

Universidad de Granada
Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación



Formación estadística de futuros profesores de matemática chilenos

Felipe Andrés Ruz Ángel

Tesis doctoral

Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Granada

Granada, 2021

El doctorando / *The doctoral candidate* [Felipe Andrés Ruz Ángel] y los directores de la tesis / *and the thesis supervisor* [José Miguel Contreras García]

Garantizamos, al firmar esta tesis doctoral, que el trabajo ha sido realizado por el doctorando bajo la dirección de los directores de la tesis y hasta donde nuestro conocimiento alcanza, en la realización del trabajo, se han respetado los derechos de otros autores a ser citados, cuando se han utilizado sus resultados o publicaciones.

I

Guarantee, by signing this doctoral thesis, that the work has been done by the doctoral candidate under the direction of the thesis supervisor/s and, as far as our knowledge reaches, in the performance of the work, the rights of other authors to be cited (when their results or publications have been used) have been respected.

Lugar y fecha / *Place and date:*

Granada, 15 de febrero de 2021

Director de la tesis / *Thesis supervisor;*

Doctorando / *Doctoral candidate*



Firma / *Signed*



Firma / *Signed*

Reconocimiento:

Esta investigación ha sido financiada principalmente por el Gobierno de Chile a través de una Beca de Doctorado en el Extranjero (folio 72170025) y parcialmente por una beca de Movilidad Internacional de Estudiantes de Programas de Doctorado de la Universidad de Granada, para la realización de una pasantía de 3 meses en la California Polytechnic State University, Estados Unidos.

Agradecimientos

A mi director, por siempre confiar en mí y aceptar embarcarse en el desarrollo de esta tesis doctoral. A Elena por complementar esa dirección y sumarse al equipo que guió las distintas etapas recorridas. A Beth y Elsa, por recibirnos con tanto cariño en San Luis Obispo y por comprometerse con esta investigación desde que nos conocimos en Tokio. A Joachim por recibirnos en Ludwigsburg y por su tremenda buena disposición para aconsejarme cada vez que lo he necesitado. A los demás profesores del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en quienes he encontrado una fuente de conocimiento y experiencia para complementar nuestra manera de abordar las distintas metas pretendidas en esta investigación. Cada uno de ustedes ha aportado en la construcción del perfil investigador que he logrado desarrollar hasta ahora y me dan seguridad de ir con herramientas sólidas para enfrentar desafíos futuros.

A los doctores Claudia Vásquez y Juan Luis Piñeiro por sus valiosos aportes y buena disposición en la revisión de esta tesis. A las diversas instituciones formadoras de profesores de matemática chilenos que participaron en esta investigación: Universidad de Tarapacá, Universidad Arturo Prat, Universidad de La Serena, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Universidad de Valparaíso, Universidad de Placha Ancha, Universidad de Santiago de Chile, Universidad Alberto Hurtado, Pontificia Universidad Católica de Chile, Universidad de Concepción, Universidad Católica de la Santísima Concepción, Universidad del Bío Bío, Universidad de La Frontera, Universidad Católica de Temuco y Universidad Austral.

A mis padres por enseñarme a no poner límites a los sueños y por acompañarme en todo momento. A mis amigos que son la familia que escogí, gracias por las visitas y detalles en la distancia. A nuestra familia Granaína, a mis queridos hermanos y hermanas por ser luz en esta experiencia, y a mis amigos del doctorado por enseñarme de constancia y compañerismo. Y a Nicolás, mi fuente diaria de energía y amor, por su valentía e incommensurable fortaleza para afrontar los desafíos que nos trajo esta aventura, por sumar a Coco y por decidir vivir la vida a mi lado.

Resumen

En esta investigación se ha estudiado la formación estocástica (estadística y probabilidades) de futuros profesores de matemática chilenos, centrando la atención principalmente en algunos problemas relativos al conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza. Con la denominación *profesores de matemática* nos referimos a profesores para los grados 7 al 12 de educación escolar. Es decir, para el caso de Chile, profesores para los últimos dos años del segundo ciclo básico (grados 7 al 8) y educación media (grados 9 al 12). En este contexto, la presente tesis doctoral se organiza en torno a cuatro capítulos principales, sumados a otros dos dedicados a las Referencias y Anexos.

En el Capítulo 1, *Fundamentación*, se comienza con un acercamiento al problema de investigación, donde se justifica el interés de esta tesis. Se reconoce a los profesores de matemática como agentes clave en la promoción de la corriente reformista entorno a la enseñanza de la estocástica en la escuela y se resalta al proceso de formación inicial como una instancia clave para promover las competencias necesarias para llevar adelante esta tarea. Posteriormente, se revisan las principales propuestas teóricas que han conceptualizado el conocimiento profesional del profesor de matemáticas y estocástica en la literatura, donde el conocimiento del contenido es un aspecto valorado transversalmente en todos los casos. Por tanto, se establece el interés principal de esta investigación en el conocimiento del contenido y, desde una perspectiva pragmatista de la cognición, se consideran también a las actitudes como un descriptor del dominio afectivo hacia el contenido y su enseñanza. En este contexto, se finaliza el capítulo con los principales antecedentes sobre el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica en profesores, como también la relación entre ambos aspectos.

En el Capítulo 2, *Metodología*, se detallan aspectos teórico-metodológicos concretos que orientaron y organizaron esta tesis doctoral, cuya modalidad es la agrupación de publicaciones. Se comienza con el marco teórico, construido a partir de la revisión realizada en el capítulo anterior y se formaliza el problema central de investigación. Como consecuencia, se establece el Objetivo General (OG) de *analizar la relación entre el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en futuros profesores de matemática chilenos*. Así, para la persecución de esta meta global, se plantean cinco Objetivos Específicos (OE) acompañados de sus respectivas Hipótesis (H) iniciales de investigación.

En el Capítulo 3, *Resultados*, se incluyen las publicaciones derivadas de esta tesis doctoral, que corresponden a la articulación de siete manuscritos (cinco publicados, uno aceptado y otro en proceso de revisión). Estos artículos se relacionan con las metas parciales

de esta tesis según se detalla en el Capítulo 2 en la sección Organización de la investigación. Un resumen detallado de cada una de estas publicaciones se incluye en la Síntesis del Capítulo 3.

En el Capítulo 4, *Conclusiones*, se comienza contrastando los resultados obtenidos con los objetivos e hipótesis iniciales. Se valora positivamente el cumplimiento de las cinco metas específicas planteadas inicialmente. Por tanto, respecto al objetivo general, se concluye la poca claridad sobre la relación entre el conocimiento del contenido y las actitudes en profesores, reforzando resultados revisados previamente (Capítulo 1). En este caso, los participantes demostraron un bajo rendimiento en los ítems sobre el contenido, pero declararon una disposición mayormente positiva hacia la estocástica y su enseñanza. Posteriormente, se identifican de las aportaciones y limitaciones más relevantes de la investigación. Se destaca a los instrumentos desarrollados como principal aporte, mientras que se asume como limitación al uso de metodologías cuantitativas en la mayoría de los estudios desarrollados. Se finaliza con las proyecciones de la investigación, que son presentadas como sugerencias para reorientar los procesos de formación inicial y desarrollo profesional de profesores en estocástica.

Statistics Training of Pre-Service Chilean Mathematics Teachers

This research has studied the stochastics (statistics and probability) training of pre-service Chilean mathematics teachers, focusing mainly on certain issues related to content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching. *Mathematics teachers* herein are defined as teachers for grades 7 to 12 of school education. This is, in the case of Chile, teachers for the last two years of the second basic cycle (grades 7 to 8) and secondary education (grades 9 to 12). In this context, this doctoral thesis is organised into four chapters, and including another two dedicated to References and Appendices.

Chapter 1, *Rationale*, begins with an approach to the research problem, where the importance to the field of this thesis is justified. Mathematics' teachers are recognised as key agents in promoting the reform movement around teaching stochastics in schools. Teachers' initial training is highlighted as a key instance to promote the proficiency to teach stochastics. Subsequently, the main literature regarding theoretical proposals for mathematics and stochastics teachers' professional knowledge are reviewed, where we could see content knowledge as a valued aspect across the revised literature. Thus, the main interest of this research is established in content knowledge and attitudes are also considered as a descriptor of the affective domain towards stochastics and its teaching. In this context, the chapter ends with the main background on content knowledge and attitudes towards stochastics in teachers, as well as the relationship between both content knowledge and attitudes.

Chapter 2, *Methodology*, theoretical-methodological aspects that guided and organised this doctoral thesis are highlighted, whose modality is the *grouping of publications*. The chapter begins with the theoretical framework, built from the review carried out in Chapter 1; and the central research problem is formalised. Consequently, the Main Aim (MA), *to analysed the relationship between content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching in pre-service Chilean mathematics teachers* is established. Thus, for the pursuit of this primary aim, five Objectives (Ob) are set together with their respective initial research Hypotheses (H).

Chapter 3, *Findings*, the articles produced as a published output of this doctoral project are included, which correspond to the production of seven manuscripts (five published, one in press, and the other one under review). These papers are related to the partial goals (Ob's) of this thesis as detailed in Chapter 2. A detailed summary of each of these publications is included in the *Synthesis of Chapter 3*.

Chapter 4, *Conclusions*, begins by contrasting the results obtained with the initial aims and hypotheses. Compliance with the five specific objectives initially set is valued positively.

Abstract

Therefore, regarding the main goal, it is concluded that there is not a clear pattern regarding the relationship between content knowledge and attitudes in teachers, in agreement with previously reported results (reviewed in Chapter 1). In this case, the participants demonstrated poor performance on the content knowledge items but reported a mostly positive attitude towards stochastics and its teaching. Subsequently, the most relevant contributions and limitations of the research are identified. The instruments developed are highlighted as the main contribution, while the use of quantitative methodologies is assumed as a limitation in the case of most previously reported studies. The Chapter ends with the research projections, which are presented as suggestions to update the initial training and professional development processes for teachers in stochastics.

Índice

Introducción General	1
Capítulo 1: Fundamentación	9
INTRODUCCIÓN.....	9
ACERCAMIENTO AL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	10
<i>La Estocástica como Componente Cultural</i>	<i>10</i>
<i>Corriente Reformista en torno a la Enseñanza de la Estocástica en la Escuela</i>	<i>12</i>
<i>Necesidad de Fortalecer la Formación de Profesores para Enseñar Estocástica</i>	<i>15</i>
<i>La Formación de Profesores de Matemáticas en Chile</i>	<i>15</i>
PERSPECTIVAS TEÓRICAS SOBRE EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS	17
PERSPECTIVAS TEÓRICAS SOBRE EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE ESTOCÁSTICA	29
ANTECEDENTES	44
<i>Estudios sobre el Conocimiento del Contenido de Estocástica.</i>	<i>44</i>
<i>Estudios sobre Actitudes hacia la Estocástica.</i>	<i>75</i>
<i>Estudios sobre la Relación entre el Conocimiento del Contenido y las Actitudes.....</i>	<i>79</i>
SÍNTESIS DEL CAPÍTULO	81
Capítulo 2: Metodología.....	83
INTRODUCCIÓN.....	83
MARCO TEÓRICO.....	83
<i>Idoneidad Didáctica</i>	<i>84</i>
<i>Conocimiento del Contenido</i>	<i>86</i>
<i>Actitudes hacia la Estocástica y su Enseñanza</i>	<i>89</i>
PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	91
<i>Objetivos de investigación.....</i>	<i>92</i>
<i>Hipótesis Iniciales de Investigación.....</i>	<i>94</i>
ORGANIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN	96
<i>Sobre el Objetivo Específico 1</i>	<i>96</i>
<i>Sobre el Objetivo Específico 2</i>	<i>97</i>
<i>Sobre el Objetivo Específico 3</i>	<i>97</i>
<i>Sobre el Objetivo Específico 4</i>	<i>97</i>
<i>Sobre el Objetivo Específico 5</i>	<i>98</i>
SÍNTESIS DEL CAPÍTULO	98
Capítulo 3: Resultados	101
INTRODUCCIÓN.....	101
ARTÍCULO EN BOLEMA: “GUÍA DE VALORIZACIÓN DE LA IDONEIDAD DIDÁCTICA DE PROCESOS DE INSTRUCCIÓN EN DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA”.	102
ARTÍCULO EN PNA: “IDONEIDAD DIDÁCTICA DE PROCESOS DE INSTRUCCIÓN PROGRAMADOS SOBRE DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA”.....	122

ARTÍCULO EN AIEM: “EVALUACIÓN DE CONOCIMIENTOS SOBRE EL CONTENIDO DE ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA EN FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICAS”	149
ARTÍCULO EN CADERNOS DE PESQUISA: “ACTITUDES HACIA LA ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA Y SU ENSEÑANZA EN FUTUROS PROFESORES”	169
ARTÍCULO EN ACTA SCIENTIAE: “ATTITUDES TOWARDS PROBABILITY AND ITS TEACHING IN PROSPECTIVE MATHEMATICS TEACHERS FROM CHILE AND SPAIN”	189
ARTÍCULO EN REVISIÓN EN IJMA: “EXPLORING HOW CHILEAN PRE-SERVICE TEACHERS’ ATTITUDES TOWARD STOCHASTICS VARY BY CONTENT TOPIC”	206
ARTÍCULO ACEPTADO EN SERJ: “CONTENT KNOWLEDGE AND ATTITUDES TOWARDS STOCHASTICS AND ITS TEACHING IN PRE-SERVICE CHILEAN MATHEMATICS TEACHERS” ..	230
SÍNTESIS DEL CAPÍTULO	268
Capítulo 4: Conclusiones	271
INTRODUCCIÓN.....	271
SOBRE LOS OBJETIVOS E HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN.....	271
<i>Conclusiones en Relación al Primer Objetivo Específico (OE1) e Hipótesis (H1)</i>	271
<i>Conclusiones en Relación al Segundo Objetivo Específico (OE2) e Hipótesis (H2)</i>	273
<i>Conclusiones en Relación al Tercer Objetivo Específico (OE3) e Hipótesis (H3)</i>	274
<i>Conclusiones en Relación al Cuarto Objetivo Específico (OE4) e Hipótesis (H4)</i>	276
<i>Conclusiones en Relación al Quinto Objetivo Específico (OE5) e Hipótesis (H5)</i>	277
<i>Conclusiones en Relación al Objetivo General (OG) y Problema de Investigación</i>	278
APORTACIONES Y LIMITACIONES DE LA INVESTIGACIÓN.....	280
<i>Aportaciones</i>	280
<i>Limitaciones</i>	281
PROYECCIONES DE LA INVESTIGACIÓN	282
SÍNTESIS DEL CAPÍTULO	284
Referencias	287
Anexo 1: Análisis Piloto de ítems sobre probabilidad e inferencia.....	307
INSTRUMENTO	307
ALGUNAS CARACTERÍSTICAS PSICOMÉTRICAS	308
<i>Sobre los ítems de probabilidad</i>	308
<i>Sobre los ítems de inferencia</i>	309
ÍTEMES SELECCIONADOS	310
Anexo 2: Escala de actitudes hacia la inferencia y su enseñanza.....	314
ALGUNOS RESULTADOS DE INTERÉS EN LA MUESTRA PILOTO	314
Anexo 3: Conclusions	316
ABOUT THE GOALS AND RESEARCH HYPOTHESES.....	316
RESEARCH CONTRIBUTIONS AND LIMITATIONS	324
RESEARCH PROJECTIONS	326
CHAPTER SUMMARY	328
Anexo 4: Extended Summary.....	330

Introducción General

En esta investigación se ha estudiado la formación estocástica de futuros profesores de matemática chilenos, centrando la atención principalmente en algunos problemas relativos al conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza. El término estocástica es usado para referirnos simultáneamente a la estadística y probabilidad y así enfatizar su mutua dependencia. A su vez, con la denominación *profesores de matemática* nos referiremos a profesores para los grados 7 al 12 de educación escolar. Es decir, para el caso de Chile, profesores para los últimos dos años del segundo ciclo básico (grados 7 al 8) y educación media (grados 9 al 12). En este contexto, la presente tesis doctoral se organiza en torno a cuatro capítulos, donde se presenta la Fundamentación, Metodología, Resultados y Conclusiones que detallan las distintas etapas desarrolladas, sumados a otros dos dedicados a las Referencias y Anexos.

