combinada con técnicas TIC.”

“Debe de cursase ya que en la actual legislación es un contenido. En nuestro centro desde hace varios años comenzamos el temario con la Estadística para garantizar que nuestros alumnos la dan. Es una pena que alumnos que luego hacen estudios universitarios relacionados con ciencias de la Salud como Medicina o biomedicina, no tenga ni la menor idea de los conceptos básicos de la Estadística. En el caso del bachillerato de ciencias biosanitario debería ser obligatoria la Estadística.”

“Tal y como está configurada la asignatura de matemáticas para la ESO, se dedica mucho tiempo a Aritmética, Álgebra y Análisis y se deja de lado la Geometría y la Estadística porque son los últimos bloques. Muchas veces, quizás por su facilidad, se deja la Estadística para impartirla en un solo curso. Considero que se le debería dar más importancia puesto que aparece mucho en la vida cotidiana y los medios de comunicación.”

- Entre los profesores aritmético – algebraicos destaco:

“No me parece mal porque cuando falta tiempo algo hay que quitar y mejor quitar la estadística...”

“Yo como profesor de matemáticas hago mucho hincapié en la necesidad de impartir los temas de estadística, aunque algunos compañeros no son tan partidarios. Pueden llamarse profesores eminentemente "Algebraico-Numéricos".”

“Que si no da tiempo a todo, mejor recortar en estadística que no en álgebra, ...”

- Y por supuesto hay profesores que achacan el hecho a la falta de tiempo:

“Es lo que pasa cuando los currículos son tan ambiciosos como los de los BOE/BOJA. no me parece ni bien ni mal, los alumnos no dejan de aprender y trabajar, si es sobre otros contenidos ¿qué hacemos? también le pasa a la geometría en algunos cursos. desde que se dan tres horas semanales en 2º de ESO es difícil que los alumnos respondan en tercero.”

“El profesor se tiene que adaptar al nivel de su alumnado, el curso pasado fue necesario pararse más en algunos contenidos anteriores que les costó y no pudimos completar la programación.”

"Es la eterna lucha el llegar a impartir finalmente la unidad de estadística, porque no da tiempo, es muy ajustado. En este Centro se intenta dar, aunque no se complete toda la unidad, pero en gran medida se dan los contenidos más importantes y se evalúan también."

En la tabla 47 encontramos un resumen numérico de dichas opiniones:

Tabla 47. Opiniones del profesorado sobre la no enseñanza de la estadística

Opiniones	Número de profesores
No les parece correcto	48
Profesores aritmético - algebraicos	9
Falta de tiempo	29

Como resumen final, se observa que prácticamente en un 68% de los grupos no se trabaja estadística en 3º de ESO. Que los motivos que se aducen, aunque se vinculan a la longitud del currículum o el nivel de alumnado están relacionados con el orden de este como estudiábamos en el apartado 6.3.2. sobre la macroestructura de los libros. Y lo más sorprendente, que hay profesores que minusvaloran o que no les importa que la estadística no se enseñe. Para acabar con todo esto, lo que hacen los centros que si la trabajan es cambiar el orden establecido por el curriculum y los libros de texto.

Capítulo 8

Conclusiones de la tesis

Para finalizar esta tesis se presentan unas conclusiones generales y además la implicación que para la enseñanza y la investigación tiene este trabajo. También se discutirán las posibles líneas de investigación que quedan abiertas, las limitaciones de esta tesis y los futuros trabajos que se pueden realizar a partir de éste.

8.1. Conclusiones.

En este apartado se van a presentar unas conclusiones sobre las hipótesis y objetivos del trabajo.

8.1.1. Conclusiones sobre los objetivos.

Se planteaban tres objetivos, con sus subobjetivos, para esta tesis:

En primer lugar, realizar un análisis detallado de la presentación de las medidas de dispersión en los libros de texto de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria, con la finalidad de caracterizar el significado pretendido en las distintas modalidades que se presentan, y para alcanzar este objetivo se definían una serie de sub - objetivos para tratar de alcanzarlo.

Para alcanzar este objetivo en el capítulo 6 se ha planteado la micro y macroestructura de los textos siguiendo el planteamiento de autores como Valverde et al. (2002) o Haggarty y Pepin (2002), así como un análisis bajo el EOS planteado por Godino y Batanero (1994) y otros colaboradores en el que se estudiaban los 6 elementos de significado, obteniendo algunos conflictos semióticos que se presentan en los textos. Por tanto, este objetivo ha sido alcanzado de forma satisfactoria.

En segundo lugar, se planteaba realizar un análisis de la macroestructura de los libros de texto, con la finalidad de observar si esta afecta al tratamiento de la estadística en 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria. Este objetivo se establecía debido a una afirmación realizada por Batanero (2001) en la que se afirmaba que la estadística se dejaba para el final o se omitía en las enseñanzas primaria y secundaria. Este objetivo también se ha trabajado en el capítulo 6, donde se ha observado que efectivamente la estadística no tiene la misma consideración que otras áreas de las matemáticas en los libros de texto. Por tanto, este objetivo también se ha alcanzado de forma satisfactoria.

En tercer lugar, se pretendía realizar un estudio exploratorio de evaluación de conocimientos matemáticos en alumnos de 3º de Educación Secundaria Obligatoria, utilizando el instrumento de evaluación construido para tal efecto, para ello nos hemos basado en la base de datos ARTIST que proponen Garfield, delMas, y Chance (2003). En este caso, este objetivo se ha perseguido en el capítulo 7. Dado que la muestra era intencional su tamaño final ha sido pequeño y no ha permitido realizar un análisis amplio, por tanto, las conclusiones no son extrapolables. Sin embargo, y aunque el grado de satisfacción con la consecución de este objetivo no es alta, sí que se puede dar por conseguido, ya que se ha elaborado la herramienta y se ha pasado en ciertos grupos, obteniendo algunas conclusiones interesantes a pesar del tamaño de la muestra.

Por último, se proponía también realizar una encuesta que nos permitiera valorar la enseñanza de la estadística en 3º de ESO, es decir, si estas unidades se trabajaban o no en el nivel. En el capítulo 7 hemos realizado dicha encuesta, y aunque por motivos ajenos a nosotros y a pesar de nuestro esfuerzo ha habido una tasa de no respuesta mayor de lo esperado el grado de consecución de este objetivo es alto, ya que hemos llegado a una parte importante de centros de Andalucía con nuestra encuesta.

8.1.2. Conclusiones sobre las hipótesis.

Se planteaban 5 hipótesis y ahora se muestra el resultado de cada una de ellas.

H.1. Al evaluar los textos se espera encontrar una exposición deficiente en diferentes medidas de dispersión.

Esta hipótesis se planteó debido al estudio previo realizado por Ortega y Estepa (2006) en el que se encontraban errores en libros de la LOGSE (MEC, 1990). Efectivamente, al realizar el análisis de los textos se han encontrado algunas deficiencias, principalmente en algunos contenidos específicos como el diagrama de caja, o la falta de argumentos para vincular diferentes expresiones algebraicas. Por tanto, se verifica la primera hipótesis. Al estudiar la idoneidad didáctica a pesar de ordenarla de alta a baja de forma comparativa, encontramos que algunos de los indicadores analizados no son especialmente buenos en la mayoría de los textos debido a que tal y como se planteaba en esta hipótesis, la exposición de algunos contenidos en los textos no es acertada.

H.2. Al evaluar los textos se espera encontrar diferentes tipos de conflictos semióticos.

Estepa y Ortega (2005a) encontraban numerosos conflictos semióticos al analizar los libros de texto universitarios, en esta tesis se planteó esta hipótesis porque se esperaba que sucediese lo mismo en los libros de texto de secundaria. En el apartado 6.6 se especifican los diferentes tipos de conflictos semióticos que se han encontrado en la exposición de las medidas de dispersión en los libros de texto, se han agrupado en diferentes categorías, conflictos semióticos debidos a significados no trabajados, debidos a significados incompletos y debidos a falta de argumentos. En este caso se habla de potenciales conflictos, ya que para cada estudiante puede suponer o no un problema. En este caso la hipótesis también se verifica al encontrar los diferentes conflictos.

H.3 Al evaluar los textos se espera que el bloque de estadística esté infra representado con respecto al resto.

Siguiendo el planteamiento de Batanero (2001), era de esperar que no solo se omitiese o se dejase para el final la estadística, sino que, conscientes de ello, las editoriales no prestasen la suficiente atención a este bloque en sus libros. En este caso, esta hipótesis se verifica en 3º de ESO y en algunos textos de 4º de ESO opción A, pero no en la opción B, así que tal y como está planteada, a nivel general, no se verifica, pero es un buen punto de partida para analizar por qué en unos sí y en otros no.

H.4 Al evaluar los textos se espera que la estadística sea el tema o bloque final.

De nuevo, basándonos en la hipótesis planteada en Batanero (2001) se planteaba en esta tesis para verificarla. Como se ha mostrado en el capítulo 6, en todos los textos analizados la estadística es el bloque final, por tanto, para la muestra presentada, esta hipótesis se verifica.

H.5 Al evaluar los conocimientos de los estudiantes se prevé encontrar algunas dificultades en conceptos estadísticos elementales requeridos para el trabajo con las medidas de dispersión. Ortega y Estepa (2005) habían realizado un cuestionario de carácter exploratorio a estudiantes que no habían trabajado aún la estadística. En este estudio se encontraron preconcepciones y dificultades propias de no haber trabajado estas unidades. Por tanto, se planteó realizar un nuevo cuestionario en el que la hipótesis era que, tras su enseñanza, aunque existiera mejora, las dificultades persisten, como se ha observado en los estudios previos de Dubreil-Frémont, Chevallier-Gaté, y Zendrera (2014), Garfield, DelMas, y Chance (2007), Lee y Lee (2011), Turegun (2011) o Watson y Kelly (2008).

H.5.1. Al evaluar los conocimientos de los estudiantes se prevé encontrar que conocen mejor y manipulan con más facilidad las medidas de tendencia central que las de dispersión.

Como se puede observar en el resultado del análisis del ítem 1 del test, la media la calculan correctamente el doble de estudiantes que las medidas de dispersión, por tanto, esta hipótesis se verifica.

H.5.2. Al evaluar los conocimientos de los estudiantes se prevé encontrar deficiencias en algunos tipos de medidas de dispersión.

La medida que más cuesta a los estudiantes es el coeficiente de variación, pero en general, ninguna de las medidas de dispersión es calculada o conocida por al menos la mitad de los estudiantes encuestados, por tanto, existen lagunas. En algunos de los estudiantes que se lanzan a dar respuesta se observa dificultades en el manejo de las fórmulas, con lo cual es mejorable el trabajo de esta unidad. La hipótesis se verifica.

H.5.3. Al evaluar los conocimientos de los estudiantes se prevé encontrar dificultades de cálculo en la desviación típica.

Si bien es cierto que hay problemas en el cálculo de la desviación típica, el principal caballo de batalla debe ser la varianza, porque hay alumnos que no calculan bien esta medida y, sin embargo, a partir de datos erróneos, sí que consiguen llegar a la desviación típica, incorrecta ya que parten de una varianza incorrecta. Por tanto, la hipótesis se verifica.

H.5.4. Al evaluar los conocimientos de los estudiantes se prevé encontrar dificultades de interpretación en la desviación típica.

Aunque cerca de un 40% son capaces de responder correctamente sobre el tamaño de la desviación típica, no son ni la mitad los que pueden argumentar correctamente su decisión, así como el manejo de las propiedades básicas de la desviación típica. Por tanto, la hipótesis se verifica.

Como se verifican las sub-hipótesis, la hipótesis principal se verifica, ya que es obvio que los estudiantes tienen dificultades en el manejo fundamental de algunos conceptos, como el de datos agrupados, u otros, que perjudican a su comprensión sobre las medidas de dispersión.

H.6. En el estudio de la encuesta se espera encontrar que la mayoría de los centros andaluces no trabajan las unidades didácticas del bloque estadístico en 3º de ESO.

Como hemos podido comprobar en la encuesta realizada, el porcentaje de grupos escolares de 3º de ESO en los que no se trabaja el bloque de estadística se eleva hasta el 67%. Es decir, dos de cada tres grupos de 3º de ESO no trabajarán los temas relacionados con la estadística en este nivel. Por tanto, la hipótesis queda verificada. Esta suposición ya la había realizado Batanero (2001) y aunque la encuesta no ha cubierto toda la etapa educativa ni es a nivel nacional, pone de manifiesto que algo no se está haciendo bien en Andalucía en 3º de ESO con los bloques de estadística.

8.1.3. Conclusiones sobre el problema de investigación.

Se planteaban en esta tesis las siguientes preguntas para orientar el problema de investigación:

- ¿Están las medidas de dispersión integradas adecuadamente en los libros de texto de la LOE?
- ¿Presentan los libros de texto conflictos semióticos al tratar las medidas de dispersión?
- ¿Transmiten adecuadamente los libros de texto las medidas de dispersión a los estudiantes de 3º de ESO?
- ¿Calculan adecuadamente los estudiantes de 3º de ESO las medidas de dispersión?
- ¿Comprenden los estudiantes de 3º de ESO las propiedades y el uso de las medidas de dispersión?

- ¿Se trabaja la unidad didáctica de estadística en 3º de ESO?

A través de las hipótesis planteadas hemos dado respuesta a dichas preguntas, como hemos visto en diferentes puntos de esta tesis, las medidas de dispersión no están correctamente integradas en todos los libros de texto, dependiendo del curso y del nivel unos son mejores que otros, aunque la editorial SM suele destacar por su buen papel, esto se puede deber en parte a que actualmente no existe una revisión oficial de los libros de texto por parte de ningún organismo oficial, como sucedía con legislaciones anteriores. Por tanto, y tal y como propondremos en el siguiente punto, una propuesta es que los libros de texto se vuelvan a verificar por el ministerio para comprobar que todos los contenidos curriculares están incluidos. Que haya contenidos que no se trabajen, u otros que se trabajan deficientemente hace que surjan diferentes conflictos semióticos, adaptar los libros de texto al alumnado (transposición didáctica) es un trabajo arduo y los continuos cambios legislativos no favorecen que se haga, ya que hay que preparar nuevo material contrarreloj, pero de nuevo una revisión por parte del ministerio reduciría estos problemas. Para estudiar la transmisión de los textos hemos analizado la idoneidad didáctica de los diferentes textos, como indicaba algunas editoriales destacan en unos u otros aspectos, aunque la más balanceada suele ser SM. Los alumnos tienen serias dificultades para entender y calcular las diferentes medidas de dispersión, el resultado de la prueba nos indica que a pesar de explicar la unidad la mayoría presenta serias deficiencias en su comprensión. Una posible solución sería que esta unidad se trabaje en otro momento del curso, y no al final. Esta conclusión se hace extensiva a las propiedades de las medidas de dispersión, ya que, al no entender su cálculo y significado, la comprensión de sus propiedades es deficiente.

8.2. Implicaciones para la enseñanza.

Nos hallamos en un momento de cambio en las aulas, se está finalizando el reemplazo de la antigua LOE (MEC, 2006) por la LOMCE (MECD, 2013) y como se mostraba en el capítulo 2, este cambio trae un avance de las medidas de dispersión, que se implantan desde 1º de ESO, en lugar de desde 3º con la anterior LOE, y además una profundización más temprana sobre ellas.

Como implicaciones de este trabajo se pueden plantear:

- Cambiar las programaciones en los centros educativos para impartir en algunos cursos la estadística en primer lugar alterando así el orden que como veíamos en el capítulo 2 plantea el curriculum y que como observábamos en el capítulo 6 mantienen los libros de texto. Se ha observado que al ser el último bloque en los libros de texto es un bloque que se deja para el final. En un temario que ya de por sí es denso implica que una mayoría de los estudiantes no llegan a este bloque. Por tanto, y a pesar de su inclusión en más cursos, si no se adelanta en algunos de ellos en la planificación puede que este esfuerzo en el curriculum quede sin efectos prácticos. Además, se ha observado en la encuesta realizada y analizada en el capítulo 7 que los centros donde se trabaja esta unidad es porque realizan este cambio, propuesto por numerosos docentes.

- Vuelta a una revisión de los libros de texto por parte del ministerio. Se ha observado que algunos textos están incompletos. En leyes anteriores existía un organismo regulador que vigilaba que el curriculum estuviese completo en los libros de texto, esto ya no sucede, permitiendo que libros incompletos lleguen a las aulas tal y como se puede observar leyendo la LOE que dice actualmente en su disposición adicional cuarta, apartados 2 y 3 (que no ha sido modificada por la LOMCE)

> 2. La edición y adopción de los libros de texto y demás materiales no requerirán la previa autorización de la Administración educativa. En todo caso, éstos deberán adaptarse al rigor científico adecuado a las edades de los alumnos y al currículo aprobado por cada Administración educativa.
>
> 3. La supervisión de los libros de texto y otros materiales curriculares constituirá parte del proceso ordinario de inspección que ejerce la Administración educativa sobre la totalidad de elementos que integran el proceso de enseñanza y aprendizaje, (MEC, 2006, p.17195)

- Dar más importancia a las desviaciones y la desviación media como punto de partida hacia la varianza, para que el estudiante comprenda la importancia y la fórmula de la medida que se está calculando. Esto ya se hacía en algunos libros de texto como Vizmanos y Anzola (1995), en el que además de darle una unidad solo a las medidas de dispersión, explica claramente cómo surgen la desviación media y la varianza tal y como se puede observar en la figura 77.

¿Cuánto vale la suma de todas las diferencias en el grupo A? ¿Y en el B? Vale 0 en los dos.

> Las diferencias entre cada valor de la variable x_i y la media aritmética $\bar{x}$ se llaman **desviaciones respecto a la media** (d_i).
>
> $$d_i = x_i - \bar{x}$$

Cada diferencia d_i nos da una idea de cómo se aproximan los valores x_i a la media aritmética $\bar{x}$. Estas diferencias pueden ser positivas, negativas o nulas.

Has comprobado con los ejemplos que **la suma de las desviaciones respecto a la media es 0**. Por tanto, no podemos utilizar esta suma para medir la dispersión. Con el fin de evitarlo, se recurre a dos procedimientos que veremos en las páginas siguientes:

a) Utilizar el valor **absoluto** de las desviaciones respecto a la media.

b) Utilizar el **cuadrado** de las desviaciones respecto a la media.

Figura 77. Introducción de la desviación media y la varianza. (Vizmanos y Anzola, 1995, p.274)

- El momento de cambio no es solo legislativo, también de paradigmas educativos. Actualmente el trabajo colaborativo y basado en proyectos está en auge y la propia legislación exige trabajar de este modo a los docentes en sus orientaciones metodológicas tal y como también indicaban algunos autores como Sánchez y Orta (2013) o por ejemplo el libro de proyectos publicado por Batanero y Díaz (2011) que se puede emplear para la enseñanza de la estadística dando cumplimiento al siguiente párrafo de la legislación:

> Se emplearán metodologías activas que contextualicen el proceso educativo, que presenten de manera relacionada los contenidos y que fomenten el aprendizaje por proyectos, centros de interés, o estudios de casos, favoreciendo la participación, la experimentación y la motivación de los alumnos y alumnas al dotar de funcionalidad y transferibilidad a los aprendizajes. (CEJA, 2016, art. 4)

- Como implicación, muy ambiciosa eso sí, se puede plantear también una reflexión sobre el curriculum, ya que la mayor parte del profesorado indica que es muy denso o largo. Es evidente que la clase política y sus asesores, que legislan sobre los elementos didácticos que se plantean en la enseñanza, deberían escuchar al profesorado y debatir el curriculum, ya que hoy día es imposible trabajar de forma completa temarios tan ambiciosos como el de 2º de ESO con tres horas semanales. Una posible propuesta es eliminar el concepto de curriculum en espiral y pasar a un curriculum centrado en bloques, ya que actualmente se cuenta con la ventaja de 4 cursos obligatorios de matemáticas. En esa propuesta el primer curso estaría centrados en la aritmética, el segundo curso en el álgebra y las funciones, el tercero en la geometría y el cuarto en la estadística, trabajando algunos de estos bloques de forma secundaria (pero no extensa, como actualmente) cada curso, de esta forma se garantizaría que los estudiantes que cursen la ESO han podido ver todos los bloques de contenidos que actualmente se proponen en la ley.

8.3. Implicaciones para la investigación y líneas abiertas.

Teniendo en cuenta lo aportado en el trabajo, vemos que son numerosas las líneas de investigación futuras. Entre ellas destacamos las siguientes:

Realización del análisis de las medidas de dispersión en libros de texto de la LOMCE. Debido a los tiempos de este trabajo, nos hemos centrado en los libros de la LOE, por tanto, en un futuro queda pendiente realizar un análisis y por qué no una comparación entre los textos LOE y LOMCE.

Ampliación del estudio del curriculum a otras comunidades autónomas, con el fin de estudiar si se mantiene el orden de bloques que da el ministerio o se hace alguna propuesta de cambio en el mismo.