En el Capítulo 1, *Fundamentación*, se presenta un acercamiento al problema de investigación y se sintetizan los principales antecedentes que establecieron las bases teórico-metodológicas adoptadas. Se comienza justificando el interés de la investigación, destacando a la estocástica como un componente cultural necesario para afrontar los desafíos de la era actual. Esta situación ha impulsado una corriente reformista entorno a la enseñanza de la estocástica en la escuela. Al respecto, se ejemplifican algunos casos de interés para esta investigación, donde se promueve el aprendizaje de la estocástica dentro del currículo de matemática durante toda la trayectoria escolar. Estos países representan las estancias realizadas en el marco de la mención internacional a la que accede esta tesis (EE.UU. y Alemania), la universidad patrocinadora (España) y el contexto de la investigación (Chile). De esta forma, se identifica a los profesores de matemática como principales responsables de implementar las nuevas reformas en la escuela y se destaca a la formación inicial como una instancia clave para promover la capacidad de enseñar estocástica en este nuevo panorama. Se finaliza la aproximación al problema de investigación identificando a los sujetos de interés, con una descripción de la formación inicial de profesores de matemática en Chile.

En cuanto a la revisión de la literatura, se comienza con una presentación de las principales perspectivas teóricas sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, con el fin de sustentar las aproximaciones desarrolladas en el campo de la educación estocástica. De esta forma, se identifican diversos componentes teóricos sobre el conocimiento necesario para enseñar estocástica resaltados por la literatura, donde el conocimiento del contenido es un aspecto valorado transversalmente en todos los casos. Como

consecuencia, se establece el interés principal de esta investigación en el conocimiento del contenido, por lo que se destina la sección de antecedentes a revisar las principales investigaciones previas sobre el conocimiento del contenido de estocástica en profesores. Además, desde una perspectiva pragmatista del conocimiento, se consideran también a las actitudes como un descriptor del dominio afectivo hacia el contenido y su enseñanza. Por ello, se incluye también una revisión de aquellos estudios interesados en las actitudes hacia la estocástica en profesores en ejercicio y formación, como también aquellas investigaciones centradas en analizar la relación entre ambos aspectos en el profesorado de estocástica.

Respecto al conocimiento del contenido, se organizan los antecedentes según las siete nociones clave para el dominio de la estocástica en profesores: datos, variación, distribución, representación, asociación y modelación bivariada, probabilidad, muestreo e inferencia. Al respecto, se destaca que la investigación previa en profesores se ha concentrado principalmente en futuros maestros de educación infantil y primaria, siendo escasa en profesores de matemática. Comúnmente se han estudiado los temas de estocástica de forma segmentada, lo que permitió su clasificación en los siete temas clave. Entre ellos, los más frecuentes corresponden al análisis exploratorio de datos o estadística descriptiva, concentrándose mayormente en las nociones de variación, distribución y gráficos estadísticos. Por el contrario, los contenidos sobre probabilidad e inferencia estadística han sido menos abarcados previamente en la literatura. No obstante, se reconoce que más allá del tema, en todos los casos se concluye en alguna medida con la necesidad de reforzar la formación estocástica del profesorado.

En cuanto a las actitudes, se destaca que en comparación a otras poblaciones que reciben formación estocástica, la literatura en profesores ha sido escasa. Al respecto, se identifica que para evaluar las actitudes en profesores comúnmente se han seguido dos caminos. El primero, donde se utilice alguno de los instrumentos clásicos diseñados para universitarios de cualquier grado; y el segundo, donde se proponga uno nuevo, muchas veces adaptado de los anteriores, que además considere actitudes hacia la enseñanza de la estadística. En este contexto, se destaca la tendencia de reportar una disposición positiva hacia la estadística, aunque esta se torna más negativa en algunos de los componentes considerados según la perspectiva teórica adoptada en cada caso.

En cuanto a los antecedentes sobre la relación entre el conocimiento y las actitudes, estos son más escasos aún, y sus hallazgos no han reflejado tendencias claras entre ambos aspectos. Por una parte, las investigaciones previas destacan que un buen conocimiento del contenido se relaciona fuerte y positivamente con actitudes positivas hacia la estadística. No obstante, la asociación pierde intensidad cuando el conocimiento del contenido es suficiente y

las actitudes son más indiferentes; al igual que cuando el conocimiento es deficiente y las actitudes son mayoritariamente positivas. De esta forma, se establecen las referencias previas de las bases teórico-metodológicas adoptadas cada etapa de esta investigación, que son objeto del segundo capítulo.

En el Capítulo 2, *Metodología*, se detallan aspectos metodológicos que orientaron y organizaron esta tesis doctoral, cuya modalidad es la agrupación de publicaciones. Se comienza con el marco teórico, construido a partir de la revisión realizada en el capítulo anterior y se formaliza el problema central de investigación. Como consecuencia, se establece el Objetivo General (OG) de *analizar la relación entre el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en futuros profesores de matemática chilenos*. Así, para la persecución de esta meta global, se plantean cinco Objetivos Específicos (OE) acompañados de sus respectivas Hipótesis (H) iniciales de investigación.

La primera meta específica (OE1) corresponde a *determinar un sistema de indicadores de idoneidad didáctica con las exigencias esperadas sobre los conocimientos didáctico-estocásticos en los procesos de formación inicial de profesores de matemática chilenos*. Para la persecución de este objetivo, se llevan adelante dos estudios, enmarcados en la teoría de idoneidad didáctica (Godino, 2013). En el primero se sistematizan una serie recomendaciones locales para Chile e internacionales sobre la educación estocástica de profesores de matemática (artículo en Bolema) (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2019). En el segundo, se valoran cuatro procesos de instrucción programados sobre didáctica de la estadística para profesores de matemática chilenos (artículo en PNA) (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020c).

La segunda meta parcial (OE2) fue *construir y validar un instrumento de evaluación sobre el conocimiento del contenido de estocástica en futuros profesores de matemática*. Al respecto, se reporta el proceso de diseño e implementación piloto de un cuestionario para evaluar el conocimiento del contenido de estocástica que, debido a su extensión, se publica por partes. Una de ellas, ejemplifica las etapas recorridas respecto a los ítems sobre estadística descriptiva (artículo en AIEM) (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020b), mientras que lo relativo a probabilidades (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, aceptado en BEIO) e inferencia se detalla en el Anexo 1. En ambos casos, se considera una muestra de 126 futuros profesores de matemática (españoles y chilenos) para valorar algunas propiedades psicométricas de los ítems y validez del instrumento. Además, se explora el conocimiento del contenido demostrado por la muestra piloto en el marco del modelo de Conocimientos Didáctico-Matemáticos del profesor (Godino, 2009).

El tercer objetivo específico (OE 3) corresponde a *explorar las actitudes de los futuros profesores de matemática hacia los contenidos de estocástica, según su organización en el*

currículo escolar chileno. La persecución de esta meta abarcó la adaptación de la escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza (EAPE) de Estrada y Batanero (2015), hacia otros tópicos de estocástica. Por ello, se aplica la escala AEPE en la muestra piloto, variando a los temas de estadística descriptiva (artículo CP) (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020a) e inferencia (Anexo 2), para compararlos con los obtenidos hacia la probabilidad (artículo en AS) (Ruz, Molina-Portillo, Vásquez, et al., 2020). En ellos, se sigue una metodología cuantitativa y según cada tópico, se reporta información relativa a la validez de las escalas y el sentido (positivo o negativo) de las actitudes declaradas por los participantes.

La cuarta meta parcial (OE4) fue *evaluar las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en una muestra de futuros profesores de matemática chilenos*. De esta forma, tras probar las buenas características de la EAPE para ser usada en otros tópicos de estocástica, se detallan los resultados de su aplicación en una muestra de 269 futuros profesores de matemática chilenos. A través de una metodología cuantitativa, se organizan los contenidos de estocástica según su denominación en el currículo escolar en: estadística descriptiva, probabilidad e inferencia y se exploran las principales diferencias actitudinales según las componentes teóricas consideradas (artículo en evaluación en IJMA) (Ruz, Chance y Contreras, en revisión).

Finalmente, la quinta meta específica (OE5) fue *evaluar el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en una muestra de futuros profesores de matemática chilenos, profundizando en la relación entre ambos aspectos*. Este objetivo fue construido en base a las metas previas, que permitieron el desarrollo de instrumentos sobre el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza. Por tanto, en este caso se reportan los resultados de evaluar ambos aspectos y analizar su asociación en una muestra de 269 futuros profesores de matemática chilenos (artículo aceptado en SERJ) (Ruz, Chance, Medina y Contreras, en prensa).

En el Capítulo 3, *Resultados*, se incluyen las publicaciones derivadas de esta tesis doctoral, que corresponden a la articulación de siete manuscritos (cinco publicados, uno aceptado y otro en proceso de revisión). Estos artículos se relacionan con las metas parciales de esta tesis según se detalla en el Capítulo 2, y ahora destacaremos brevemente algunos de los resultados más relevantes de cada uno de ellos.

Sobre la publicación en *Bolema* (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2019). En este artículo se aborda el problema de la valoración de planes de formación de profesores de matemática en didáctica de la estadística. Para ello, se describe el proceso de construcción de la Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de Instrucción programados sobre Didáctica de la Estadística (GVID-IDE), según una colección de indicadores inferidos por medio de la técnica de análisis de contenido de documentos de consenso internacional, que

rigen u orientan esta etapa formativa. La GVID-IDE se organiza en dos dimensiones de análisis: una sobre el conocimiento didáctico-matemático del futuro profesor (faceta epistémica); y una segunda sobre los conocimientos del formador respecto a los profesores en formación (facetas cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica).

Respecto al manuscrito en *PNA* (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020c): En este trabajo se presentan los resultados de implementar la GVID-IDE en cuatro programas de asignaturas sobre didáctica o enseñanza de la estadística para profesores de matemática chilenos. Los resultados son organizados de manera que sugieran y detecten puntos de mejora en los documentos analizados. Además, se propone una medida global sobre el grado de idoneidad didáctica alcanzada en estos programas de formación. Se concluye que los programas tienen un grado de idoneidad alto para las facetas afectiva, interaccional y mediacional, pero no superan el grado medio en las facetas epistémica, cognitiva y ecológica.

En cuanto al artículo publicado en *AIEM* (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020b): En este trabajo se presenta el proceso de construcción e implementación piloto de un instrumento para evaluar el conocimiento sobre estocástica en futuros profesores de matemática, ejemplificando en lo referido al contenido de estadística descriptiva. Las pruebas se llevan a cabo en una muestra piloto de 126 futuros profesores de matemática, españoles y chilenos. Los resultados, reflejan que el instrumento cuenta con características aceptables, al igual que los reactivos analizados y se proyecta su aplicación reformada en el futuro. Mientras que lo relativo a probabilidades (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, aceptado en BEIO) e inferencia estadística, se incluye en el Anexo 1, cuyos resultados fueron más deficientes en lo referido a probabilidades, aunque muy por debajo de lo esperado en ambos tópicos.

Sobre el artículo en *CP* (Ruz et al., 2020a): En este trabajo, se examinan las actitudes hacia la estadística descriptiva y su enseñanza en una muestra de 126 futuros profesores de matemática españoles y chilenos. Entre los resultados, se informa sobre la adecuada consistencia interna y validez del instrumento, para luego explorar la disposición de los sujetos hacia los distintos componentes de actitudes considerados. Los participantes declaran actitudes positivas hacia la estadística descriptiva y su enseñanza, las que son más positivas frente al interés de enseñar estos contenidos en los sujetos chilenos.

Respecto a la publicación en *AS* (Ruz, Molina-Portillo, Vásquez, et al., 2020): En este estudio, se examina la validez y confiabilidad de la escala EAPE desde una perspectiva cuantitativa. Los resultados refuerzan las buenas propiedades psicométricas del instrumento y se demuestran actitudes en general positivas en la muestra piloto. A su vez, los resultados de la escala hacia la inferencia estadística fueron también buenos, aunque menos positivos que hacia los contenidos anteriores, cuyo detalle se incluye Anexo 2.

En cuanto al manuscrito en revisión en *IJMA* (Ruz, Chance y Contreras, en evaluación): Se presentan los resultados de evaluar las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en una muestra de 269 futuros profesores de matemática chilenos, según su clasificación en estadística descriptiva, probabilidad e inferencia. En general, los participantes declararon actitudes mayormente positivas hacia los tres tópicos de estocástica y su enseñanza, pero con diferencias entre ellos, principalmente hacia la inferencia, cuya disposición usualmente es menos positiva. Se finaliza con algunas recomendaciones para mejorar esta situación.

Se termina la presentación de resultados con el artículo aceptado en *SERJ* (Ruz, Chance, Medina y Contreras, en evaluación): En este estudio se analiza el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en una muestra de 269 futuros profesores de matemática chilenos. En cuanto al conocimiento del contenido, el rendimiento de los participantes fue en general deficiente, aunque más descendido en lo que referido a probabilidades. Respecto a los resultados en la escala de actitudes, se concluye una disposición en general positiva. En cuanto a la relación entre ellos, se reportan asociaciones mayormente débiles, aunque con variaciones según algunos aspectos como el tópico de estocástica, las componentes de actitudes y la formación previa. Basados en estos resultados, se concluye con recomendaciones para mejorar la educación estocástica de profesores en instancias de formación inicial y desarrollo profesional.

En el Capítulo 4, *Conclusiones*, se detallan las principales conclusiones de esta investigación. Se comienza contrastando los resultados obtenidos (Capítulo 3) con los objetivos e hipótesis iniciales (Capítulo 2), para luego identificar algunas de las aportaciones y limitaciones más relevantes.

Se valora positivamente el cumplimiento de las cinco metas específicas planteadas inicialmente. Con ello, fue posible acercarse a analizar la relación entre el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en futuros profesores de matemática chilenos (Objetivo General). Al respecto, se concluye la poca claridad de dicha relación, reforzando resultados observados y discutidos previamente (Capítulo 1). En este caso, los participantes demostraron un bajo rendimiento en los ítems sobre el contenido, pero declararon una disposición mayormente positiva hacia la estocástica y su enseñanza. Es decir, más allá de las deficiencias para dominar el contenido, se destaca la buena actitud de los futuros profesores para fortalecer sus dificultades con la estocástica y su enseñanza.

En cuanto a las aportaciones de la investigación, se destacan a los instrumentos desarrollados como principal aporte al campo. El primero que sintetiza los principios curriculares para la formación estocástica de profesores; y los segundos para aproximarse a evaluar el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en

profesores de matemática (en ejercicio o formación). A su vez, se valora como un aporte al uso de dichos instrumentos, el primero en la valoración de procesos de instrucción concretos (OE1) y el segundo, en distintas muestras de futuros profesores de matemática (OE2-3 y OE4-5). Por otro lado, se asume como principal limitación de la investigación al uso de metodologías cuantitativas en la mayoría de los estudios desarrollados; y se reconoce que una aproximación cualitativa hubiera permitido profundizar más en nuestros hallazgos. De esta forma, se reconoce el carácter diagnóstico y acotado de esta investigación, pero se valoran los resultados obtenidos para el planteamiento de futuras líneas de estudio y sugerencias para la formación y desarrollo profesional de profesores de matemática que enseñan estocástica en la escuela.

Respecto a la realidad chilena, se sugiere específicamente que las universidades actualicen sus programas de formación estocástica e incluyan recomendaciones más recientes para preparar mejor a los futuros profesores de matemática. En esos enfoques, el contenido cubierto es muy similar a un curso tradicional, pero en su aplicación se sugiere el uso de contextos y aplicaciones genuinas, para el desarrollo de un aprendizaje activo basado en la exploración. Desde nuestra perspectiva, esta actualización idealmente debería dejar de diferenciar entre asignaturas enfocadas en la estocástica y otras en su enseñanza, sino que ambos aspectos deberían integrarse y promoverse simultáneamente. Al mismo tiempo, deberían considerarse aspectos afectivos, que, pueden desarrollarse aprendiendo de la práctica docente, la exploración profunda de los contenidos estocásticos y el uso de entornos tecnológicos para la enseñanza. Por ello, las instituciones de formación, el CPEIP o las propias escuelas, deberían ofrecer oportunidades de desarrollo profesional para los profesores de forma gratuita, especialmente en estocástica, durante al menos los dos primeros años de práctica. Así, se proyecta que, siguiendo estas sugerencias en investigaciones futuras, en un período no muy lejano, los profesores de matemáticas podrían responder satisfactoriamente a las demandas sobre la enseñanza de la estocástica en su campo profesional.

Capítulo 1

Fundamentación

Introducción

En este capítulo nos acercamos al problema de investigación, relativo al conocimiento y las actitudes hacia la estocástica en futuros profesores de matemática chilenos. Usamos el término estocástica para referirnos simultáneamente a la estadística y probabilidad y así enfatizar la mutua dependencia entre el conocimiento y razonamiento entre ambas materias (Batanero, 2019), además de la practicidad del término para evitar sobrecargar el texto. Al mismo tiempo, con la denominación *profesores de matemática* nos referiremos a profesores para los grados 7 al 12 de educación escolar.

En primer lugar, se presenta un *acercamiento al problema de investigación*. Para ello, se justifica el interés de la investigación, a partir de la alta valorización social que ha alcanzado la estocástica en los últimos años, posicionando a su competencia como un componente cultural necesario para afrontar los desafíos de la era actual. Posteriormente, se destaca la corriente reformista entorno a la enseñanza de la estocástica en la escuela, ejemplificando algunos casos de particular interés para esta investigación, como Chile, España, EE.UU. y Alemania, donde se resalta la importancia de desarrollar esta idea durante toda la trayectoria escolar. Estos países representan las estancias realizadas en el marco de la mención internacional a la que accede esta tesis (EE.UU. y Alemania), la universidad patrocinadora (España) y el contexto de la investigación (Chile). De esta forma, se identifica a los profesores de matemática como principales agentes en la implementación de las nuevas reformas, quienes deben desarrollar las competencias necesarias para afrontar esta responsabilidad desde su formación inicial. En este contexto, se hace una breve descripción de la formación de profesores de matemática en Chile, que nos permite acercarnos a los sujetos de interés y con ello al problema de esta investigación.

Posteriormente, se presenta una revisión de la literatura que fundamenta los estudios enmarcados en esta tesis doctoral. Se comienza con una presentación de las principales *perspectivas teóricas sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas*, con el fin de sustentar las aproximaciones desarrolladas en el campo de la educación estocástica. Sobre esta base, se continúa con una revisión de las principales *perspectivas teóricas sobre el conocimiento profesional del profesor de estocástica*, destacando distintos componentes o

descriptores de esta competencia profesional. Entre ellos, el conocimiento del contenido es un aspecto valorado transversalmente en las diversas aproximaciones teóricas revisadas.

Como consecuencia, se establece el interés central de la investigación en este aspecto, el conocimiento del contenido, por lo que se destina la sección de *antecedentes* a revisar las principales *investigaciones previas sobre el conocimiento del contenido* de estocástica en profesores. En este sentido, tras adoptar una perspectiva pragmatista de la cognición, se revisa también un aspecto del dominio afectivo, a saber, los principales *estudios sobre las actitudes hacia la estocástica* en profesores. Con ello, se considera además una revisión de los principales *estudios sobre la relación entre el conocimiento del contenido y las actitudes* presentes en la literatura previa en profesores.

Se finaliza el capítulo con una *síntesis* de las bases fundacionales que solventaron la perspectiva teórico-metodológica adoptada en el desarrollo de esta investigación.

Acercamiento al Problema de Investigación

Nuestro interés por investigar la formación estocástica de futuros profesores de matemática se puede organizar en torno a tres aspectos principales. El primero, ubica a la *estocástica como un componente cultural*, aspecto que ha sido destacado por diversos agentes vinculados con la educación estocástica, quienes han resaltado que su conocimiento se considera como parte de la herencia cultural necesaria para que todo ciudadano pueda desenvolverse eficazmente en la sociedad de la información. Esta situación ha impulsado una *corriente reformista entorno al currículo de matemática*, donde se han incorporado elementos de la estocástica dentro de la trayectoria escolar obligatoria de un gran número de países, entre ellos Chile. En consecuencia, se destaca la *necesidad de preparar a los profesores de matemática* para enseñar estocástica de acuerdo a las exigencias y necesidades actuales. Sin embargo, este es un aspecto que la literatura ha reportado como deficiente sistemáticamente durante los últimos años.

La Estocástica como Componente Cultural

Actualmente, garantizar la participación activa de los ciudadanos en debates o discusiones sobre aspectos de relevancia social, tales como la desigualdad económica, la privatización de los recursos básicos o la pobreza, requieren la capacidad de analizar críticamente resultados estadísticos sobre tendencias pasadas, situaciones vigentes y posibles cambios futuros (Engel, 2019). Este hecho requiere no solo dominar técnicas estadísticas, sino

que implica generar hábitos mentales, motivados por el compromiso de interactuar con datos reales y comunicar evidencia numérica críticamente.

De esta forma, la capacidad de razonar adecuadamente en situaciones de incertidumbre se ha destacado como una competencia indispensable para afrontar de manera eficiente las particularidades de la era actual (Ben-Zvi y Makar, 2016b). Lo anterior, por la estrecha relación de la estocástica con diversas áreas científicas o humanísticas y la sociedad en general, donde cada vez es más común relacionarse con argumentos o afirmaciones basadas en datos presentes en los medios de comunicación. Esta información, a la que cualquier ciudadano puede tener acceso, se presenta con todo tipo de datos y formas de representación, por lo que cobra importancia que las personas posean ciertos conocimientos y habilidades que les permitan analizar y evaluar críticamente su contenido (Contreras y Molina-Portillo, 2019). A esta competencia se le conoce por la comunidad científica como *statistical literacy*, cuya traducción al español se ha denominado comúnmente *alfabetización* o *cultura estadística* (Batanero, 2002; Gal, 2002; Schield, 1999; Wallman, 1993) y aunque debido a sus diversas aplicaciones, no se ha establecido una definición colectivamente consensuada (Ruz, Martínez, et al., 2020), destacamos a la propuesta por Gal (2002) como la más citada.

“El término alfabetización estadística se refiere ampliamente a dos componentes relacionados entre sí: (a) la capacidad de las personas para interpretar y valorar de forma crítica la información estadística que se puede encontrar en diversos contextos; y (b) la habilidad para comunicar sus reacciones a dicha información, sus opiniones sobre su implicación o sus preocupaciones con respecto a la aceptabilidad de las conclusiones dadas” (Gal, 2002, p. 2).

En esta creciente concienciación sobre la importancia de la estocástica en la sociedad, organizaciones especializadas como el Instituto Internacional de Estadística (ISI, *International Institute of Statistics*), a través de su sección destinada a aspectos educativos denominada Asociación Internacional de Educación Estadística (IASE, *International Association for Statistical Education*), vienen desarrollando distintas iniciativas de promoción de la estadística. Entre ellas, desde el año 2002 asumen la responsabilidad del Proyecto Internacional de Alfabetización Estadística (ISLP, *International Statistical Literacy Project*), que hasta la actualidad a tenido como misión “apoyar, crear y participar en actividades de alfabetización estadística y promoverlas alrededor del mundo para jóvenes y adultos en todos los ámbitos de la vida” (Serradó, 2013, p. 24). Además, el IASE ha organizado distintas instancias de difusión sobre esta temática, como la sexta versión de la Conferencia Internacional de Enseñanza de la Estadística (ICOTS-6, *6th International Conference on Teaching Statistics*) celebrada el año 2006 en Ciudad del Cabo, Sudáfrica, cuyo tema fue *El desarrollo de una sociedad*

estadísticamente culta (*Developing a statistically literate society*), o el primer número del volumen 16 del año 2017 de la *Statistics Education Research Journal* (SERJ) destinado a la *Alfabetización Estadística*. Por tanto, destacamos a la estocástica como un componente cultural y a la habilidad de ser culto en esta materia como un campo de reflexión e investigación educativa (Molina-Portillo et al., 2019).

En este mismo sentido, instituciones como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) ha establecido que las bases principales que cimientan el futuro de la educación y las habilidades 2030 abarcan aspectos (1) *cognitivos*, donde se incluyen las habilidades numéricas (*numeracy*) y comunicacionales (*literacy*) necesarias para desarrollar la alfabetización digital y de los datos; (2) *saludables*, que abarcan la salud mental y física; y (3) *sociales o emocionales*, donde se considera a la ética y la moral. En el primero, relativo a las bases cognitivas, se ha conceptualizado con el término *alfabetización de datos* (*data literacy*) a la habilidad de extraer información relevante de los datos, es decir, a “la capacidad de leer, organizar, analizar y discutir los datos, demostrando que entienden su significado al leer adecuadamente gráficos, estableciendo conclusiones correctas y reconociendo cuando los datos han sido utilizados de manera inapropiada” (OCDE, 2019, p. 5). A su vez, en los últimos años, desde el IASE se ha impulsado el proyecto *CivicStat*, donde se ha conceptualizado dentro del marco de alfabetización estadística una sub-disciplina denominada *Estadística Cívica* (Engel, 2017; Nicholson et al., 2018; Ridgway et al., 2018), “que trata de aprender más sobre los procesos sociales, el bienestar social y económico y la realización de los derechos civiles” (Engel, 2019, p. 2).

Por tanto, más allá de la denominación utilizada, podemos notar que el dominio de la estocástica se ha establecido como una competencia elemental para la vida en las democracias modernas, donde los estudiantes deben ser educados para ocupar tanto el lugar de *productor de datos* (quienes producen, analizan y comunican datos en contextos de investigación) como *consumidor* (quienes consumen estos hallazgos como lectores, espectadores u oyentes en contextos sociales o profesionales). Por ello, en el ámbito educativo, se ha impulsado un movimiento reformista que incorpora a la enseñanza de la estocástica dentro del currículo escolar, aspecto en el que profundizaremos en el siguiente apartado.

Corriente Reformista en torno a la Enseñanza de la Estocástica en la Escuela

Como mencionamos previamente, la alta valoración que ha recibido la estocástica en los últimos años ha generado un movimiento de reforma curricular en torno a su enseñanza en la escuela. A esta corriente se han sumado un gran número de países que han incorporado

aspectos relativos a la enseñanza de la estocástica dentro del currículo de matemáticas, evolucionando desde edades tempranas con ideas básicas de la disciplina hasta culminar la trayectoria escolar con aspectos de inferencia estadística (Batanero y Borovcnik, 2016; Batanero, Burrill y Reading, 2011). Estos cambios han sido introducidos por diversas iniciativas curriculares internacionales, por lo que, para ilustrar esta situación de manera uniforme, adoptamos la denominación K-12 para organizar los doce años de educación obligatoria (1 al 12) y educación infantil (kindergarten).

Por ejemplo, en Estados Unidos a través de los *Principles and Standards for School Mathematics* propuestos por el *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), se menciona que hace más de 30 años se ha incorporado a la estocástica en los planes de estudios de matemática K-12. Sin embargo, dado que actualmente en este país no cuentan con un currículo único y nacional, durante los últimos años se han llevado adelante iniciativas de unificación, como las *Common Core State Standards Initiative* (CCSSI, 2020). Esta propuesta representa un acercamiento para plantear estándares nacionales, a los que cada estado puede adherirse voluntariamente. En ellos, se organiza la enseñanza de la estocástica en distintos ejes de contenido, denominados *Measurement & Data* (grados K-5) y *Statistics & Probability* (grados 6-12). Además, recomendaciones sobre la enseñanza de estos contenidos se detallan en documentos como las *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education* (GAISE) (Franklin et al., 2007).