También se puede estudiar si existen recomendaciones metodológicas distintas o más concretas en los curriculum de otras comunidades autónomas.

Además del análisis LOE – LOMCE y ya que en esta tesis solo se ha analizado el caso de la dispersión univariante debido a los cursos seleccionados sería conveniente analizar la dispersión tanto en probabilidad como en inferencia, así como en el estudio de la regresión y correlación. Por otro lado, sería bueno extender el estudio a los libros de Bachillerato.

Una vez analizados los libros de texto se podría acordar con centros que usen dichas editoriales la realización de experimentos de enseñanza sobre la dispersión. Aunque en los antecedentes se han descrito algunos de estos experimentos, en general no están basados en estudios de evaluación previos y globales.

Una vez que ya disponemos de un cuestionario para evaluar la comprensión de la dispersión por parte del alumnado y detectados centros en los que se trabaja la estadística en 3º de ESO es posible la repetición del test con una muestra mayor, en la que además se trabaje la unidad de estadística en otro momento del curso y no al final. Ya que los tiempos también influyen en la comprensión. En todo caso se podrían realizar dos test con una muestra mayor en los dos momentos académicos y comparar los resultados.

Además de los estudios anteriores, es posible ampliar la encuesta sobre la enseñanza de la estadística en 3º de ESO a otras comunidades autónomas y otros niveles, como 4º de ESO y 2º de Bachillerato que también pueden ser de interés, debido a que esta tesis se enmarca en un territorio concreto (Andalucía) y en un nivel concreto para el cuestionario (3º de ESO) y es posible que en otras comunidades y niveles se trabaje estadística en otro orden.

Lista de referencias

Aleksandrov, A. D., Kolmogorov, A. y Laurentiev, M. A. (1988). *La matemática: su contenido, métodos y significado* (8.ª ed., Vol. 1).

ANCY. (2015). Qualities of a good mathematics textbook. Recuperado 13 de febrero de 2017, de ROSE website: http://gcterose.blogspot.com/2015/11/normal-0-false-false-false-en-gb-x-none.html

Arteaga, P. (2008). *Análisis de gráficos estadísticos elaborados en un proyecto de análisis de datos* (Trabajo fin de Máster, Universidad de Granada).

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números. Revista de didáctica de las matemáticas*, *76*, 55–67.

Arteaga, P. y Díaz-Levicoy, D. (2016). Conflictos semióticos sobre gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria. *Educação e Fronteiras On-Line*, *6*(17), 81-96.

Bakker, A. y Gravemeijer, K. P. (2004). Learning to reason about distribution. En *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 147–168).

Ballman, K. (1997). Greater emphasis on variation in an introductory statistics course. *Journal of Statistics Education*, *5*(2). Recuperado de https://ww2.amstat.org/publications/JSE/v5n2/ballman.html

Barón, F. J. (1998). Bioestadística: Métodos y aplicaciones [Manual]. Servicio de Publicaciones y Divulgación Científica de la Universidad de Málaga.

Barr, G. V. (1980). Some student ideas on the median and the mode. *Teaching Statistics*, *2*(2), 38–41.

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, *15*, 2-13.

Batanero, C. (2001). Presente y futuro de la Educación Estadística. *Jornadas Europeas de Estadística. La enseñanza y la difusión de la estadística*. Presentado en Jornadas Europeas de Estadística. La enseñanza y la difusión de la estadística., Instiitut Balear d'Estadística; Palma de Mallorca. Recuperado de http://www.deie.mendoza.gov.ar/aem/material/pte%20futuro.pdf

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *28*(1), 141-154.

Batanero, C. y Díaz, C. (2004). El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. En J. Patricio Royo (Ed.), *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp. 125–164). Zaragoza: ICE

Batanero, C. y Díaz, C. (2005). Análisis del proceso de construcción de un cuestionario sobre probabilidad condicional. Reflexiones desde el marco de la TFS. *Investigación en Didáctica de las Matemáticas*, 13–36.

Batanero, C. y Díaz, C. (Eds.). (2011). *Estadística con proyectos*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *83*, 7-18.

Batanero, C., Díaz-Levicoy, D., Arteaga, P. y Gea, M. M. (2014). Sentido de los gráficos estadísticos en los libros de texto de educación primaria. Actas del XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas.

Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1991). Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, *9*, 25–31.

Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. R. y Holmes, P. (1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *25*(4), 527–547.

Batanero, C., González-Ruiz, I., López-Martín, M. del M. y Contreras, J. M. (2015). La dispersión como elemento estructurador del currículo de estadística y probabilidad. *Epsilon*, *32*(2), 7–20.

Bazán, J. y Pereda, A. S. A. (2006). Las actitudes hacia la Matemática-Estadística dentro de un modelo de aprendizaje. *Educación*, *15*(28), 7-20.

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004a). Research on reasoning about variability: A forward. *Statistics Education Research Journal*, *3*(2), 4–6.

Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004b). Statistical literacy, reasoning, and thinking: Goals, definitions, and challenges. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3–15). Springer.

Berisha, V. (2015). The General Characteristics Of Mathematics Textbooks For Lower Secondary School In Kosovo. *International Journal of Novel Research in Education and Learning*, *2*(2), 19-23.

Bich, W., Cox, M. G. y Harris, P. M. (2006). Evolution of the ’ Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement ’. *Metrologia*, *43*(4), S161. https://doi.org/10.1088/0026-

1394/43/4/S01

Blejec, A. (2003). Teaching statistics by using simulations on the Internet. *IASE (International Association for Statistical Education) Satellite Conference*. Presentado en Berlín, Alemania. Recuperado de https://www.researchgate.net/profile/Andrej_Blejec/publication/228831001_Teaching_statistics_by_using_simulations_on_the_Internet/links/0912f50b67f1381cb0000000.pdf

Boyd, A. V. (1985). The standard deviation and absolute deviations from the mean. *Teaching Statistics*, *7*(3), 78–81.

Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Alianza editorial. Madrid.

Brahe, T. y Brahe, T. (1972). *Tychonis Brahe Dani Opera omnia* (J. L. E. Dreyer, Ed.). Swets y Zeitlinger.

Brousseau, G. (1986). *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques* (Université Sciences et Technologies-Bordeaux I).

Bureau International des Poids et Mesures. (s. f.). Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Recuperado 23 de enero de 2017, de http://www.bipm.org/en/publications/guides/gum.html

Busto, A. I. y Escribano, M. del C. (2006). D. Antonio Aguilar y Vela: su visión del estudio del Cálculo de Probabilidades. En F. M. García Tomé (Ed.), *Historia de la probabilidad y la estadística (III)* (pp. 179-194). Madrid, España: Delta Publicaciones.

Canada, D. L. (2004). *Elementary Preservice Teachers' Conceptions of Variation*. Universidad estatal de Portland, Portland, OR.

Capiral, M. C. (2012). *Statistical Content in Middle Grades Mathematics Textbooks.* (Universidad del Sur de Florida).

Castro, W. F., Godino, J. D. y Rivas, M. (2010). Competencias de maestros en formación para el análisis epistémico de tareas de razonamiento algebraico elemental. En M. Moreno, J. Carrillo y A. Estrada (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 259-270).

Ceglie, R. y Olivares, V. (2012). Science and Mathematics Textbook Progression. En H. Hickman y Porfilio (Eds.), *The New Politics of the Textbook* (pp. 111–131).

CEJA. (2007). *Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía*.

CEJA. (2016). *Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.*

Chance, B., Ben-Zvi, D., Garfield, J. y Medina, E. (2007). The Role of Technology in Improving Student Learning of Statistics. *Technology Innovations in Statistics Education Journal*, *1*(1).

Chance, B., del Mas, R. y Garfield, J. (2004). Reasoning about sampling distribitions. En *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 295–323).

Chance, B., Garfield, J. y delMas, B. (1999). A model of classroom research in action: Developing simulation activities to improve students' statistical reasoning. *Journal of Statistics Education*, *7*(3), 1-12.

Chevallard, Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport officiel. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, *108*, 103–117.

Chevallard, Y. (1991a). *Dimension instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique*. Presentado en Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique de Grenoble, Université Joseph-Fourier, Grenoble.

Chevallard, Y. (1991b). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2ª). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1997). *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.

Chevallard, Y., Gascón, J. y Bosch, M. (1997). *Estudiar matemáticas: el eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. Horsori. Barcelona.

Clapham, C. (1998). *Diccionario de matemáticas*. Editorial Oxford.

Clark, J., Kraut, G., Mathews, D. y Wimbish, J. (2007). *The fundamental theorem of statistics: Classifying student understanding of basic statistical concepts*.

Contreras, Á. y Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *9*(1), 65-84.

Cooper, L. L. y Shore, F. S. (2008). Students' misconceptions in interpreting center and variability of data represented via histograms and stem-and-leaf plots. *Journal of Statistics Education*, *16*(2), 1–13.

Cooper, L. L. y Shore, F. S. (2010). The effects of data and graph type on concepts and visualizations of variability. *Journal of Statistics Education*, *18*(2), 1–16.

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar: Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *10*(1), 07–38.

Crawford, K. (2003). The role and purpose of textbooks. *International journal of historical learning, teaching and research*, *3*(2), 5-10.

da Ponte, J. P. (2015). Problem Solving, Exercises, and Explorations in Mathematics Textbooks: A Historical Perspective. En E. Silver y C. Keitel-Kreidt (Eds.), *Pursuing Excellence in Mathematics Education* (pp. 71–84).

D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma*, *28*(2), 49–77.

Davis, J. D. (2009). Understanding the influence of two mathematics textbooks on prospective secondary teachers' knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *12*(5), 365–389.

De Castell, S., Luke, A. y Luke, C. (Eds.). (1989). *Language, authority, and criticism: Readings on the school textbook*.

de Oca Navas, E. M. (2016). Libros escolares mexicanos a principios del siglo XX: Rosas de la infancia, Serie SEP y Simiente. *La Colmena*, (76), 49–60.

delMas, R. (2001). What makes the standard deviation larger or smaller? *Statistics Teaching and Resource Library (STAR).*

delMas, R., Garfield, J., Ooms, A. y Chance, B. (2007). Assessing students' conceptual understanding after a first course in statistics. *Statistics Education Research Journal*, *6*(2), 28–58.

delMas, R. y Liu, Y. (2005). Exploring students' conceptions of the standard deviation. *Statistics Education Research Journal*, *4*(1), 55–82.

Del-Pino, J. (2013). El uso de Geogebra como herramienta para el aprendizaje de las medidas de dispersión. *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística*, (2), 243–250.