A su vez, en España, tras la puesta en vigencia de la Ley Orgánica de Educación (LOE) el año 2006, se establece una nueva configuración del currículo de educación primaria (grados 1-6), secundaria (grados 7-10) y bachillerato (grados 11-12), donde se distingue entre asignaturas troncales, específicas y de libre configuración autonómica. En el caso del currículo de matemáticas, este se considera troncal y su última actualización fue implementada a través del Real Decreto 126/2014 (Ministerio de Educación Cultura y Deporte [MECD], 2014) donde se establecen las enseñanzas mínimas de la educación primaria (grados 1 al 6), incorporando aspectos de estocástica en el bloque denominado *Estadística y probabilidad* desde el primer curso (grado 1). Lo mismo ocurre en secundaria (grados 7-10) y bachillerato (grados 11-12), donde por medio del Real Decreto 1105/2014 (MECD, 2015) se incluyen los temas de estocástica en el bloque de *estadística y probabilidad* para la enseñanza común de las matemáticas (grados 7-12), como para las orientadas a las enseñanzas académicas y aplicadas (grados 9-10), y las aplicadas a ciencias sociales (grados 11-12).

Por otro lado, en Alemania desde el año 2004 la conferencia de ministros de educación y cultura (*Kultusministerkonferenz* [KMK]), donde participan todos los estados federados (*Länder*), ha propuesto nuevas recomendaciones para la enseñanza de las matemáticas en la

escuela. Estos estándares curriculares (*Bildungsstandards*) fueron diseñados para evaluar los aprendizajes al término de tres etapas educativas: primaria (grados 1 al 4) (*Primarbereich*; KMK, 2005), secundaria (grados 5 al 10) (*Hauptschulabschluss*; KMK, 2005a) y secundaria superior o *gymnasium* (grados 11-12 y a en ocasiones 13) (*Mittleren Schulabschluss*; KMK, 2004). En ellos se incorpora el aprendizaje de la estocástica en los bloques *Datos, frecuencias y probabilidad* (*Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit*) para grado 4 o *Datos y azar* (*Daten und Zufall*) para el grado 9 y 10 respectivamente.

Finalmente, en Chile desde el año 1998 se destinó un eje del marco curricular de matemática a la estadística y la probabilidad, pero fue en la actualización del año 2009 de este documento (Ministerio de Educación Chile [MINEDUC], 2009) donde se consideró dentro del eje *de datos y probabilidades* (para niveles 1 al 6) o *probabilidad y estadística* (para niveles 7 al 12), la enseñanza de la estocástica, avanzando progresivamente durante todo el recorrido escolar (MINEDUC, 2012, 2015). En este país, estaba prevista la implementación del nuevo currículo para los niveles 11-12 durante el año 2020 (MINEDUC, 2019), pero producto de la pandemia de la COVID-19 se estableció un currículo de emergencia que aplazó esta fecha para el año 2022 (MINEDUC, 2020).

En este nuevo panorama, podemos notar la presencia de la estocástica dentro de todos los grados de la educación escolar de numerosos países. Sin embargo, esta corriente reformista no solo promueve un adelanto y aumento de los temas de estocástica en el currículo de matemáticas, sino que además incentiva el desarrollo del razonamiento estocástico, entendiendo a la disciplina desde una perspectiva pragmatista para la resolución de problemas y no únicamente como una colección de procedimientos o técnicas. En este contexto, se identifica un problema con que los contenidos de estocástica sean parte del currículo de matemáticas, ya que ambas disciplinas buscan desarrollar distintos modos de razonamiento en los estudiantes (delMas, 2004; Pfannkuch y Wild, 2004). Por ejemplo, Pfannkuch y Wild (2004) afirman que “en matemáticas un contraejemplo refuta una conjetura, mientras que en estadística un contraejemplo (un caso particular) no refuta una teoría de la tendencia del grupo” (p. 35). Más aún, los autores aseguran que una persona matemáticamente educada puede ser estadísticamente analfabeta. De esta forma, las actualizaciones curriculares no solo han incrementado las expectativas de aprendizaje respecto a la enseñanza de la estocástica, sino que además han remarcado la necesidad de analizar y fortalecer la formación de quienes tienen la tarea de enseñar estocástica en la escuela, es decir, profesores de matemática.

Necesidad de Fortalecer la Formación de Profesores para Enseñar Estocástica

El éxito de los nuevos programas u orientaciones curriculares depende fuertemente de la formación de quienes tienen la tarea de su implementación, ya que los profesores de matemática “son la fuerza impulsora de la reforma en educación estadística” (Ben-Zvi y Makar, 2016a, p. 6), por ser los responsables de adaptar e interpretar los nuevos requerimientos según las características y condiciones institucionales y de sus estudiantes. Sin embargo, en las escuelas, estos profesores a menudo ven la estocástica como un capítulo marginal en el currículo de matemáticas y por lo tanto minimizan su enseñanza a realizar cálculos y demostrar propiedades, o simplemente ignoran su enseñanza (Batanero, 2009). Además, Batanero, Burrill y Reading (2011a) aseguran que muchos profesores consideran que no están bien preparados para enseñar estadística ni para afrontar las dificultades de sus estudiantes.

En este contexto, se resalta el desafío de quienes diseñan e implementan las asignaturas que son parte del currículo de la formación de profesores, donde es necesario incorporar procesos de reflexión acerca de la naturaleza, rol y propósito de la estocástica, ya que “a pesar de los esfuerzos de reforma, muchos cursos de estadística a nivel universitario todavía enseñan la misma progresión de contenidos y enfatizan el mismo desarrollo de habilidades y procedimientos” (Ben-Zvi y Makar, 2016a, p. 3). Esta situación se ha posicionado a la formación de profesores se ha establecido como un tema de interés para la comunidad científica, siendo un tópico cada vez más reportado en *libros especializados o handbooks* (Batanero et al., 2011b, 2016; Batanero y Borovenik, 2016; Batanero y Chernoff, 2018; Ben-Zvi, Makar, et al., 2018; Ben-Zvi y Makar, 2016b; Burrill y Ben-Zvi, 2019; Eichler y Zapata-Cardona, 2016; Franklin et al., 2015; Ruz, Olivares, et al., 2018), siendo destacado como un aspecto fundamental para promover mejoras en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estocástica. Por tanto, consideramos que cobra actual relevancia una investigación orientada al estudio de algunos aspectos de la formación estocástica de los profesores de matemáticas, que en esta oportunidad se centra en la realidad chilena.

La Formación de Profesores de Matemáticas en Chile

La formación del profesorado de matemática se ofrece usualmente según dos modelos, el denominado *consecutivo*, donde a la formación disciplinar le sucede en el tiempo la didáctica y pedagógica, o el *concurrente*, donde estas convergen simultáneamente en una misma carrera (Valle y Jesús, 2011). En el caso de Chile, se sigue una modalidad mixta ofreciendo ambas alternativas, la primera a través de programas de prosecución de estudios de uno o dos años para personas tituladas, o a través de un programa regular de nueve a diez semestres

denominado usualmente *pedagogía en matemáticas* (OCDE, 2014; Tatto et al., 2012). De esta forma, tras superar alguno de los procedimientos descritos, los profesores están habilitados para enseñar matemáticas en la escuela, principalmente entre los grados 7 a 12 (12-18 años) en este país.

Este proceso formativo es regulado por el MINEDUC a través del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (CPEIP). No obstante, las instituciones formadoras son autónomas en la formulación de sus propios planes de estudio, generando una variada gama de asignaturas que articulan el perfil profesional del profesor de matemática que promueven. Para el curso académico 2020, cerca de 30 universidades ofrecen el grado de profesor de matemática (www.cned.cl), por lo que pueden proyectarse la variedad de posibilidades que entrega el país para formar estos profesionales. Por ejemplo, en cuanto a la formación estocástica, los programas *consecutivos* no incluyen formación disciplinar específica, sino que se centran en aspectos pedagógicos y didácticos relativos a la enseñanza de la matemática, sin destinar tiempo específico a la estocástica. Mientras que en los programas *concurrentes*, los futuros profesores experimentan entre una o tres asignaturas sobre el tema, donde se acostumbra seguir una cronología similar a la planificada dentro del currículo escolar (iniciar con aspectos de estadística descriptiva, para luego introducir las probabilidades y finalizar con elementos de inferencia estadística), profundizando en mayor o menor medida según el tiempo disponible.

Por ello, desde el año 2016 las autoridades chilenas organizan anualmente la dominada Evaluación Nacional Diagnóstica (END) dirigida a todos los estudiantes para profesor que se encuentren en los doce meses anteriores al egreso, con el objetivo de diagnosticar la formación de los nuevos docentes y generar información útil para los programas académicos (CPEIP, 2018). Esta evaluación abarca tanto los conocimientos pedagógicos como disciplinarios-didácticos relativos a la enseñanza de las matemáticas, según los requisitos establecidos en los *Estándares orientadores para Carreras de Pedagogía en Educación Media* (MINEDUC y CPEIP, 2012b) y en las últimas versiones los temas sobre geometría y estocástica han sido los más descendidos (CPEIP, 2017, 2018, 2019; Rodríguez, Vásquez y Rojas, 2019).

En síntesis, hasta este punto, hemos establecido a la estocástica como un componente cultural, que ha impulsado una corriente reformista mundial entorno su enseñanza en la escuela. En este nuevo panorama, destacamos a los profesores de matemática como principales responsables en la implementación de las nuevas reformas, quienes han demostrado no contar con las competencias suficientes para llevar adelante esta labor (Groth y Meletiou-Mavrotheris, 2018). De esta forma, nos acercamos a identificar a los sujetos de interés central de esta investigación, futuros profesores de matemática y a describir su proceso de formación inicial

en Chile. Por tanto, en la siguiente sección revisaremos las principales perspectivas teóricas sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, con las cuales esperamos establecer las bases conceptuales para profundizar en las propuestas que han sistematizado el conocimiento del profesor para enseñar estocástica.

Perspectivas Teóricas sobre el Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas

La formación de profesores de matemática es un proceso complejo, donde se espera que los futuros docentes puedan desarrollar los conocimientos necesarios para desempeñar su quehacer profesional, como dominar las matemáticas a enseñar, ser competentes en su enseñanza y aprender de sus prácticas (Strutchens et al., 2017). En este sentido, Ponte y Chapman (2016) identifican la naturaleza de las tendencias actuales de la investigación sobre formación de profesores de matemática, por medio de una revisión sistemática de la literatura entre 2006 y 2013. Los autores destacan que el panorama de la investigación ha centrado su interés en estudiar y promover tanto el conocimiento de las matemáticas como de su enseñanza, en el marco del desarrollo de la identidad profesional de los futuros profesores de matemática, durante su proceso de formación inicial.

No obstante, si bien hay cierto consenso en los aspectos principales a considerar, se ha observado que no existe un acuerdo colectivamente aceptado en la manera de caracterizar el conocimiento profesional de los profesores para enseñar matemáticas (Giacomone, 2018; Mason, 2016). Entre las distintas aproximaciones desarrolladas, se destacan aspectos relativos al conocimiento del contenido (conceptos matemáticos), al conocimiento pedagógico (relativo a la educación, la enseñanza y el aprendizaje en general) y al conocimiento didáctico (condiciones y mecanismos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas) (Winslow y Durand-Guerrier, 2007). Por tanto, en lo que sigue profundizaremos en esta situación, revisando los principales aportes realizados en el marco de la educación matemática, que han establecido los cimientos para describir el conocimiento profesional del profesor de estocástica, aspecto que abordaremos posteriormente.

Comenzamos destacando los aportes de Shulman (1986, 1987), que representan la piedra angular de la mayoría de las aproximaciones desarrolladas hasta la fecha, en la descripción de distintos tipos conocimiento necesarios en la enseñanza. En Shulman (1986), el autor sugiere distinguir entre tres categorías de conocimiento:

- *Conocimiento del contenido (Content Knowledge)*: Representa el dominio de la disciplina a enseñar, que va más allá de manejar conceptos, abarcando principalmente los fundamentos que justifican su enseñanza.

- *Conocimiento del contenido pedagógico (Pedagogical Content Knowledge)*: Representa una forma particular de conocimiento del contenido que incorpora aspectos más relacionados con su enseñanza.
- *Conocimiento curricular (Curricular Knowledge)*: Representa el manejo de las distintas alternativas curriculares disponibles para la instrucción, en el contexto donde se enmarque la enseñanza.

Entre estas categorías, destacamos a las dos primeras como las principales impulsoras de la diferenciación del conocimiento profesional del profesor, sobre el contenido en sí mismo y el referido a su enseñanza, que han generado gran aceptación en el campo (Mason, 2016; Ponte y Chapman, 2016). Posteriormente, Shulman (1987) evoluciona su propuesta en torno a siete categorías que representan el conocimiento base del profesor para la enseñanza (Shulman, 1987, p. 8):

- *Conocimiento del contenido.*
- *Conocimiento pedagógico general*, que considera aquellos principios y estrategias generales del manejo y organización de la clase, que trascienden a la asignatura.
- *Conocimiento del currículo*, referido a un especial manejo de los recursos (materiales y programas) que sirven como herramientas para el quehacer profesional del profesor.
- *Conocimiento del contenido pedagógico*, es decir, esa amalgama entre el contenido y la pedagogía que es única de los profesores; es esa forma especial de entendimiento de la profesión docente.
- *Conocimiento de los estudiantes y sus características.*
- *Conocimiento de los contextos educacionales*, que varían desde el funcionamiento de la clase, la gestión y financiamiento de los centros escolares, hasta el carácter de las comunidades y culturas; y
- *Conocimiento de las finalidades educativas* (objetivos y valores de enseñanza) y de sus fundamentos histórico-filosóficos.

Finalmente, gracias al impacto que ha generado la diferenciación de un conocimiento específico del profesor, es que a los trabajos de Shulman (1986, 1987) se le denominan usualmente como Modelo PCK (*Pedagogical Content Knowledge*). Además, debido principalmente a la amplitud de la perspectiva propuesta por Shulman, es que en las últimas décadas se han desarrollado distintas aproximaciones teóricas para describir concretamente el conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

Por otro lado, los aportes de Ponte destacan que en la formación y desarrollo profesional del profesor se distinguen dos dimensiones estrechamente ligadas, respecto a su identidad (los valores fundamentales de la profesión docente) y conocimiento o competencia profesional (Ponte y Oliveira, 2002). En este sentido, para la diversidad de conocimientos profesionales del profesor de matemáticas, el autor se interesa en lo referido a su práctica profesional, que denomina como *conocimiento didáctico*. Por ello, propone un modelo (

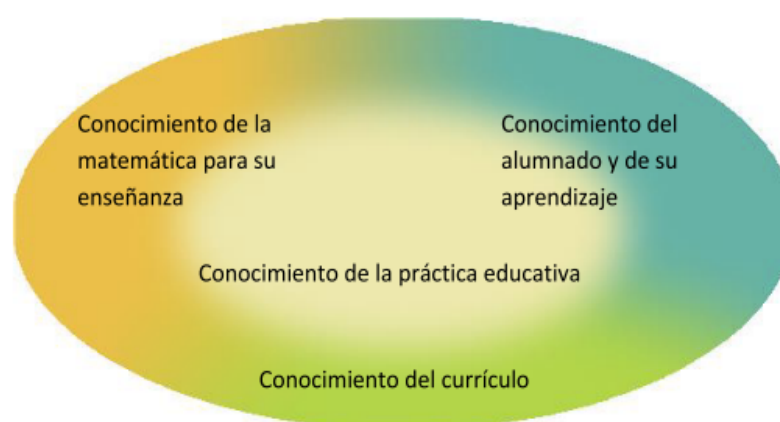
Figura 1) donde ubica a la práctica educativa (*instructional knoweldge*) en el núcleo central, apoyada en otras tres dimensiones.

En su propuesta, el autor es enfático en asegurar que “este modelo no concibe la posibilidad de separar unas dimensiones de otras, y aunque las procura diferenciar, subraya que todas ellas están siempre de algún modo presentes en la actividad del profesorado cuando enseña matemáticas” (Ponte, 2012, p. 89). En este contexto, entiende cada de ellas según:

- Conocimiento de la práctica educativa, que representa el núcleo del conocimiento didáctico, donde se incluye la planificación y gestión de la actividad en el aula.
- Conocimiento de la matemática para su enseñanza, entendido como una reinterpretación de las matemáticas para hacerlas materia de enseñanza.
- Conocimiento del alumnado y de su proceso de aprendizaje, que abarca los procesos de aprendizaje de los estudiantes y sus dificultades cognitivas, así como los fenómenos de diferenciación y afirmación cultural.
- Conocimiento (y gestión) del currículo.

Figura 1

Dimensiones del conocimiento didáctico



Fuente. Ponte (2012, p. 88)

Por otro lado, Mishra y colaboradores (Koehler et al., 2014; Mishra y Koehler, 2008) han desarrollado el Modelo de Conocimiento Tecnológico, Pedagógico y del Contenido (TPACK, *Technological Pedagogical and Content Knowledge*), sobre la base del modelo PCK propuesto por Shulman, donde se considera explícitamente el papel que el conocimiento tecnológico puede aportar en una enseñanza efectiva. En su propuesta, los autores reconocen tres dimensiones de conocimiento del profesor que interactúan entre sí, respecto al contenido, la pedagogía y la tecnología, como se muestra en la Figura 2.

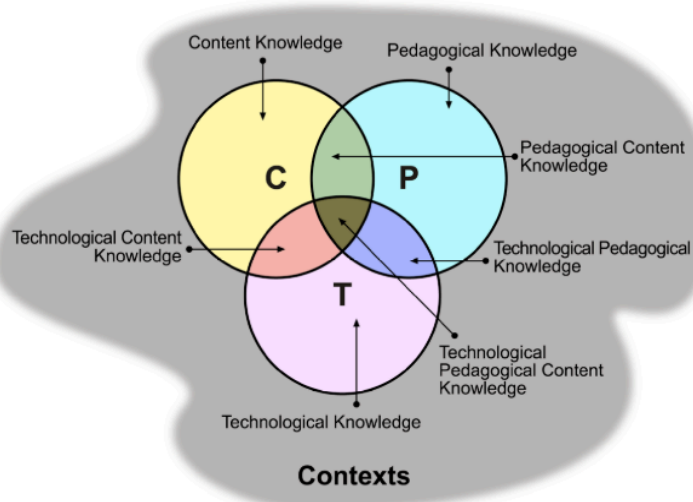
Según Koehler et al. (2014, p. 102), cada una de las tres dimensiones del modelo TPACK se definen como:

- Conocimiento del Contenido (C) referido al conocimiento de la disciplina que es objeto de enseñanza para el profesor.
- Conocimiento Pedagógico (P) entendido como el conocimiento sobre distintas prácticas instruccionales, estrategias y métodos para promover el aprendizaje de los estudiantes.
- Conocimiento Tecnológico (T) que abarca el conocimiento sobre tecnologías tradicionales y modernas que puedan ser integradas en el diseño instruccional.

Además, reconocen la existencia de cuatro nuevos conocimientos que surgen de la interacción entre las dimensiones anteriores y se definen como:

Figura 2

Componentes del Modelo TPACK



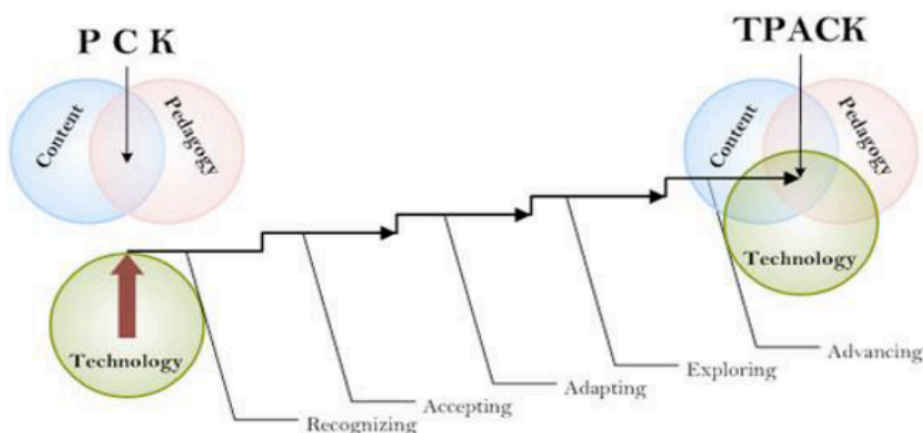
Fuente. Mishra y Koehler (2008, p. 3)

- Conocimiento del Contenido Tecnológico (TCK, *Technological Content Knowledge*) referido al conocimiento del impacto, ventajas y desventajas que pueden provocar el uso de tecnología en la enseñanza del contenido.
- Conocimiento del Contenido Pedagógico (PCK) entendido como una transformación del conocimiento del contenido para hacerlo objeto de enseñanza, según la perspectiva de Shulman (1986).
- Conocimiento de las Tecnologías para la Enseñanza (TCK, *Technological Pedagogical Knowledge*) se refiere a la comprensión de las tecnologías que puedan potenciar o restringir prácticas pedagógicas específicas.
- Conocimiento del Tecnológico, Pedagógico y del Contenido (TPACK, *Techonological, Pedagogical, and Content Knowledge*), corresponde a la intersección de las tres dimensiones principales del modelo (Figura 2). Este conocimiento implica la comprensión de cómo estas tres dimensiones interactúan y se potencian entre sí, para el desarrollo de una enseñanza efectiva con el uso de tecnologías.

Al igual que el modelo PCK, la propuesta del TPACK es generalista en la enseñanza de cualquier contenido, pero ha sido bien valorada en el campo de las matemáticas (Crompton, 2015; Grandgenett, 2008; Lee y Hollebrands, 2008; Niess, 2005; Niess et al., 2009). En este sentido, Niess et al. (2009) concluyen que los profesores de matemáticas al integrar el TPACK en su quehacer profesional (gestión del currículo y la evaluación, el aprendizaje, la enseñanza y el acceso a los recursos), experimentan un proceso de cinco etapas progresivas (Figura 3).

Figura 3

Niveles TPACK en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas



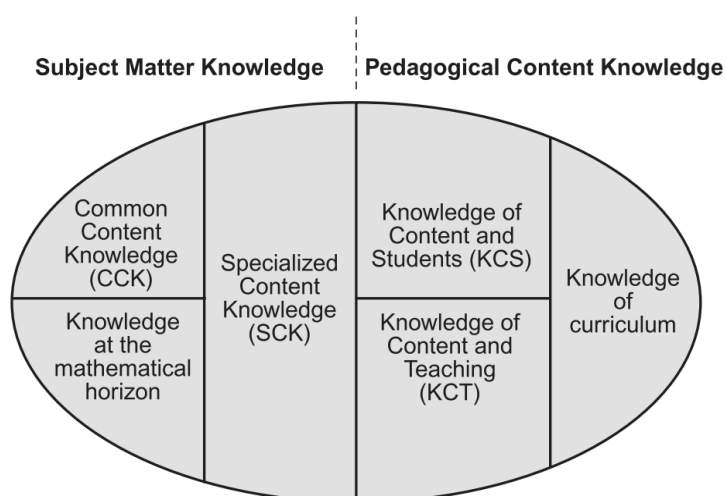
Fuente. Niess et al. (2009, p. 9)

- Reconocimiento (*Recognizing*) del potencial de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, pero aun no la integran en sus diseños instruccionales.
- Aceptación (*Accepting*) al uso de recursos tecnológicos en la enseñanza.
- Adaptación (*Adapting*) de las prácticas para permitir la incorporación de recursos tecnológicos.
- Exploración (*Exploring*) y uso de recursos tecnológicos que se integran activamente en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
- Recomendación (*Advicing*), donde los profesores evalúan los resultados de integrar tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Por otro lado, en el marco del proyecto LMT (*Learning Mathematics for Teaching*), Ball y colaboradores (Ball et al., 2008; Hill et al., 2008) han desarrollado un Modelo sobre el Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT, *Mathematical Knowledge for Teaching*), entendido como el “conocimiento matemático necesario para realizar la recurrente tarea de enseñar matemáticas a los estudiantes [...], en términos de los hábitos que importan para una enseñanza efectiva de la disciplina” (Ball et al., 2008, p. 399). En este sentido, basados en la estructura del modelo PCK, en el MKT se distinguen dos dimensiones que caracterizan el conocimiento profesional del profesor de matemática, una relativa al conocimiento matemático (*Subject Matter Knowledge*) y otra al conocimiento pedagógico del contenido (*Pedagogical Content Knowledge*), como se muestra en la Figura 4.

Figura 4

Mapa de conocimientos matemáticos para la enseñanza



Fuente. Hill et al. (2008, p. 377)

En cuanto a la dimensión sobre el conocimiento de las matemáticas necesarias para su enseñanza, los autores distinguen entre tres componentes:

- Conocimiento común del contenido (CCK, *Common Content Knowledge*), representa el conocimiento de las matemáticas a enseñar, que permite valorar las respuestas de los estudiantes y los recursos disponibles para la enseñanza (Ball et al., 2008). Además, los autores aclaran que usan esta denominación para destacar que este conocimiento “se usa en el trabajo de la enseñanza de manera común con la forma en que se usa en muchas otras profesiones u ocupaciones que también usan las matemáticas” (Hill et al., 2008, p. 377).
- Conocimiento en el horizonte matemático (KMH, *Knowledge at the mathematical horizon*), corresponde a la capacidad de tomar “conciencia de cómo se relacionan los temas matemáticos a lo largo de los temas incluidos en el plan de estudios” (Ball et al., 2008, p. 403). Este conocimiento permite al profesor vincular y conectar la enseñanza con temas que van más allá del nivel educativo donde se enseñe (Ball y Bass, 2009).
- Conocimiento especializado del contenido (SCK, *Specialized Content Knowledge*), que permite a los profesores realizar “tareas de enseñanza, que incluyen cómo representar con precisión ideas matemáticas, dominar explicaciones matemáticas para reglas y procedimientos comunes, y comprender métodos de solución inusuales a problemas” (Hill et al., 2008, pp. 377-378).

Respecto al conocimiento pedagógico del contenido, los autores asumen una perspectiva similar al PCK de Shulman, considerándolo una combinación especial entre conocimiento del contenido y la pedagogía en general, pero en el MKT esta dimensión se caracteriza entorno a tres componentes:

- Conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS, *Knowledge of Content and Students*), que corresponde a una interacción entre la comprensión de las matemáticas y la familiaridad con los estudiantes y su manera de razonar matemáticamente (Ball et al., 2008).
- Conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT, *Knowledge of Content and Teaching*), que requiere una interacción entre la comprensión de las matemáticas y de los problemas pedagógicos que afectan el aprendizaje en estudiantes (Ball et al., 2008).
- Conocimiento sobre el currículo (*Knowledge of Curriculum*), que corresponde al manejo de las directrices curriculares que organizan la enseñanza de las matemáticas en un contexto educativo determinado.

Por otro lado, Schoenfeld y Kilpatrick (2008) proponen un acercamiento provisional para conceptualizar aquellas habilidades que un profesor de matemáticas debe demostrar para que su enseñanza sea considerada de calidad, bajo la noción de proficiencia en la enseñanza de las matemáticas (*Proficiency in Teaching Mathematics*). Los autores, destacan siete dimensiones como potenciales descriptores de estas habilidades (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008, p. 322):

- Conocer las matemáticas escolares de forma amplia y profunda
- Reconocer a los estudiantes como pensadores
- Reconocer a los estudiantes como aprendices
- Crear y gestionar ambientes de aprendizaje
- Desarrollar normas que promuevan la interacción en el aula
- Establecer relaciones que apoyen el aprendizaje
- Reflexionar de la propia práctica

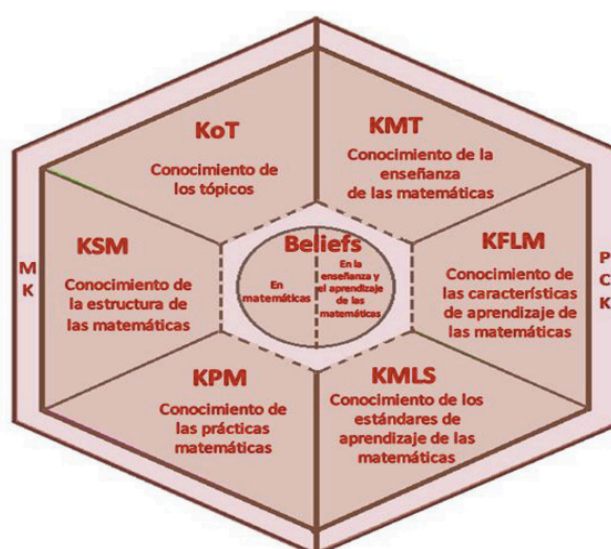
Estas dimensiones proporcionan un conjunto de objetivos para la formación del profesorado, que permiten entre otras cosas examinar el currículo de los profesores y sus prácticas de enseñanza (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008). Aunque Kilpatrick y Spangler (2015) destacan que estas componentes pueden variar según las aspiraciones e intereses personales y el énfasis de los programas de formación, sumado a la experiencia en la práctica profesional, que es donde estas aproximaciones cobran vida.