Del-Pino, J. (2017). *Síntesis de la investigación sobre variabilidad y dispersión en estadística.* (Máster, Universidad de Granada).

Del-Pino, J. y Estepa, A. (2013). An overview of existing software for teaching Statistics and dispersion measurements. *Proceeding of 4th International Conference on Educational Innovation in Technical Careers*. Presentado en 4th International Conference on Educational Innovation in Technical Careers, Granada, España.

Del-Pino, J. y Estepa, A. (2015). Análisis de libros de texto. Estadística de libros empleados en Andalucía. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G. R. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina, … M. M. López (Eds.), *Actas de las II Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 117-124).

Del-Pino, J. y Estepa, A. (2017). Análisis del tratamiento de la dispersión en libros de texto de 3º y 4º curso de la Educación Secundaria Obligatoria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. del M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico.*

Del-Pino, J. y Estepa, A. (2019a). Estudio de la presencia de la estadística en libros de 3º y 4º cursos de ESO a través del análisis de su macroestructura. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. Lopez-Martin y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*.

Del-Pino, J. y Estepa, A. (2019b). Análisis de la enseñanza de las medidas de dispersión en libros de texto de educación secundaria. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática, 16, 86–102.*

Del Puerto, S., Seminara, S. y Minnaard, C. (2007). Identificación y análisis de los errores cometidos por los alumnos en Estadística Descriptiva. *Revista iberoamericana de educación*, *43*(3), 1–8.

Deviant, S. (2015). What is Variability in Statistics? Recuperado 18 de enero de 2017, de Statistics How To website: http://www.statisticshowto.com/variability/

Díaz-Levicoy, D. (2014). *Un estudio empírico de los gráficos estadísticos en libros de texto de educación primaria española* (Máster, Universidad de Granada).

Díaz-Levicoy, D., Giacomone, B., López-Martín, M. del M. y Piñeiro, J. L. (2016). Estudio sobre los gráficos estadísticos en libros de texto digitales de educación primaria española. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, *20*(1), 133-156.

Diccionario de Matemáticas. (2001). En J. M. Castaño (Trad.), *Diccionario de Matemáticas* (2ª). Bogotá DC, Colombia: Norma.

Dodge, Y. (2008). *The concise encyclopedia of statistics*.

Dubreil-Frémont, V., Chevallier-Gaté, C. y Zendrera, N. (2014). Students' conceptions of average and standard deviation. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference* *on Teaching Statistics*.

EcuRed. Enciclopedia colaborativa cubana. (2010). En *EcuRed*. Recuperado de https://www.ecured.cu/

EFE ECONOMÍA. (2014, enero 20). ¿Cómo nace un libro de texto? Recuperado 24 de abril de 2017, de El País website: http://economia.elpais.com/economia/2014/01/20/agencias/1390214741_029674.html

Eisenhart, C. (1983a). Laws of Error I: Development of the Concept. En S. Kotz, N. L. Johnson, N. Balakrishnan, C. Read y B. Vidakovic (Eds.), *Encyclopedia of Statistical Sciences* (Vol. 4, pp. 530-547).

Eisenhart, C. (1983b). Laws of Error III: Later (non-Gaussian) distributions. En S. Kotz, N. L. Johnson, N. Balakrishnan, C. Read y B. Vidakovic (Eds.), *Encyclopedia of Statistical Sciences* (Vol. 4, pp. 562-566).

Erickson, T. (2006). Using simulation to learn about inference. *Working cooperatively in statistics education. Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics, Salvador, Bahia, Brazil*, 2–7.

Estepa, A. (1994). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores* (Universidad de Jaén).

Estepa, A. (2013). Los fenómenos de cambio. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 47-53).

Estepa, A. y Del-Pino, J. (2013). Elementos de interés en la investigación didáctica y enseñanza de la dispersión estadística. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *83*, 43–63.

Estepa, A. y Ortega, J. (2005a). *Estudio del significado de las medidas de dispersión estadísticas. Varianza y desviación típica.* Presentado en IX Congreso de Metodología de las Ciencias Sociales y de la Salud, Granada, España. Recuperado de https://drive.google.com/file/d/0Bz5fQaZGkP76ekNCbWVJNXdSZlk/view?usp=sharing

Estepa, A. y Ortega, J. (2005b). Significado institucional de referencia de las medidas de dispersión. En L. Ordoñez, C. Batanero y A. Contreras (Eds.), *Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas* (pp. 167-202).

Estepa, A. y Ortega, J. (2006). Meaning of the Dispersion and its Measures in Secondary Education. *The International Conference on Teaching Statistics-7*. Presentado en Salvador de Bahía, Brasil. Recuperado de http://iase-web.org/documents/papers/icots7/6F2_ESTE.pdf

Everitt, B. y Skrondal, A. (2010). Cambridge dictionary of statistics. En *Cambridge dictionary of statistics* (4ª).

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM*, *45*(5), 765–777.

Fan, L., Zhu, Y. y Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM*, *45*(5), 633–646.

Ferguson, J., Collison, D., Power, D. y Stevenson, L. (2006). Accounting textbooks: Exploring the production of a cultural and political artifact. *Accounting Education*, *15*(3), 243-260.

Feynman, R. P. (1987). *¿Está usted de broma, Sr. Feynman? Aventuras de un curioso personaje tal como le fueron referidas a Ralph Leighton* (E. Hutchins, Ed.; L. Bou, Trad.).

Flores, P. (2003). *Humor gráfico en el aula de matemáticas*. Arial ediciones.

Font, V. y Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *8*(1), 67-98.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89–105.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report*. Recuperado de http://www.amstat.org/asa/files/pdfs/GAISE/GAISEPreK-12_Full.pdf

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Freund, J. E. y Perles, B. M. (1987). A new look at quartiles of ungrouped data. *The American Statistician*, *41*(3), 200–203.

Friel, S. N. y Bright, G. W. (1996). Building a Theory of Graphicacy: How Do Students Read Graphs?. *Annual meeting of AERA*. Presentado en Nueva York, NY.

Friel, S. N., Curcio, F. R. y Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education*, 124–158.

Gal, I. (2004). Statistical literacy. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of* *developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 47–78). Recuperado de http://link.springer.com/chapter/10.1007/1-4020-2278-6_3

Galbiati Riesco, J. (2002). *Desarrollo histórico de la estadística*. Recuperado de http://www.jorgegalbiati.cl/ejercicios_4/HistoriaEstadistica.pdf

Garfield, J. (1995). How students learn statistics. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique*, *63*, 25–34.

Garfield, J. (1999). Thinking about statistical reasoning, thinking, and literacy. *First Annual Roundtable on Statistical Thinking, Reasoning and Literacy (STRL-1)*. Presentado en Instituto de Ciencia Weizmann, Tel-Aviv. Instituto de Ciencia Weizmann, Tel-Aviv.

Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education*, *10*(3), 58–69.

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2007). How students learn statistics revisited: A current review of research on teaching and learning statistics. *International Statistical Review*, *75*(3), 372–396.

Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*.

Garfield, J., DelMas, R. C. y Chance, B. (2007). Using students' informal notions of variability to develop an understanding of formal measures of variability. En M. C. Lovet y P. Shah (Eds.), *Thinking with data* (pp. 117–147).

Garfield, J., Delmas, R. y Chance, B. (2003). The Web-based ARTIST: Assessment resource tools for improving statistical thinking. *Annual meeting of the American Educational Research Association*. Presentado en Chicago, IL.

Gea, M. M. (2014). *La correlación y regresión en bachillerato: análisis de libros de texto y del conocimiento de los futuros profesores* (Universidad de Granada).

Gea, M. M., Batanero, C., Cañadas, G. y Arteaga, P. (2013). La organización de datos bidimensionales en libros de texto de Bachillerato. En J. M. Contreras, G. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 373–381).

Geogebra. (2017). Página oficial de Geogebra. Recuperado 31 de marzo de 2017, de https://www.geogebra.org

Glasnović, D. (2014). What can textbook research tell us about national mathematics education? Experiences from Croatia. En K. Jones, C. Bokhove, G. Howson y L. Fan (Eds.), *Proceedings of International Conference on Mathematics Textbook Research and Development* (pp. 251-256). Universidad de Southampton, UK.

Godino, J. D. (1993). La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante*, *2*(2), 69–79.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237–284.

Godino, J. D. (2010). Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*, 111-132.

Godino, J. D. (2014). *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: motivación, supuestos y herramientas teóricas.*

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325–355.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2011). Formación de profesores de matemáticas basada en la reflexión guiada sobre la práctica. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en educación estocástica* (pp. 9–33).

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM*, *39*(1-2), 127–135.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2012). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Perspectivas en la Didáctica de las Matemáticas*, 47–78.

Godino, J. D., Bencomo, D. E., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *27*(2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, Á. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *26*(76), 39-88.

Godino, J. D. y Font, V. (2007). Algunos desarrollos de la teoría de los significados sistémicos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*, *38*, 25–48.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y De Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, *27*(1), 59–76.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F. y Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. *ICME 11, TSG 27, Mathematical knowledge for teaching*, 1–8.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F. y Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas Developing mathematics teachers' competences for didactical analysis. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, *7*(2), 1-21.

Gómez-Torres, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de Educación Primaria* (Universidad de Granada).

Gómez-Torres, E., Ortiz, J. J. y Gea, M. M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en libros de texto españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *5*, 49–71.

Gordon, T. (1986). Is the standard deviation tied to the mean? *Teaching Statistics*, *8*(2), 40–42.

Gould, R. (2011). Variability: One statistician's view. *Statistics Education Research Journal*, *3*(2), 7-16.

Guerrero, A. y Díaz, G. (2007). *Introducción de Errores en la Medición*. Editorial ITM.

Guitart-Coria, M. B. y Flores, P. (2003). Humor gráfico para la enseñanza y el aprendizaje del azar. *Suma*, *42*, 81–89.

Haggarty, L. y Pepin, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: Who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal*, *28*(4), 567–590.

Hald, A. (1998). *A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930* (1 edition). New York: Wiley-Interscience.

Hammerman, J. K. y Rubin, A. (2004). Strategies for managing statistical complexity with new software tools. *Statistics Education Research Journal*, *3*(2), 17–41.

Harding, D. (1996). The Range of a Set of Data. *Teaching Statistics*, *18*(3), 81–81.

Harris, B. (2005). Some aspects of reasoning about variability. *International Statistical Institute, 55th Session*. Presentado en International Statistical Institute, 55th Session, Sidney, Australia.

Hart, A. E. (1983). The Non-Standard Deviation. *Teaching Statistics*, *5*(1), 16-20.

Hart, A. E. (1984). How Should We Teach the Standard Deviation? *Teaching Statistics*, *6*(1), 24–27.