El modelo de Conocimientos Especializados del Profesor de Matemáticas (MTSK, *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*) (Carrillo et al., 2018, 2013; Escudero-Ávila et al., 2015), propone una reconfiguración del conocimiento matemático para la enseñanza propuesto por Ball et al. (2008) y una reinterpretación del conocimiento del contenido pedagógico de Shulman (1987), que se deriva de las matemáticas y no de la pedagogía en general (Carrillo et al., 2018). En este modelo, se distingue que la especialización del conocimiento del profesor no se ubica únicamente en su dominio del contenido (como en el modelo MKT), sino que se refiere a “cualquier conocimiento de índole matemática que el profesor pudiera requerir en su labor profesional” (Escudero-Ávila et al., 2015, p. 57). En decir, este conocimiento es especializado respecto a la enseñanza de las matemáticas (Carrillo et al., 2013).

Los componentes del modelo MTSK se presentan en la Figura 5, donde se distinguen dos dominios, referidos al Conocimiento matemático (MK, *Mathematical Knowledge*) y al Conocimiento didáctico del contenido (PCK, *Pedagogical Content Knowledge*).

Figura 5

Componentes del Modelo MTSK



Fuente. Escudero-Ávila et al. (2015, p. 56)

Además, ubican a las creencias, entendidas con el mismo significado que las concepciones, que ubican en el centro del modelo (Figura 5). En este modelo, el conocimiento matemático (MK) se divide en tres subdominios :

- Conocimiento de los temas matemáticos (KoT, *Knowledge of Topics*), referido al conocimiento del contenido en sí mismo, respecto a qué y en qué medida el profesor de matemáticas debe saber los temas que enseña.
- Conocimiento de la estructura de la matemática (KSM: *Knowledge of the Structure of Mathematics*), entendido como la comprensión de las conexiones que se pueden establecer entre los temas matemáticos para variar en su grado de complejidad según las organización curricular.
- Conocimiento de la práctica matemática (KPM: *Knowledge of Practices in Mathematics*), entendido como el “conocimiento de las formas de conocer y crear o producir en matemáticas, relativas a la comunicación matemática, el razonamiento y la prueba” (Escudero-Ávila et al., 2015, p. 58).

Desde la otra arista, este modelo complementa la propuesta de conocimiento pedagógico del contenido (PCK) de Shulman con el conocimiento matemático (MK), que organiza en torno a tres subdominios:

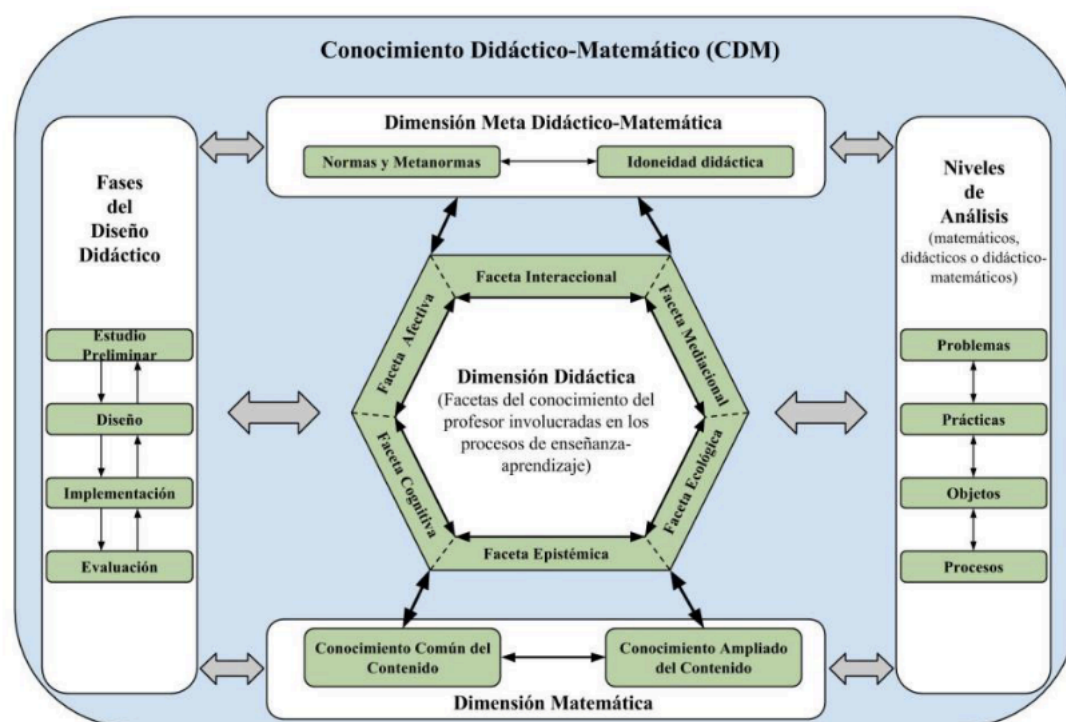
- Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT: *Knowledge of Mathematics Teaching*), que corresponde a los fundamentos teóricos (personales e institucionales) usados en el diseño de experiencias de aprendizaje de las matemáticas, que incluye conocer potenciales actividades y recursos de enseñanza, junto a sus limitaciones.
- Conocimiento de las características de aprendizaje de las matemáticas (KFLM: *Knowledge of Features of Learning Mathematics*) referido al “conocimiento de las características del proceso de aprehensión de los distintos contenidos por parte de los estudiantes” (Escudero-Ávila et al., 2015, p. 58).
- Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS: *Knowledge of Mathematics Learning Standards*), incluye el conocimiento del profesor sobre todo lo que el estudiante debe o puede lograr en un nivel particular, en combinación con lo estudiado previamente y las especificaciones para los niveles posteriores.

A su vez, sobre la base de las herramientas teóricas desarrolladas en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción matemáticos (EOS)(Godino et al., 2007), Godino y colaboradores (Godino, 2009; Pino-Fan et al., 2018; Pino-Fan y Godino, 2015) proponen un modelo de lo que denominan Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM) del profesor. En esta aproximación, los autores extienden e integran la conceptualización del conocimiento del contenido pedagógico (Shulman, 1987), el conocimiento matemático para la enseñanza (Ball et al., 2008) y la noción de proficiencia en la enseñanza de las matemáticas (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008). De esta forma, caracterizan el CDM del profesor en torno a tres dimensiones sobre aspectos matemáticos, didácticos y meta-didácticos, que intervienen en las distintas fases del diseño didáctico (estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación). En la Figura 6, se muestra una representación de las dimensiones y componentes del modelo CDM, junto a las posibles interacciones entre ellas.

La dimensión matemática, abarca lo relativo al conocimiento del contenido, que le permite al profesor resolver problemas matemáticos que se implementarán en el aula, vinculándolos con aquellos objetos matemáticos que surgen en niveles de estudio posteriores. En otras palabras, esta dimensión abarca el conocimiento matemático *per-se* (Godino et al., 2016) según dos componentes, entendidos como reinterpretaciones del conocimiento común (CCK) y en el horizonte matemático (KMH) del Modelo MKT, que corresponden al:

Figura 6

Dimensiones y componentes del modelo CDM



Fuente. Pino-Fan y Godino (2015, p. 103)

- Conocimiento Común del contenido, referido al conocimiento que se considera suficiente para resolver los problemas matemáticos propuestos en el currículo escolar. Es el conocimiento matemático compartido con estudiantes del nivel educativo donde se enseñe.
- Conocimiento Ampliado del contenido, que representa las bases matemáticas para vincular las estocásticas escolares con niveles educativos posteriores. En el caso de los profesores de matemática, es el conocimiento matemático desarrollado durante su formación inicial.

La dimensión didáctica, corresponde a una reinterpretación de las categorías del Modelo MKT, conformada por seis categorías sobre el conocimiento especializado del profesor para enseñar matemáticas, que interacrúan entre sí. Es decir, dada una tarea matemática determinada, el profesor debe ser capaz de movilizar la diversidad de significados que se ponen en juego (faceta epistémica) y también debe poder resolver la tarea utilizando distintos procedimientos, mostrando diversas justificaciones y explicaciones, o bien adaptarla a los conocimientos (facetas mediacional, interaccional y cognitiva) e intereses (faceta afectiva) de los alumnos, en un contexto determinado (faceta ecológica) (Godino et al., 2017, 2016).

La dimensión Meta didáctico-matemática, incluye el conocimiento requerido para que los profesores reflexionen sobre su propio desempeño, con la intención de evaluar y detectar posibles mejoras en el proceso de enseñanza de las matemáticas. Además, abarca el conocimiento de las normas o reglas que regulan dichos procesos, como de las condiciones y restricciones contextuales para la enseñanza (Pino-Fan et al., 2015). Por esta razón, Pino-Fan y Godino (2015) destacan que en el marco del EOS se han desarrollado criterios de idoneidad (Godino, 2013; Godino et al., 2013) para las seis facetas descritas previamente (dimensión didáctica del CDM), que ayudan a orientar y sistematizar la fase de evaluación reflexiva de las prácticas profesionales del profesor de matemáticas.

Posteriormente, Godino y cols. evolucionan su modelo articulando las nociones de conocimiento didáctico matemático (CDM) y de competencia de análisis didáctico, en el denominado Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor (Godino et al., 2017, 2016). En esta nueva perspectiva, los autores destacan una “competencia general de diseño e intervención didáctica, propia del profesor de matemáticas” (Godino et al, 2017, p. 98), que se sistematiza en torno a cinco sub-competencias:

- Competencia de análisis de significados globales, “necesaria en la fase preliminar del proceso de diseño instruccional, donde el objetivo es construir un modelo de referencia que delimite, para el contenido abordado, los tipos de problemas y las prácticas operativas y discursivas requeridas para su resolución” (Godino et al., 2016, p. 290).
- Competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas, que permitirá al profesor “comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los necesarios procesos de institucionalización y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos” (Godino et al., 2017, p. 99).
- Competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas, referida al problema de cómo enseñar un contenido específico. Involucra la capacidad de gestionar configuraciones didácticas, entendidas como “herramientas “para el análisis de las interacciones personales y materiales en los procesos de estudio matemático” (Godino et al., 2016, p. 291).
- Competencia de análisis normativo, referida al reconocimiento de las normas y meta-normas involucradas en el proceso de diseño didáctico, necesarias “para poder comprender el desarrollo de los procesos de estudio matemático y encauzarlos hacia niveles óptimos de idoneidad” (Godino et al., 2017, p. 100).
- Competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de los procesos de estudio matemáticos, que permite al profesor reflexionar sobre su práctica y proponer

mejoras progresivas según los resultados de la investigación. Por ello, “es imprescindible realizar una reconstrucción de los significados de referencia didáctica del tema correspondiente” (Godino et al., 2017, p. 102).

El detalle de cada una de estas sub-competencias requiere profundizar en la diversidad de herramientas teórico-metodológicas desarrolladas en el marco del EOS, que no son el interés de esta sección. Por ello, retomaremos estos fundamentos en el Capítulo 2, según fueron necesarios para el desarrollo de los distintos estudios de esta tesis doctoral.

Finalmente, en esta sección hemos profundizado en aquellos aportes que han generado mayor impacto en el campo de la educación estocástica de profesores, pero destacamos el amplio y diverso abanico de aproximaciones teóricas desarrolladas para conceptualizar el conocimiento profesional del profesor de matemáticas (Montes, Ribeiro y Carrillo, 2017). En este sentido, para profundizar en estas aportaciones, recomendamos la exhaustiva revisión realizada por Piñeiro (2019).

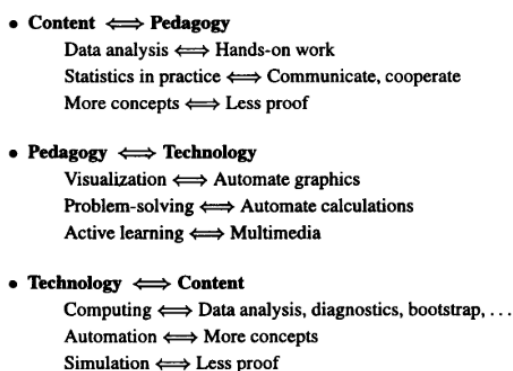
Perspectivas Teóricas sobre el Conocimiento Profesional del Profesor de Estocástica

En el campo de la educación estocástica, el desarrollo de propuestas teóricas que conceptualicen el conocimiento profesional del profesor ha sido menos prolífica que en el caso de la educación matemática (Batanero, 2009; Batanero et al., 2011a; Groth y Meletiou-Mavrotheris, 2018; Ponte y Noll, 2018). Por ello, sobre la base de los modelos revisados en la sección anterior, a continuación presentamos los principales aportes realizados en el campo para caracterizar el conocimiento profesional del profesor de estocástica.

Moore (1997) asegura que la naturaleza cambiante de la estadística exige mantener en constante revisión los contenidos que enseñamos y cómo los enseñamos, donde la tecnología cumple un rol primordial. Por ello, para lograr un cambio sustancial en la instrucción de estadística es necesario establecer fuertes *sinergias* entre contenido, pedagogía y tecnología. En su representación, el autor destaca el uso de flechas dobles para resaltar que la interacción bidireccional entre las dimensiones consideradas, como se muestra en la Figura 7.

Figura 7

Sinergia en Educación Estadística



Fuente. Moore (1997, p. 129).

Los trabajos de Godino, Batanero y colaboradores (Batanero et al., 2004; Batanero y Díaz, 2012; Godino et al., 1999, 2011, 2008) han tenido una longeva presencia en el campo. En sus primeros acercamientos, Godino, Batanero y Flores (1999) resaltan los principales aspectos que en esa época eran considerados adecuados para ser desarrollados en la formación inicial de los profesores de matemática, ejemplificando su aplicación en la enseñanza de nociones estocásticas elementales. En esta propuesta, se consideran tres aspectos (Godino et al., 1999, pp. 2-3):

- La reflexión sobre el significado de los objetos matemáticos particulares que se pretende enseñar, y el estudio de las transformaciones que experimentan los mismos para adaptarlos a los distintos niveles de enseñanza.
- El conocimiento de las dificultades, errores y obstáculos de los alumnos y sus estrategias en la resolución de problemas.
- La ejemplificación de situaciones didácticas, metodologías de enseñanza y recursos para temas específicos de la estocástica.