Hébert, L. (2006). The semiotic square. *Signo*.

Herbel-Eisenmann, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the" voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education*, 344–369.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ª). México: Mc Graw Hill.

Hesterberg, T. C. (1998). Simulation and bootstrapping for teaching statistics. *American Statistical Association Proceedings of the Section on Statistical Education*, 44–52.

Hoaglin, D. C., Mosteller, F. y Tukey, J. W. (Eds.). (1983). *Understanding Robust and Exploratory Data Analysis* (1 edition). Nueva York, NY: Wiley-Interscience.

Howson, G. (2013). The development of mathematics textbooks: historical reflections from a personal perspective. *ZDM*, *45*(5), 647–658.

Indiana House Bill 1429. (2011). Textbooks and other curricular material. First Regular Session 117th General Assembly. House enrolled act no 1429. Recuperado de https://legiscan.com/IN/text/HB1429/id/240641.

Inzunza, S. (2006). Some conceptions and difficulties of university students about variability. *Proceedings of the 28th annual meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 244–250.

Jiménez, J. (2016, mayo 3). Por qué la estadística es la gran asignatura del siglo XXI. Recuperado 20 de enero de 2017, de Xataka website: https://www.xataka.com/otros/por-que-la-estadistica-es-la-gran-asignatura-del-siglo-xxi

Johansson, M. (2003). *Textbooks in mathematics education: a study of textbooks as the potentially implemented curriculum* (Universidad Técnica de Luleå).

Johansson, M. (2005). Mathematics textbooks–the link between the intended and the implemented curriculum? *Eighth International Conference: Reform, Revolution and Paradigm Shifts in Mathematics Education*, 119-123.

Jones, D. L. y Scariano, S. M. (2014). Measuring the variability of data from other values in the set. *Teaching Statistics*, *36*(3), 93–96.

Jukić, L. y Glasnović, D. (2016). The use of the textbook as an artefact in the classroom. *Journal* *für Mathematik-Didaktik*, *37*(2), 349-374.

Kahneman, D. y Tversky, A. (1972). Subjective probability: A judgment of representativeness. *Cognitive psychology*, *3*(3), 430–454.

Kalsbeek, W. D. (1996). The computer program called sample: A teaching tool to demonstrate some basic concepts of sampling (version 1.01). *American Statistical Association Proceedings of the Section on Statistical Education*, *103*.

Kaplan, J. J., Fisher, D. G. y Rogness, N. T. (2009). Lexical ambiguity in statistics: What do students know about the words association, average, confidence, random and spread. *Journal of Statistics Education*, *17*(3), 1–19.

Kaplan, J. J., Rogness, N. T. y Fisher, D. G. (2012). Lexical ambiguity: making a case against spread. *Teaching Statistics*, *34*(2), 56-60.

Kilpatrick, J. (2014). From clay tablet to computer tablet: The evolution of school mathematics textbooks. En K. Jones, C. Bokhove, G. Howson y L. Fan (Eds.), *Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT-2014)* (pp. 3-12). Shouthampton, UK.

Konic, P. M., Godino, J.D, Rivas, M. A. (2010) Análisis de la introducción de los números decimales en un libro de texto. *Números – Revista de Didáctica de las Matemáticas. Sociedad Canaria Isacc Newton de Profesores de Matemáticas*, Vol. 74, pp. 57-74.]

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and instruction*, *6*(1), 59–98.

Lane, D. M. (2016). Measures of Variability. Recuperado de http://onlinestatbook.com/2/summarizing_distributions/variability.html

Lane, D. M. y Peres, S. C. (2006). Interactive simulations in the teaching of statistics: Promise and pitfalls. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*.

Lane, D. M. y Tang, Z. (2000). Effectiveness of simulation training on transfer of statistical concepts. *Journal of Educational Computing Research*, *22*(4), 383–396.

Langford, E. (2006). Quartiles in elementary statistics. *Journal of Statistics Education*, *14*(3), 1–27.

Leavy, A. M. (2006). Using data comparison to support a focus on distribution: Examining preservice teacher's understandings of distribution when engaged in statistical inquiry. *Statistics Education Research Journal*, *5*(2), 89–114.

Lecoutre, M.-P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational studies in mathematics*, *23*(6), 557–568.

Lee, H. S. y Lee, J. T. (2011). Enhancing Prospective Teachers' Coordination of Center and Spread: A Window into Teacher Education Material Development. *The Mathematics Educator*, *21*(1), 33-47.

Lehrer, R. y Kim, M.-J. (2009). Structuring variability by negotiating its measure. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 116–133.

Loosen, F., Lioen, M. y Lacante, M. (1985). The standard deviation: some drawbacks of an intuitive approach. *Teaching Statistics*, *7*(1), 2–5.

Love, E. y Pimm, D. (1996). 'This is so': a text on texts. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 371–409).

Makar, K. y Confrey, J. (2005). Variation talk: Articulating meaning in statistics. *Statistics Education Research Journal*, *4*(1), 27-54.

Maor, E. (1998). *Trigonometric delights*. Princeton University Press.

Marco-Buzunáriz, M. A., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2016). Investigación sobre libros de texto en los Simposios de la SEIEM (1997-2015). En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX. Actas XX SEIEM* (pp. 325-334).

Mariotti, M. A. y Maracci, M. (2011). Resources for the teacher from a semiotic mediation perspective. En G. Gueudet, B. Pepin y L. Trouche (Eds.), *From Text to'Lived'Resources* (pp. 59–75).

Martínez, C. (2012). *Estadística y muestreo* (13ª). Ecoe ediciones.

Martín-Guzmán, M. P. y Martín, F. J. (1993). *Curso básico de estadística económica* (3ª). Alfa Centauro.

Mathews, D. y Clark, J. (2007). Successful students' conceptions of mean, standard deviation, and the Central Limit Theorem. Recuperado de http://www1.hollins.edu/faculty/clarkjm/stats1.pdf

May, M. (2011). Spreadsheet Statistics with GeoGebra 4.0. Recuperado de Revisión de las utilidades estadísticas de GeoGebra en la versión 4.0. website: http://nrocnetwork.org/sites/default/files/resources/SpreadsheetStatistics_GeoGebra4.0rc.pdf

Mayen, S., Batanero, C. y Díaz, C. (2009). Conflictos semióticos de estudiantes mexicanos en un problema de comparación de datos ordinales. *Revista latinoamericana de investigación* *en matemática educativa*, *12*(2), 151–178.

MEC. (1970). *Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa*.

MEC. (1975). *Orden de 22 de Marzo de 1975, por la que se desarrolla el Decreto 160/1975, de 23 de Enero, que aprueba el Plan de Estudios del Bachillerato y se regula el Curso de Orientación Universitaria*.

MEC. (1990). *Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo*.

MEC. (1991). *Real Decreto 1345/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria*.

MEC. (2006). *Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación*.

MEC. (2007). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*.

MECD. (2013). *Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa*.

MECD. (2014). *Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria*.

MECD. (2015a). *Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato*.

MECD. (2015b). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el* *currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*.

Meletiou, M. (2002). Conceptions of variation: A literature review. *International Association For Statistical Education*, *1*(1), 46-52.

Meletiou, M. M. (2000). *Developing students' conceptions of variation: An untapped well in statistical reasoning* (Universidad de Texas).

Meletiou-Mavrotheris, M. y Lee, C. (2002). Teaching students the stochastic nature of statistical concepts in an introductory statistics course. *Statistics Education Research Journal*, *1*(2), 22–37.

Mellissinos, M., Ford, J. y McLeod, D. (1997). Student understanding of statistics: Developing the concept of distribution. En J. Dossey y J. Swafford (Eds.), *Proceedings of the 19th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Bloomington, IL.

Mendenhall, W. y Sincich, T. L. (1995). *Statistics for Engineering and the Sciences* (4 edition). Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Mikk, J. (2000). *Textbook: Research and Writing. Baltische Studien zur Erziehungs und Sozialwissenschaft, Band 3 (Baltic Studies for Education and Social Sciences, Volume 3).* Recuperado de http://eric.ed.gov/?id=ED451244

Mills, J. D. (2003). A theoretical framework for teaching statistics. *Teaching Statistics*, *25*(2), 56–58.

Mills, J. D. (2004). Learning Abstract Statistics Concepts Using Simulation. *Educational Research Quarterly*, *28*(4), 18–33.

Minnaard, V., Minnaard, C., Rabino, C., Garcia, M. y Moro, L. (2002). El uso de las gráficas en la escuela: otro lenguaje de las ciencias. *Revista Iberoamericana de Educación. OEI*.

Moncho, J. (2014). *Estadística aplicada a las Ciencias de la Salud*. Barcelona, España: Elsevier.

Moore, D. S. (1990). Uncertainty. En L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 95–137).

Moore, D. S. (1997). *The active practice of statistics*. Nueva York, NY: Macmillan.

Moore, D. S. y Cobb, G. W. (1997). Mathematics, statistics, and teaching. *The American Mathematical Monthly*, *104*(9), 801–823.

Moore, D. S. y McCabe, G. (2002). *Introduction to the Practice of Statistics* (4th edition). Nueva York, NY: Macmillan.

Morgan, C. (1998). *Writing mathematically: The discourse of investigation* (P. Ernest, Ed.).

Morin, E. (1992). *El método, las ideas*. Madrid: Cátedra.

Nickerson, R. S. (1995). Can technology help teach for understanding? En D. M. Perkins, J. L. Schwartz, M. M. West y M. S. Wiske (Eds.), *Software goes to school: Teaching for understanding with new technologies* (pp. 7–22).

Nirmal, A. (2011, julio 11). Essentials of a good mathematics textbook. Recuperado 13 de febrero de 2017, de Math Matters website: https://anitaalwin.wordpress.com/2011/07/11/essentials-of-a-good-mathematics-textbook/

Norman, D. A. (1991). Cognitive artifacts. *Designing interaction: Psychology at the human-computer interface*, *1*, 17–38.

O'Keeffe, L. (2011). *An investigation into the nature of mathematics textbooks at junior cycle and their role in mathematics education* (Universidad de Limerick).

O'Keeffe, L. y O'Donoghue, J. (2011a). *A review of school textbooks for Project Maths*.

O'Keeffe, L. y O'Donoghue, J. (2011b). Mathematics Textbook Analysis: The Significance of Textbook Features to Student Learning. *7º Congreso de la Sociedad Europea para la investigación en Educación Matemática*. Presentado en CERME 7, Resovia, Polonia.

Olivo, R. y Alfredo, M. (2013). *Análisis epistémico y cognitivo de tareas de proporcionalidad en la formación de profesores de Educación Primaria*.

Ongstad, S. (2006). Mathematics and Mathematics Education as Triadic Communication? a Semiotic Framework Exemplified. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 247-277.

Ortega, J. y Estepa, A. (2005). Percepción de la dispersión por los estudiantes de secundaria. *Actas del V Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, 17–22. Oporto, Portugal.

Ortega, J. y Estepa, A. (2006). Meaning of the Dispersion and its Measures in Secondary Education. *The International Conference on Teaching Statistics-7*. Presentado en Salvador de Bahía, Brasil. Recuperado de https://www.ime.usp.br/~abe/ICOTS7/Proceedings/PDFs/InvitedPapers/2B2_ORTE.pdf

Ortiz, J. J. (1999). *Significados de los conceptos probabilísticos en los libros de texto de Bachillerato*. Universidad de Granada, Granada, España.

Ortiz, J. J., Albanese, V. y Serrano, L. (2016). El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de educación secundaria obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX. Actas XX SEIEM* (pp. 397-406).

Oxford English Dictionary. (2016). En J. Simpson y E. Weiner (Eds.), *Oxford English Dictionary*. Recuperado de https://en.oxforddictionaries.com

Pearson, E. S., Kendall, M. G. y Plackett, R. L. (1970). *Studies in the History of Statistics and Probability* (Vol. 1). Griffin London.

Pepin, B. y Haggarty, L. (2001). Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures. *Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik*, *33*(5), 158-175.

Pérez, C. (2010). *Técnicas de muestreo estadístico* (1ª edición, 2ª reimpresión). Garceta grupo editorial. Madrid.

Peters, S. A. (2009). *Developing an understanding of variation: AP statistics teachers' perceptions and recollections of critical moments* (Universidad Estatal de Pennsylvania).

Peters, S. A. (2011). Robust understanding of statistical variation. *Statistics education research journal*, *10*(1), 52–88.

Pfannkuch, M. (2006). Comparing box plot distributions: A teacher's reasoning. *Statistics Education Research Journal*, *5*(2), 27–45.

Pfannkuch, M. y Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 17–46).

Phatak, A. y Robinson, G. (2005). *Understanding and Modelling Variability: Practitioners ' Perspectives*. Presentado en International Statistical Institute, 55th Session, Sydney, Australia. Recuperado de https://iase-web.org/documents/papers/isi55/Phatak-

Robinson.pdf

Pingel, F. (2010). *UNESCO guidebook on textbook research and textbook revision*.

Pingel, L. A. (1993). Variability-Does the standard deviation always measure it adequately? *Teaching Statistics*, *15*(3), 70–71.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D. y Moll, V. F. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 141-178.

Porter, A. C. y Smithson, J. L. (2001). *Defining, developing, and using curriculum indicators* (N.º RR-048).

Presmeg, N. (2001). Progressive mathematizing using semiotic chaining. *Discussion Group 3: Semiotics in Mathematics Education*. Presentado en 25ª Conferencia PME, Utrecht, Holanda.

Reading, C. y Shaughnessy, J. M. (2004). Reasoning About Variation. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 201-226).

Real Academia Española de la Lengua. (2015). En *Diccionario de la Real Academia Española de la Lengua* (23ª). Recuperado de http://dle.rae.es/

Reints, A. J. C. (2015). How to learn from digital textbooks: Evaluating the quality. En J. Rodríguez, E. Bruillard y M. Horsley (Eds.), *Digital textbooks: What's new?* (pp. 424–465). Santiago de Compostela, España: Servicio de publicaciones de la Universidad de Santiago de Compostela.

Reys, B. J., Reys, R. E. y Chavez, O. (2004). Why Mathematics Textbooks Matter. *Educational Leadership*, *61*(5), 61–66.

Rezat, S. (2006a). A model of textbook use. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 409–416).

Rezat, S. (2006b). The structures of German mathematics textbooks. *ZDM*, *38*(6), 482–487.

Rezat, S. (2013). The textbook-in-use: students' utilization schemes of mathematics textbooks related to self-regulated practicing. *ZDM*, *45*(5), 659–670.

Rezat, S. y Sträßer, R. (2012). From the didactical triangle to the socio-didactical tetrahedron: artifacts as fundamental constituents of the didactical situation. *ZDM*, *44*(5), 641–651.

Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática: Una perspectiva cultural. En: LLinares y Sánchez (Eds.) *Teoría y Práctica en Educación Matemática*. Alfar. Sevilla. Págs 17 - 62.

Ricoeur, P., Collins, F. y Perron, P. (1989). Greimas's narrative grammar. *New Literary History*, *20*(3), 581–608.

Rivers, J. (1990). *Contextual Analysis of Problems in Algebra I Textbooks.* Presentado en Anual Meting of the American Educational Research Asociation, Boston, MA.

Romano, I., Martín, A. M. y Tenorio, A. F. (2012). Teaching statistics using GeoGebra. *Proceedings of EDULEARN12 Conference, 4th International Conference on Education and New Learning Technologies*, 1307–1314. IATED.

Rossman, A. J. y Chance, B. (2009). Rossman/Chance applet collection. Recuperado de http://www.rossmanchance.com/applets.

Saldanha, L. y Thompson, P. (2002). Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. *Educational studies in mathematics*, *51*(3), 257–270.

Salinero, P. (2006). *Historia de la teoría de la probabilidad*. Recuperado de http://cipri.info/resources/HIST-Historia_de_la_Probabilidad-Salinero.pdf

Sánchez Cobo, F. T. (1998). *Significado de la correlación regresión para los estudiantes universitarios* (Universidad de Granada).

Sánchez, E. A. y Orta, J. A. (2013). Problemas de mediciones repetidas y de riesgo para desarrollar el razonamiento de estudiantes de secundaria en los temas de media y dispersión. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *83*, 65–77.

Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 465-494).

Shaughnessy, J. M. (1997). Missed opportunities in research on the teaching and learning of data and chance. En F. Biddulph y K. Carr (Eds.), *Proceedings of the Twentieth Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 6–22). Rotorua, Nueva Zelanda, Universidad de Waikata.

Shaughnessy, J. M. (2006). Research on students' understanding of some big concepts in statistics. En G. Burril (Ed.), *Thinking and reasoning with data and chance* (pp. 77–98). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Shaughnessy, J. y Ciancetta, M. (2001). Conflict between students' personal theories and actual data: The spectre of variation. *Second International Research Forum on Statistical Reasoning, Thinking, and Literacy.* Presentado en Armidale, NSW Australia. Armidale, NSW Australia.

Shaughnessy, J. M. y Ciancetta, M. (2002). Students' understanding of variability in a probability environment. *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*, 295–312.

Shaughnessy, J. M, Ciancetta, M. y Canada, D. (2004). Types of Student Reasoning on Sampling Tasks. En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 177-184).

Shaughnessy, J. M, Garfield, J. y Greer, B. (1996). Data handling. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 205–237).

Shaughnessy, J. M, Watson, J. M., Moritz, J. B. y Reading, C. (1999). School mathematics students' acknowledgement of statistical variation. En Maher (Ed.), *There's more to life than centers. Presession Research Symposium, 77th Annual National Council of Teachers of Mathematics Conference*.

Shen, K., Crossley, J. N., Lun, A. W.-C. y Liu, H. (1999). *The nine chapters on the mathematical art: Companion and commentary*.

Shield, M. (1989). Mathematics teachers' preferences in textbook characteristics. *Mathematics Education Research Journal*, *1*(1), 11–15.

Sierra Bravo, R. (1991). *Diccionario práctico de estadística y técnicas de investigación científica*. Ediciones Paraninfo.

Slauson, L. V. (2008). *Students' conceptual understanding of variability* (The Ohio State

University).

Snee, R. D. (1999). Discussion: Development and use of statistical thinking: A new era. *International Statistical Review*, *67*(3), 255–258.

Snir, J., Smith, C. y Grosslight, L. (1993). Conceptually enhanced simulations: A computer tool for science teaching. *Journal of Science Education and Technology*, *2*(2), 373–388.

Sträßer, R. (2012). Foreword. En G. Gueudet, B. Pepin y L. Trouche (Eds.), *From Text to Lived Resources. Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development* (pp. vi-vii). Londres, Reino Unido: Springer Science & Business Media.

Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation*, *31*(4), 315–327.

Trejo, E. y Trejo, N. (2013). La transposición contextualizada: un ejemplo en el área técnica. *Innovación educativa (México, DF)*, *13*(62), 75-100.

Tukey, J. W. (1977). *Exploratory data analysis*. Pearson.

Turegun, M. (2011). *A model for developing and assesing community college students' conceptions of the range, interquartile range and standard deviation* (Universidad de Oklahoma).

Tversky, A. y Kahneman, D. (1975). Judgment under uncertainty: Heuristics and biases. En D. Wendt y C. Vlek (Eds.), *Utility, probability, and human decision making* (pp. 141–162).

Usiskin, Z. (2013). Studying textbooks in an information age. A United States perspective. *ZDM*, *45*(5), 713–723.

Utts, J. M. (2014). *Seeing through statistics* (4ª). Editorial Brooks/Cole.

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. y Houang. (2002). *According to* *the Book: Using TIMSS to Investigate the Translation of Policy Into Practice Through the World of Textbooks*. Springer Science & Business Media.

Veguin, M. V. V. (2010). *Historia de las Matemáticas en la Península Ibérica: Desde la prehistoria al siglo XV* (1ª). Barcelona, España: Editorial Reverte.

Vizmanos, J. R. y Anzola, M. (1995). *Matemáticas 3º de ESO*. SM.

Wartofsky, M. W. (1979). *Models: Representation and the scientific understanding*. Springer.

Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Routledge.

Watson, J. M. y Kelly, B. A. (2008). Sample, random and variation: The vocabulary of statistical literacy. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *6*(4), 741–767.

Watson, J. M. y Moritz, J. B. (2000). Developing concepts of sampling. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44–70.

Watson, J. M., Collis, K. F. y Moritz, J. B. (1995). The developments of concepts associated with sampling in grades 3, 5, 7, and 9. *Australian Association for Research in Education 1995 Conference*, Page–98.

Watson, J. M., Fitzallen, N. E., Wilson, K. G. y Creed, J. F. (2008). The Representational Value of Hats. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14*(1), 4–10.

Weisberg, H. (1992). *Central tendency and variability* (M. S. Lewis-Beck, Ed.).

Weisstein, E. W. (s. f.). Quartile [Text]. Recuperado 28 de marzo de 2017, de http://mathworld.wolfram.com/Quartile.html

Wild, C. J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-248.