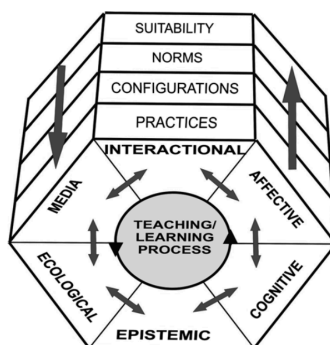
Además, los autores aseguran que “los conocimientos didácticos tendrían que ser contextualizados en situaciones significativas para los profesores en formación, pues la metodología de los cursos de preparación de profesores tiene que reflejar los principios metodológicos deseables en la propia acción didáctica de los profesores” (Godino et al., 1999, p. 3). Posteriormente, destacan los principales aspectos a considerar en el desarrollo de un adecuado conocimiento didáctico en la enseñanza de la estocástica que sintetizan en cinco componentes, de lo que denominan conocimiento pedagógico de la estadística (Godino et al., 2008):

- Epistemología (*epistemology*), referido a la reflexión epistemológica de la naturaleza del conocimiento estocástico, su desarrollo y evolución, como sus relaciones con otros dominios de las ciencias.
- Cognición (*cognition*), que abarca la capacidad de anteponerse a las dificultades y estrategias de los estudiantes al aprender estadística.
- Recursos y técnicas de enseñanza (*teaching resources and techniques*), que considera la experiencia de buenas prácticas para enseñar los temas de estocástica y utilizar herramientas didácticas. Además considera la capacidad crítica de analizar libros de texto y documentos curriculares.
- Afectos (*affect*), que engloban la capacidad de atraer el interés de los estudiantes, considerando sus actitudes y creencias sobre la estadística.
- Interacción (*interaction*), referida a la capacidad de crear una buena comunicación en el aula, utilizando a la evaluación como una forma de gestionar la instrucción.

Años más tarde, Godino et al. (2011) reorganizan su propuesta teórica según los avances de su modelo de conocimientos didáctico-matemáticos (CDM), aplicados al caso de la estadística. Para ello, destacan que un profesor de estadística necesita dominar distintos tipos de objetos (lenguajes, situaciones problema, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos) que surgen de la práctica de resolver problemas estadísticos, según el tema a enseñar. Además, resaltan que los procesos de enseñanza y aprendizaje involucran a un grupo de estudiantes, al profesor y algunos recursos didácticos, todos ellos interactuando dentro de un contexto institucional. Por tanto, los autores conceptualizan que el conocimiento profesional del profesor debe incluir distintas facetas o niveles necesarios para estudiar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la estadística, organizados según la Figura 8.

Figura 8

Facetas y niveles del conocimiento del profesor



Fuente. Godino et al. (2011, p. 278)

Las seis facetas que se observan en el hexágono inferior de la Figura 8 (epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica), corresponden a los mismos aspectos revisados previamente respecto al conocimiento especializado del profesor según el modelo CDM (Figura 6). Además, Godino et al. (2011) aseguran que los procesos de enseñanza y aprendizaje también pueden ser analizados desde cuatro niveles diferentes, donde interactúan las seis facetas anteriores, que proporcionan categorías adicionales para el conocimiento del profesor (p. 279):

- Prácticas (*practices*) didácticas y estadísticas, entendidas como acciones estadísticas realizadas por los estudiantes para resolver problemas, así como por el profesor para promover el aprendizaje y contextualizar el contenido.
- Configuraciones (*configurations*) de objetos y procesos estadísticos que emergen e intervienen en las prácticas descritas previamente.
- Normas (*norms*), reglas, hábitos y convenciones que condicionan y hacen posible el proceso de estudio y afectan cada faceta y sus interacciones.
- Idoneidad Didáctica (*didactical suitability*), entendida como una colección de criterios útiles para sistematizar y evaluar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

La principal diferencia en esta propuesta es la manera en que los autores organizan los potenciales niveles a analizar, pero con algunos matices de profundización son equivalentes entre ellos.

Por otro lado, Watson y colaboradores (Callingham et al., 2016; Callingham y Watson, 2011; Watson, 2001; Watson et al., 2008, 2009) han trabajado en conceptualizar el conocimiento profesional del profesor de estadística desde la perspectiva teórica del modelo PCK de Shulman, en lo que denominan Conocimiento Pedagógico del Contenido Estadístico (*Statistical PCK*). En sus primeros aportes, Watson (2001) establece un perfil profesional del profesor de estadística, entendido como “un marco para comunicar los logros y competencias de los profesores para enseñar los temas de datos y azar en el plan de estudios de matemáticas” (p. 306). En su propuesta, la autora propone un protocolo donde abarca múltiples dominios del conocimiento del profesor, incluida la autoeficacia y la confianza en la enseñanza de conceptos estadísticos; las creencias sobre el valor y el uso de las estadísticas; y el conocimiento del contenido pedagógico, para el cual utiliza respuestas de estudiantes al resolver problemas estadísticos.

Posteriormente, los autores profundizan en desarrollar una medida sobre el PCK aplicado a la estadística (Watson et al., 2008, 2009), destacando la necesidad de incluir no solo el conocimiento de las respuestas típicas de los estudiantes frente a problemas estadísticos, sino también las estrategias didácticas para afrontar potenciales obstáculos y dificultades que surjan

de su resolución. Por ello, proponen un instrumento desarrollado sobre la base de los resultados obtenidos en Watson (2001), cuya perspectiva teórica considera:

- La capacidad de predecir o anticipar las respuestas típicas de los estudiantes frente a problemas estadísticos.
- La capacidad de interacción de los profesores con respuestas de estudiantes reales al resolver problemas estadísticos.
- Las estrategias y oportunidades didácticas para enseñar los contenidos de estadística en clase.

Desde esta aproximación, las autoras han continuado el trabajo de probar empíricamente las principales componentes que caracterizan el PCK del profesor de estadística (Callingham y Watson, 2011) y su influencia en el aprendizaje de los estudiantes (Callingham et al., 2016). Por una parte, tras un análisis jerárquico de Rasch, Watson y Callingham (2011) identificaron cuatro niveles progresivos en el desarrollo del PCK aplicado a la estadística, en profesores:

- Nivel Conciente (*Aware level*): Refleja dificultades para identificar respuestas típicas de los estudiantes, mostrando una leve comprensión estadística.
- Nivel Emergente (*Emerging level*): Los profesores sugieren estrategias genéricas para la intervención en el aula, lo que implica una buena enseñanza pero no necesariamente en el contexto de la estadística.
- Nivel Competente (*Competent level*): Se sugieren algunas intervenciones estadísticamente apropiadas, pero solo en el trabajo con contenidos más familiares por su tradición en el currículo escolar, como los gráficos de barra.
- Nivel Completo (*Accomplished level*): Se exige la sugerencia de respuestas correctas e incorrectas de los estudiantes y una integración del contenido estadístico apropiado con estrategias de intervención didáctica centradas en el estudiante.

A su vez, Even y Kvatinsky (Even y Kvatinsky, 2010; Kvatinsky y Even, 2002) proponen un modelo sobre el conocimiento del contenido y la comprensión de las probabilidades, basados en un revisión de la literatura sobre el conocimiento profesional del profesor, y del rol de las probabilidades en matemáticas y en el currículo escolar. En su primera propuesta (Kvatinsky y Even, 2002), su modelo se compuso de siete aspectos interconectados, que posteriormente ajustaron a cinco (Even y Kvatinsky, 2010, pp. 208-210):

- Valor y cualidades esenciales de la teoría de probabilidad (*essential features and the strength of probability theory*).
- Aproximaciones a la probabilidad (*approaches to probability*).

- Capacidad de traducir y vincular diferentes representaciones (tablas, diagramas, fórmulas) y modelos de probabilidad (*probability representations and models*).
- Repertorio básico (*basic repertoire*) de ejemplos que ilustren conceptos, propiedades y teoremas importantes de los temas de probabilidad que son parte del currículo escolar.
- La naturaleza de la teoría de probabilidad (*the nature of probability theory*).

Por otro lado, los aportes de Burgess (Burgess, 2009, 2011, 2006, 2012) han identificado el conocimiento de profesores de primaria para enseñar estadística por medio de investigaciones, en lo que denominan Conocimiento del profesor sobre y para investigar estadísticamente (TKSI, *Teacher Knowledge of and for Statistical Investigations*). El autor destaca que gran parte de la investigación sobre el conocimiento del profesor se ha realizado fuera de la sala de clase, aun cuando este es el principal contexto donde dicho conocimiento se pone en práctica (Burgess, 2006). Además, reconoce que si bien la enseñanza escolar de la estadística se aloja usualmente en el currículo de matemáticas, ambas disciplinas requieren desarrollar distintos modos de pensar y razonar (Burgess, 2009). Por ello, su aproximación se construye a partir de la interacción entre algunas de las componentes sobre el conocimiento del profesor del modelo MKT (Ball et al., 2008) aplicado a la estadística, y algunas dimensiones del modelo sobre pensamiento estadístico en investigaciones empíricas (*Statistical thinking in empirical enquiry*) de Wild y Pfannkuch (1999). En la Figura 9, se muestran concretamente los elementos considerados por el autor, junto a la manera en que interactúan entre ellos, aspectos en los que profundiza en Burgess (2011, 2012).

Figura 9

Componentes del conocimiento del profesor en relación a la investigación estadística

		Statistical knowledge for teaching			
		Content knowledge		Pedagogical content knowledge	
		Common knowledge of content (CKC)	Specialised knowledge of content (SKC)	Knowledge of content and students (KCS)	Knowledge of content and teaching (KCT)
Thinking	Need for data				
	Transnumeration				
	Variation				
	Reasoning with models				
	Integration of statistical and contextual				
Investigative cycle					
Interrogative cycle					
Dispositions					

Fuente. Burgess (2006, p. 4).

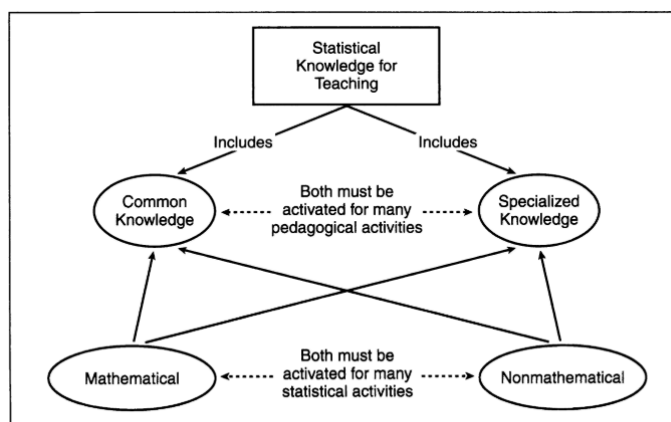
Previamente, hemos revisado cada una de las componentes del modelo MKT (Figura 4) por lo que ahora nos detendremos únicamente en los elementos característicos del pensamiento estadístico, los ciclos de cuestionamiento e investigación y la disposición, propuestos por Wild y Pfannkuch (1999):

- Necesidad de los datos (*Need for data*): Valoriza la utilidad de recoger datos en situaciones donde la experiencia personal y la evidencia anecdótica es deficiente para tomar decisiones.
- Transnumeración (*Transnumeration*): Proceso de transformación de los datos en alguna representación que facilite su comprensión.
- Variación (*Variation*): Característica omnipresente de la estadística, donde se centra el interés en su medición, modelación, explicación, predicción y control.
- Razonamiento con Modelos (*Reasoning with models*): Todo modo de pensamiento involucra modelos y en el caso de la estadística sus modelos emergen de las matemáticas y su principal característica es que incluyen componentes aleatorios.
- Integrar la estadística y el contexto (*Integration of statistical and conxtual*): Capacidad de conectar el contexto con los resultados para llegar a extraer significado de los datos.
- Ciclo de Cuestionamientos (*Interrogative Cycle*), diálogo con el problema y los datos.
- Ciclo de Investigación (*Investigative Cycle*) o Ciclo PPDAC (Problema, Planificación, Datos, Análisis y Conclusiones)
- Disposiciones (*Dispositions*) que condicionan, afectan o impulsan el tránsito entre las demás componentes del modelo. Incluye aspectos como el escepticismo, imaginación, curiosidad, compromiso y perseverancia.

Paralelamente, los trabajos de Groth (Groth, 2007, 2012, 2013) proponen que la formación disciplinar del profesor de estadística no debería separarse de aquella destinada a su enseñanza, sino que deberían promoverse conjuntamente en el desarrollo de un conocimiento estadístico para la enseñanza (SKT, *Statistical Knowledge for Teaching*), conceptualizado desde la perspectiva del Modelo MKT. En su propuesta, Groth (2007) destaca que el SKT incluye dos tipos de conocimiento del contenido, común o especializado según el modelo MKT, que a su vez pueden ser de naturaleza matemática o ser propios de la estadística, como se muestra en la Figura 10.

Figura 10

Estructura hipotética del conocimiento estadístico para la enseñanza

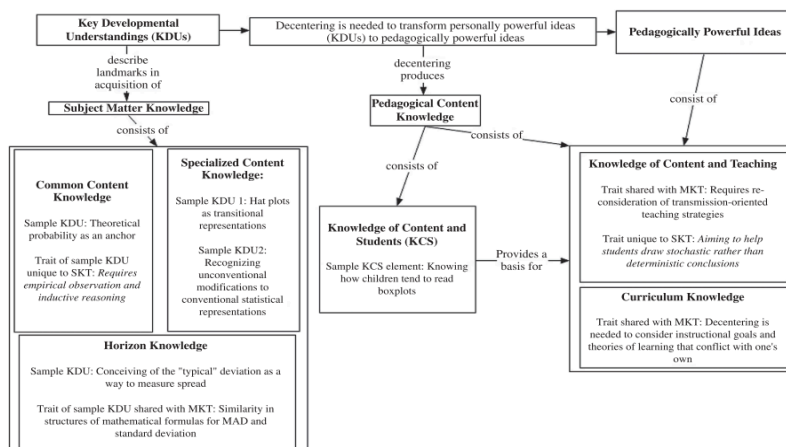


Fuente. Groth (2007, p. 429)

Posteriormente, en Groth (2012) mantiene la idea de que el MKT y el SKT no son equivalentes, por lo que propone una reformulación de su modelo anterior, donde se incluyen las demás componentes del modelo MKT (Groth, 2013). Según el autor, su propuesta intenta ir más allá de aplicar dichas componentes al caso de la estadística, por lo que incorpora también las nociones de KDUs (*Key Developmental Understandings*) propuesta por Simon (2006) e Ideas Pedagógicamente poderosas (*Pedagogically powerful ideas*) utilizada por Silverman y Thompson (2008). Su propuesta establece una estructura teórica del SKT e hipotetiza las relaciones potenciales entre sus distintas componentes (Figura 11).