Wilks, S. S. (1951). Undergraduate statistical education. *Journal of the American Statistical Association*, *46*(253), 1–18.

Xu, B. (2013). The development of school mathematics textbooks in China since 1950. *ZDM*, *45*(5), 725–736.

Yap, V. B. (2008). The standard deviation as a descriptive statistic. *Mathematical Medley*, *34*(1), 16-20.

Zieffler, A. S. (2006). *A longitudinal investigation of the development of college students' reasoning about bivariate data during an introductory statistics course* (ProQuest).

Zuñiga, J. (s. f.). Determinación de errores. Recuperado 24 de enero de 2017, de http://www.uv.es/zuniga/3.1_Determinacion_de_errores.pdf

Apéndices

Apéndice 1. Informe favorable del comité de ética de la Universidad de Jaén para el uso de cuestionarios en menores de edad.

UNIVERSIDAD DE JAÉN
Vicerrectorado de Investigación

COMISIÓN DE ÉTICA

Tipo de actividad : Proyecto de tesis

Referencia: CEIH 060415-1

Título de la actividad: La dispersión y su enseñanza

Convocatoria y/o entidad a la que se presenta: Proyecto de tesis doctoral UJA

- Doctorando : Jesus Del Pino Ruiz

Tipo de documentación examinada: Protocolo de investigacion (version 6-4-2015); Informacion a participantes y consentimiento

Tipo de experimentación o actividad sometida a informe: Investigación en humanos: entrevistas, encuestas y test

Informe que se emite : FAVORABLE

Observaciones:

Jaén, 30 de junio de 2015

Amelia Aránega Jiménez
Presidenta de la Comisión de Ética

Vicerrectorado de InvestigaciónDesarrollo Tecnológico e Innovación

Campus Las Lagunills, s/n. Edificio B-1 Rectorado – Telf. 953 212597 – Fax 953 211968 – E-mail: vicinv@ujaen.es

Apéndice 2. Información a participantes y consentimiento.

HOJA INFORMATIVA.

Hola, mi nombre es Jesús del Pino Ruiz, me dirijo a usted para solicitarle permiso para realizar unos test a su hijo/a.

En esta hoja trataré de explicarle en qué consiste la investigación que realizo y por qué la realización de este test por parte de su hijo/a es importante.

Mi tesis doctoral se enmarca dentro de la enseñanza de las matemáticas. En estudios previos se ha detectado dificultades en el alumnado en otros países para la comprensión de ciertas nociones y una de ellas es la dispersión en estadística. Por tanto, queremos saber qué problemas específicos tienen los alumnos de Andalucía en la comprensión de esta área de la estadística. Para ello realizamos este test. Estos test respetarán las actuales leyes de protección de datos reseñadas abajo.[4] La batería de test tendrá una duración aproximada de 30-60 minutos y se realizarán durante una sesión de clase de matemáticas.

El objetivo es que una vez conocidos los resultados de estos test podamos encontrar los puntos débiles de la enseñanza de la dispersión estadística y mejorar la forma en que estos conceptos son enseñados para mejorar la calidad educativa.

Por tanto, su participación y la de su hijo/a es importante para entender los problemas que tiene el sistema educativo actual y mejorarlo.

Atentamente.

Jesús del Pino Ruiz.

---

[4] Ley Orgánica 15/1999, de 13 de diciembre, de Protección de Datos de Carácter Personal. (Texto consolidado de 5 de marzo de 2011)

Real Decreto 1720/2007, de 21 de diciembre, por el que se aprueba el Reglamento de desarrollo de la Ley Orgánica 15/1999, de 13 de diciembre, de protección de datos de carácter personal.

CONSENTIMIENTO DE LOS PADRES.

Datos del estudio.

Investigadores principales: Jesús del Pino Ruiz/Antonio Estepa Castro.
Título del proyecto: La dispersión y su enseñanza.
Centro: Universidad de Jaén.

Nombre del participante:

Nombre del padre/madre/tutor:

1. Declaro que he leído la Hoja de Información sobre el test citado.
2. Se me ha entregado una copia de la Hoja de Información al Participante. Se me han explicado las características y el objetivo del estudio y los posibles beneficios del mismo.
3. Se me ha asegurado que se mantendrá la confidencialidad de mis datos.
4. El consentimiento lo otorgo de manera voluntaria y sé que soy libre de retirarme del estudio en cualquier momento del mismo y por cualquier razón.

D./Dª ______________________________ , con DNI/pasaporte en vigor número __________________, en mi condición de padre/madre/tutor/tutora de D./Dª________________________________ , con DNI/pasaporte en vigor número____________________,por la presente AUTORIZO a mi hijo/hija/pupilo/pupila a realizar la batería de test para el estudio La dispersión y su enseñanza.

En ___________________________, a __ de ____________ de _____.

Fdo:

CONSENTIMIENTO DE LOS ESTUDIANTES.

Datos del estudio.

Investigadores principales: Jesús del Pino Ruiz/Antonio Estepa Castro.
Título del proyecto: La dispersión y su enseñanza.
Centro: Universidad de Jaén.

Nombre del participante:

1. Declaro que he leído la Hoja de Información sobre el test citado.
2. Se me ha entregado una copia de la Hoja de Información al Participante. Se me han explicado las características y el objetivo del estudio y los posibles beneficios del mismo.
3. Se me ha asegurado que se mantendrá la confidencialidad de mis datos.
4. El consentimiento lo otorgo de manera voluntaria y sé que soy libre de retirarme del estudio en cualquier momento del mismo y por cualquier razón.

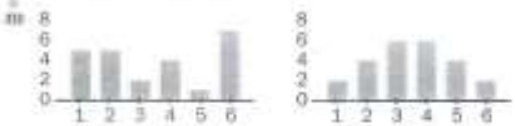
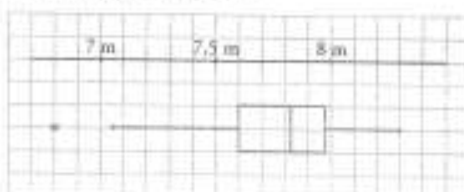
D./Dª ________________________________, con DNI/pasaporte en vigor número _________________, por la presente ACEPTO realizar la batería de test para el estudio La dispersión y su enseñanza. (Es necesario adjuntar también el permiso del padre/madre/tutor)

En __________________________, a __ de ____________ de _____.

Fdo:

Apéndice 3. Ejemplo de situaciones didácticas que aparecen en los libros de texto y su codificación.

<table>
<tr><th>Situaciones /Ejercicios</th><th>Libro</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>S1</td><td>4ASM</td><td>36. El rango es un valor que mide la dispersión de valores de la variable. Calcula el rango de estas dos distribuciones e indica en cuál de ellas el rango representa mejor la realidad de los datos y por qué.
<table><tr><td>x_i</td><td>5</td><td>15</td><td>40</td></tr><tr><td>f_i</td><td>2</td><td>25</td><td>3</td></tr></table>
<table><tr><td>y_i</td><td>5</td><td>15</td><td>40</td></tr><tr><td>f_i</td><td>12</td><td>2</td><td>16</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>E1</td><td>3SM</td><td>44. Calcula el rango, la varianza y la desviación típica de los siguientes datos: −3, 0, 2, 4, 5.</td></tr>
<tr><td>S2</td><td>4BSM</td><td>41. La siguiente tabla presenta el número de horas semanales que dedican al estudio los 30 alumnos de una clase de 4.º de ESO.
<table><tr><th>N.º de horas</th><th>N.º de alumnos</th></tr><tr><td>[0, 4)</td><td>8</td></tr><tr><td>[4, 8)</td><td>10</td></tr><tr><td>[8, 12)</td><td>8</td></tr><tr><td>[12, 16)</td><td>4</td></tr></table>
a) Halla la media, la moda y los tres cuartiles.
b) Calcula el rango, la varianza y la desviación típica.</td></tr>
<tr><td>E2</td><td>3A</td><td>2 Halla σ en las distribuciones de la actividad 1 de la página anterior.</td></tr>
<tr><td>S3a</td><td>3A</td><td>En distintas tiendas de instrumentos musicales preguntamos el precio de ciertos modelos concretos de piano, flauta travesera y armónica. Los resultados obtenidos tienen las siguientes medias y desviaciones típicas:
<table><tr><th></th><th>PIANOS</th><th>FLAUTAS</th><th>ARMÓNICAS</th></tr><tr><td>MEDIA</td><td>943 €</td><td>132 €</td><td>37 €</td></tr><tr><td>DESV. TÍPICA</td><td>148 €</td><td>22 €</td><td>12 €</td></tr></table>
Compara la dispersión relativa de los precios de estos tres productos.</td></tr>
<tr><td>E3a</td><td>4BSM</td><td>37. Relaciona cada variable con su desviación típica sin hacer cálculos. Razónalo.
<table><tr><th>x_i</th><th>f_i</th><th>x_i</th><th>f_i</th><th>x_i</th><th>f_i</th></tr><tr><td>2</td><td>4</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>6</td></tr><tr><td>4</td><td>4</td><td>4</td><td>1</td><td>4</td><td>2</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>6</td><td>13</td><td>6</td><td>1</td></tr><tr><td>8</td><td>4</td><td>8</td><td>1</td><td>8</td><td>6</td></tr><tr><td colspan="2">$s = 1.32$</td><td colspan="2">$s = 2.7$</td><td colspan="2">$s = 2.29$</td></tr></table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Situaciones /Ejercicios</th><th>Libro</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>S3b</td><td>4AS</td><td>53. ●●● El tiempo, en minutos, que un conjunto de estudiantes dedica a preparar un examen es:
220 500 450 390 550 600
790 200 60 300 400 90
Las calificaciones de ese conjunto de estudiantes son las siguientes.
4 5 6 5 7 8 6 4 1 5 6 2
¿Cuál es la media y la desviación típica de ambos conjuntos? ¿Qué podemos hacer para comparar su variabilidad? ¿En qué conjunto los datos están más dispersos?</td></tr>
<tr><td>S3c</td><td>3SM</td><td>52. Observa estas dos distribuciones.

a) Calcula la media de cada una de ellas.
b) Las desviaciones típicas son: s = 1,38 y s = 1,94. Asocia estos valores a cada distribución.</td></tr>
<tr><td>S4</td><td>4AA</td><td>2 Interpreta el siguiente diagrama de caja relativo a marcas de saltadores de longitud.
</td></tr>
<tr><td>E4</td><td>4AA</td><td>1 Haz el diagrama de caja correspondiente a esta distribución de notas.
<table><tr><th>x_i</th><th>f_i</th></tr><tr><td>1</td><td>6</td></tr><tr><td>2</td><td>15</td></tr><tr><td>3</td><td>22</td></tr><tr><td>4</td><td>24</td></tr><tr><td>5</td><td>33</td></tr><tr><td>6</td><td>53</td></tr><tr><td>7</td><td>22</td></tr><tr><td>8</td><td>16</td></tr><tr><td>9</td><td>8</td></tr><tr><td>10</td><td>1</td></tr></table></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Situaciones /Ejercicios</th><th>Libro</th><th>Ejemplo</th></tr>
<tr><td>S5</td><td>3A</td><td>

24 ▼▼▼ Estas son las estaturas de 4 350 soldados:

<table>
<tr><td>ESTATURA (m) (MARCAS DE CLASE)</td><td>1,52</td><td>1,56</td><td>1,60</td><td>1,64</td><td>1,68</td><td>1,72</td><td>1,76</td><td>1,80</td><td>1,84</td><td>1,88</td></tr>
<tr><td>N.º SOLDADOS</td><td>62</td><td>186</td><td>530</td><td>812</td><td>953</td><td>860</td><td>507</td><td>285</td><td>126</td><td>29</td></tr>
</table>

Decimos que los soldados que tienen su estatura entre $\bar{x} + \sigma$ y $\bar{x} + 2\sigma$ son *altos*, si la tienen entre $\bar{x} - 2\sigma$ y $\bar{x} - \sigma$, son *bajos* y entre $\bar{x} - \sigma$ y $\bar{x} + \sigma$, son *normales*. Estima qué tanto por ciento de *altos*, de *bajos* y de *normales* hay. ¿Qué porcentaje hay de *altísimos* y de *bajísimos*?

</td></tr>
<tr><td>E5</td><td>3SM</td><td>

19. De acuerdo con el ejemplo 8, haz un estudio estadístico completo de la distribución dada en la tabla.

<table>
<tr><td>x_i</td><td>6</td><td>7</td><td>9</td><td>11</td><td>13</td><td>15</td></tr>
<tr><td>f_i</td><td>4</td><td>6</td><td>7</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td></tr>
</table>

</td></tr>
</table>

Apéndice 4. Cuestionario realizado a los centros andaluces sobre estadística en 3º de ESO.

Nombre del centro:

Localidad:

Provincia:

Número de grupos de matemáticas de 3º de ESO en el centro en el curso 2016-17, incluyendo los de matemáticas aplicadas.

Número de grupos de 3º de ESO en los que se impartió la unidad de estadística completa, incluyendo medidas de dispersión y diagrama de caja, en el curso 2016-17. Para considerarse como completo además debió de realizarse el examen o evaluarse de algún modo.

En caso de no explicarse el tema de estadística en todas las unidades, ¿por qué sucedió esto?

¿Qué le parece como profesor que el tema de estadística no se curse en todas las unidades de 3º de ESO?

Apéndice 5. Uso de la Guía de Reconocimiento de Objetos GROS.

En este apéndice se va a hacer un GROS resumen de algunos objetos que aparecen en el libro de texto codificado como 3A, es decir, el libro de 3º de ESO de Anaya.

Para analizar cada unidad didáctica la hemos descompuesto en unidades de análisis (y subunidades) tal y como se hace en Konic, Godino y Rivas (2010), para el texto de 3A las unidades de análisis son las siguientes.

Unidades de análisis	Subunidades	Contenido	Páginas
U0	U01	Situación introductoria	236-237
	U02	Para empezar	
	U03	Deberás recordar	
U1	U11	Población y muestra	238
	U12	Actividades	
U2	U21	Variables estadísticas	239
	U22	Actividades	
U3	U31	El proceso que se sigue en estadística	240
	U32	Actividades	
U4	U41	Confección de una tabla de frecuencias	241
	U42	Actividades	
U5	U51	Gráfico adecuado al tipo de información	242-243
	U52	Actividades	
U6	U61	Medidas de centralización	244
	U62	Actividades	
U7	U71	Medidas de dispersión	245
	U72	Ejercicio resuelto	
	U73	Actividades	
U8	U81	Cálculo de $\bar{x}$ y σ en tablas de frecuencias	246-247
	U82	Actividades	
U9	U91	Cálculo de $\bar{x}$ y σ con calculadora	248-249
	U92	Actividades	
	U101	Interpretación	250-251

Unidades de análisis	Subunidades	Contenido	Páginas
U10		conjunta de $\bar{x}$ y σ	
	U102	Ejercicio resuelto	
	U103	Actividades	
U11	U111	Coeficiente de variación	252
	U112	Actividades	
U12		Ejercicios y problemas	253-257
U13		Para terminar	258
U14		Autoevaluación	259

Lo vamos a hacer en concreto para la unidad de análisis 7, en la que se presentan las medidas de dispersión.

a) Lenguaje

OBJETOS	SIGNIFICADOS
“datos”	Diferentes valores de medida de una magnitud.
dispersos	Los datos son diferentes
“grado de separación de los datos a la media”	Se usa como rodeo para definir las medidas de dispersión
“DM”	Desviación media
“$\bar{x}$”	Media
“σ”	Desviación típica
“Cm2/ cm - Superficie/longitud”	Se usa este ejemplo para explicar por qué la desviación típica es más práctica que la varianza.
	Gráfico que explica el concepto de recorrido o rango, mostrando implícitamente el procedimiento de cálculo.

b) Conceptos-definición

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Recorrido o rango	Es la diferencia entre el dato mayor y el dato menor.
Desviación media	Es el promedio de las distancias de los datos a la media
Varianza	Es el promedio de los cuadrados de las

	distancias de los datos a la media
Desviación típica	Es la raíz cuadrada de la varianza
Medidas de dispersión	Parámetros que sirven para medir como de dispersos están los datos

c) Procedimientos

OBJETOS	SIGNIFICADOS
$DM = \frac{\lvert x_1 - \bar{x}\rvert + \lvert x_2 - \bar{x}\rvert + \cdots + \lvert x_n - \bar{x}\rvert}{n} = \frac{\sum \lvert x_i - \bar{x}\rvert}{n}$	La desviación media se calcula sumando los valores absolutos de la diferencia de cada valor con respecto a la media y dividiendo el valor de esta suma por el número de datos existentes.
Varianza = $\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}$	La varianza se calcula sumando los cuadrados de la diferencia de cada valor con respecto a la media y dividiendo el valor de esta suma por el número de datos existentes.
Varianza = $\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \bar{x}^2$	La varianza se calcula sumando los cuadrados de cada valor con respecto a la media, dividiendo el valor de esta suma por el número de datos existentes y restando finalmente el cuadrado de la media.
$\sigma = \sqrt{varianza}$	La desviación típica es igual a la raíz cuadrada de la varianza.

d) Proposiciones

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Recorrido = 8	Cálculo de las medidas de dispersión en el ejemplo de empleo de los procedimientos
DM = 2.44	
Varianza = 7.11	
Desviación típica = 2.67	

e) Argumentos

OBJETOS	SIGNIFICADOS
10-2 = 8	Justificación de las proposiciones

$\frac{\lvert 2-6\rvert+\lvert 4-6\rvert+\lvert 4-6\rvert+\cdots}{9}=\frac{22}{9}=2.44$	
$\frac{(2-6)^2+(4-6)^2+(4-6)^2+\cdots}{9}=\frac{64}{9}=7.11$	
$\sigma=\sqrt{varianza}=\sqrt{7.11}=2.67$	

f) Situaciones-problema

OBJETOS	SIGNIFICADOS
Obtener las medidas de dispersión de la siguiente distribución de datos: 2, 4, 4, 4, 5, 7, 9, 9, 10	Calcular el rango, la desviación media, la varianza y la desviación típica del conjunto de datos dado. (Ejercicio resuelto)
Halla las medidas de dispersión de esta distribución de pesos: 83, 65, 75, 72, 70, 80, 75, 90, 68, 72	Calcular el rango, la desviación media, la varianza y la desviación típica del conjunto de datos dado
Halla la varianza de la distribución siguiente: 8, 7, 11, 15, 9, 7, 13, 15. Calcúlala utilizando las dos fórmulas de la varianza. Comprueba que es mucho más cómo da la segunda.	Calcula la varianza del conjunto de datos dados empleando las dos fórmulas mostradas en procedimientos. El alumno debe de ser capaz de ver que la segunda forma es un cálculo abreviado de la primera.

Esta herramienta se ha utilizado para estudiar cada unidad de análisis dentro de cada unidad didáctica en cada libro de texto.

Vita

Jesús del Pino Ruiz nació en Porcuna en 1982. Desde pequeño se interesa por la lectura, la escritura y las matemáticas. Durante su estancia en el Instituto de Enseñanza Secundaria de Nuestra Señora de Alharilla, en Porcuna, gana el primer premio de escritura del centro, así como en los años 1998 y 1999 se alza con el segundo y primer premio Prensa – Escuela del Diario Jaén consecutivamente. Terminó el instituto con matrícula de honor, siendo el elegido por sus compañeros para dar el discurso de graduación.

Entre los años 2000 y 2005 cursó la carrera de Física en la Universidad de Granada, en la especialidad de Física Teórica en Partículas Elementales. En diciembre de 2005 es elegido por la multinacional Valeo SA para una beca de 9 meses en su departamento de I+D+i, al final de la cual pasa a plantilla, donde de 2009 a 2011 es el responsable de señalización delantera. Mientras trabaja en esta empresa comienza la carrera de Filosofía en la UNED, que cursa entre 2007 y 2009 completando prácticamente el primer curso. En el curso 2008 – 2009 cursa el CAP en la Universidad de Granada y posteriormente en 2010 aprueba las oposiciones a Profesor de Educación Secundaria especialidad en Matemáticas sin plaza.

En el curso 2011-2012 comienza a trabajar como profesor interino realizando numerosas sustituciones en las provincias de Jaén, Córdoba, Granada y Almería. Durante este periodo comienza su doctorado en la Universidad de Jaén bajo la tutela de Don Antonio Estepa, en el ámbito de la Educación Estadística, interesándose en especial en las medidas de dispersión. En el 2011 realiza el Trabajo Tutelado de Iniciación a la

Investigación, obteniendo la calificación de sobresaliente y en el curso 2016 – 2017 realiza en Granada el Máster Universitario en Didáctica de la Matemática, con un trabajo final de máster titulado “Síntesis de la investigación sobre variabilidad y dispersión en estadística” dirigido por Carmen Batanero y Antonio Estepa, obteniendo una calificación de 9.

Finalmente, en junio de 2018 consiguió la plaza como profesor funcionario en la Junta de Andalucía, siendo su primer destino la ciudad de Jaén para el curso 2018-2019.