Figura 11

Elementos y estructura hipotética del desarrollo del SKT



Fuente. Groth (2013, p. 143)

En su propuesta refinada, Groth (2013) se une a la tendencia general y reconoce dos amplias categorías del conocimiento del profesor, relativas al contenido (*Subject Matter Knowledge*) y al conocimiento pedagógico del contenido (PCK). En este sentido, el autor sintetiza su aproximación asegurando que los tres rectángulos en la parte superior de la (Figura 11) ilustran que las KDUs deben transformarse en ideas pedagógicamente poderosas a través del mecanismo de descentralización (*decentering*), es decir, ver las cosas desde la perspectiva de los estudiantes. La rama vertical en el extremo izquierdo, sugiere que se pueden identificar KDUs específicas utilizando las categorías de conocimiento del contenido común, especializado y en el horizonte del modelo MKT, que ejemplifica con contenidos específicos. La flecha que se extiende desde el centro inferior del modelo, sugiere que la descentralización es necesaria para el desarrollo del PCK, porque dicho conocimiento implica hacer que el tema sea comprensible para otros. Por ello, las categorías sobre el PCK del modelo MKT se incluyen para identificar ejemplos de este tipo de conocimiento. Por una parte, el conocimiento del contenido y la enseñanza y el conocimiento del currículo, se representan como categorías de ideas pedagógicamente poderosas, ya que dicho conocimiento implica tener estrategias específicas del contenido para ayudar a los estudiantes a desarrollar KDUs. Mientras que el conocimiento del contenido y de los estudiantes se posiciona como una base potencial para la formación de dichas ideas pedagógicamente valiosas.

Otros autores que han usado las herramientas del modelo MKT en el caso de la estadística, se han interesado en su aplicación respecto a algún tema específico (González, 2016; Leavy, 2015; Noll, 2011). Por ejemplo, Noll (2011) aplica las componentes de conocimiento común y especializado del contenido sobre el muestreo y la distribución muestral, según el modelo MKT (Figura 4). La autora hace una reinterpretación de estas componentes, que asocia con las nociones de alfabetización y pensamiento estadístico (*statistical literacy and thinking*) respectivamente. A su vez, Leavy (2015) describe el proceso involucrado en la planificación y enseñanza de lecciones sobre el manejo de datos, según las etapas del estudio de clases japonés (Mena, 2007). En este contexto, la autora aplica cuatro componentes del modelo MKT (conocimiento común y especializado del contenido, conocimiento del contenido y los estudiantes, y de la enseñanza) como principales descriptores del conocimiento del profesor que emergen en el proceso de estudio de clases. Mientras que González (2016) propone una nueva conceptualización del SKT, donde además de considerar las seis componentes del modelo MKT, incluye las creencias de los profesores sobre la estadística y su enseñanza, y sus concepciones sobre la noción de variabilidad (*variability*), que entiende como una “propiedad de un objeto estadístico que explica su propensión a variar

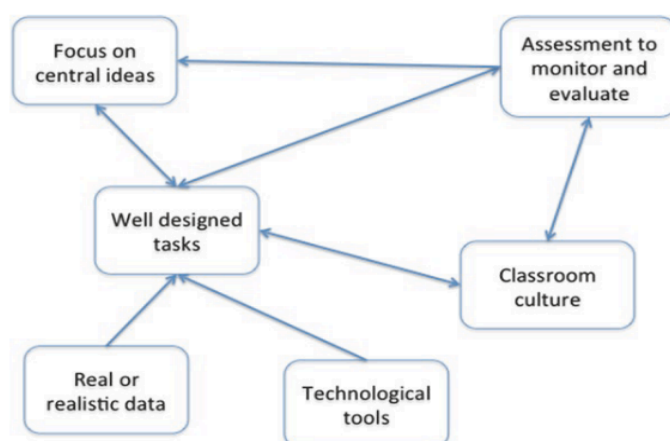
o cambiar” (González, 2016, p. 315). El autor, destaca que la caracterización del conocimiento requerido para enseñar estadística de manera eficiente debe estar estrechamente ligada al modelo MKT, donde es necesario redefinir algunas componentes, y considerar a las creencias.

Los trabajos de Garfield, Ben-Zvi y colaboradores (Ben-Zvi, Gravemeijer y Ainley, 2018; Garfield y Ben-Zvi, 2008a, 2008b, 2009; Pfannkuch y Ben-Zvi, 2011) sobre los conocimientos y competencias que el profesor necesita para enseñar estadística se construyen desde la base de su propuesta sobre Entornos de Aprendizaje del Razonamiento Estadístico (SRLE, *Statistical Reasoning Learning Enviroment*). En términos simples, los SRLE representan un aula de estadística efectiva e integral, donde se desarrolla en los estudiantes una comprensión profunda y significativa del contenido, promoviendo su capacidad de pensar y razonar estadísticamente (Ben-Zvi et al., 2018; Garfield y Ben-Zvi, 2008a, 2009). Por ello, en el marco del diseño de asignaturas de formación inicial y desarrollo profesional, los autores organizan sus propuestas en base a seis principios para el diseño de SRLE, asegurando que “es importante que los maestros experimenten este tipo de ambientes de aprendizaje cuando son alumnos, como una forma de alentarlos a usar este mismo tipo de enfoque en sus aulas” (Garfield y Ben-Zvi, 2008b, p. 5).

Estos principios instruccionales se inspiran en los propuestos por Cobb y McClain (2004), que los autores sistematizan en seis dimensiones interconectadas como se muestra en la Figura 12, definidas como (Garfield y Ben-Zvi, 2008b, p. 1).

Figura 12

Red de dimensiones interrelacionadas de SRLE



Fuente. Ben-Zvi et al. (2018, p. 489)

- Desarrollar ideas estadísticas centrales (*Focus on central ideas*), en lugar de presentar un conjunto de herramientas y procedimientos. Estas ideas abarcan las nociones de dato, distribución, variabilidad, centro, aleatoriedad, covariación y muestreo.
- Usar datos reales (*Real o realistic data*) y motivantes para comprometer a los estudiantes en el establecimiento y prueba de conjeturas.
- Usar tareas y actividades de clase que apoyen el desarrollo del razonamiento en los estudiantes (*Well designed tasks*).
- Integrar el uso de recursos y herramientas tecnológicas (*Technological tools*) que permitan al estudiante probar sus conjeturas, explorar y analizar datos, y desarrollar su razonamiento estadístico.
- Promover un discurso en el aula que incluya argumentos estadísticos basados en las ideas centrales (*Classroom culture*).
- Usar la evaluación para aprender qué saben los estudiantes y monitorear el desarrollo de su aprendizaje estadístico, así como para evaluar las planificaciones y su progreso (*Assessment to monitor and evaluate*).

Por su parte, los trabajos de Wassong y Biehler (Wassong y Biehler, 2010, 2014) desarrollan un modelo de conocimientos y competencias profesionales del profesor de estadística, diseñado según el dominio de los tipos de conocimiento identificados en el modelo TPACK (Mishra y Koehler, 2008) y MKT (Ball et al., 2008), aplicados a la estadística (Wassong y Biehler, 2010). El interés principal de estos autores, es el diseño de instancias virtuales de desarrollo profesional para profesores de matemática que enseñan estadística en las escuelas alemanas. Por ello, en Wassong y Biehler (2014) sintetizan en cuatro facetas los principales conocimientos y competencias promovidas en su propuesta de enseñanza, que considera:

- Conocimiento común y práctico del contenido (*Common and practice oriented content knowledge*), que representa el conocimiento estadístico necesario para abordar los temas escolares y prepararlos para su enseñanza.
- Conocimiento pedagógico y del contenido sobre el currículo (*Content and pedagogical knowledge of curriculum*).
- Conocimiento pedagógico de la enseñanza y el aprendizaje (*Pedagogical knowledge of teaching and learning*) se centra en el diseño instruccional de la enseñanza y refleja el desarrollo de la comprensión de los estudiantes.

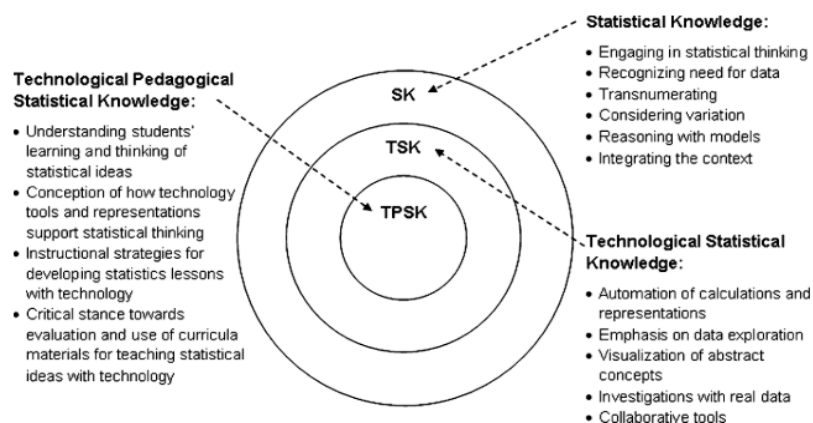
- Conocimiento común y pedagógico del contenido tecnológico (*Common and pedagogical technological content knowledge*) considera habilidades comunes sobre el uso de diferentes herramientas digitales para el análisis de datos y su uso concreto en el aula, donde es necesario conocer sus fortalezas, debilidades e influencia en el aprendizaje de los estudiantes.

Paralelamente, en el contexto de aquellas propuestas teóricas que han incorporado la tecnología en los modelos de conocimiento profesional del profesor de estadística, destacamos los aportes de Lee y colaboradores (Lee et al., 2014; Lee y Hollebrands, 2011). La autora, propone un modelo donde destaca tres tipos de TPACK (Koehler et al., 2014; Mishra y Koehler, 2008) necesarios para la enseñanza de la estadística, que conceptualiza como Conocimiento estadístico-tecnológico para la enseñanza (TPSK, *Techonological Pedagogical Statistical Knowledge*). Su aproximación se organiza en tres círculos concéntricos (Figura 13).

- Conocimiento Estadístico (SK, *Statistical Knowledge*), referido a la capacidad de pensar estadísticamente (Wild y Pfannkuch, 1999).
- Conocimiento de las Tecnologías Estadísticas (TSK, *Technological Statistical Knowledge*) disponibles que permitan, entre otras cosas, automatizar cálculos y representaciones, enfatizando en la exploración de datos reales o realistas.
- Conocimiento Estadístico-Tecnológico para la Enseñanza (TPSK), que considera la comprensión de cómo los estudiantes aprenden los contenidos, y cómo los recursos tecnológicos pueden ser usados para el desarrollo de su razonamiento estadístico.

Figura 13

Marco sobre el TPSK en profesores



Fuente. Lee y Hollebrands (2011, p. 362)

A su vez, Ponte (2011) desarrolla su perspectiva de *conocimiento profesional* (Figura 1) para el caso del profesor de estadística, asegurando que además de un adecuado conocimiento del contenido (que varía según el énfasis que se da en el currículo a los temas de estadística), el conocimiento profesional necesario para enseñar esta materia considera tres polos principales (Ponte, 2011, p. 300):

- Conocimiento de los estudiantes, sus procesos de aprendizaje, estrategias de razonamiento, dificultades, intereses y cultura.
- Conocimiento del currículo.
- Conocimiento de las prácticas de enseñanza, respecto al diseño instruccional, gestión del aula y reflexión de las propias prácticas.

Además, destaca que los cursos de desarrollo profesional para profesores de estadística tienen poco impacto o repercusión en las prácticas de enseñanza, lo que justifica en el hecho de que este proceso tiende a seguir un “modelo académico, con un plan de estudios predefinido y actividades estructuradas, basadas en un paradigma de transmisión del conocimiento” (Ponte, 2011, p. 304). Por ello, organiza en cuatro las principales ideas que debieran orientar estas instancias de desarrollo profesional del profesor:

- Debería estar relacionada con la práctica profesional, usando materiales que representen actividades de enseñanza reales como oportunidades para desarrollar su conocimiento profesional.
- Debería considerar el desarrollo de nuevas prácticas e instancias de trabajo colaborativo según cada contexto escolar.
- Debería proporcionar desafíos y apoyo. Los formadores deben crear un desequilibrio en los profesores, desafiando sus concepciones sobre la estadística y su enseñanza, y al mismo tiempo, promoviendo la experimentación de buenas prácticas de enseñanza.
- Debería reconocer y capacitar a los profesores. Es decir, reconocer que la formación del profesor es continua en el tiempo y debe ser constantemente promovida.

Además, en Henriques y Ponte (2014) destacan que el uso de la terminología *conocimiento profesional* refuerza la perspectiva de que los profesores en ejercicio tienen necesidades y capacidades importantes de tomar en cuenta al momento de orientarlos a reaprender sus prácticas de enseñanza. Los profesores necesitan desarrollar una relación positiva con las ideas estadísticas, como también potenciar sus capacidades para planificar, implementar y reflexionar sobre prácticas de enseñanza innovadoras. Para los autores, una

característica distintiva de una buena práctica de enseñanza, “se refleja en la riqueza de las formas en que los profesores ven e interpretan su práctica, no solo en las acciones que realizan” (Henriques y Ponte, 2014, p. 3).

En Ponte y Noll (2018) usan la expresión “construir capacidad” (*building capacity*) en la educación de profesores de estadística para conceptualizar sus trabajos previos sobre el conocimiento profesional del profesor en formación y ejercicio, y de sus formadores. Al respecto, destacan la necesidad de *construir esta capacidad* respecto al conocimiento del contenido, la práctica profesional, el rol de la tecnología y la interacción entre las tres. En cuanto al conocimiento del contenido, los autores aseguran que los cursos de desarrollo profesional son más efectivos cuando se centran en crear el tipo de ambientes de aprendizaje que a los formadores les gustaría ver a los profesores desarrollar en sus aulas. En este sentido, sugieren que en el diseño de estas instancias se debería (Ponte y Noll, 2018, p. 437):

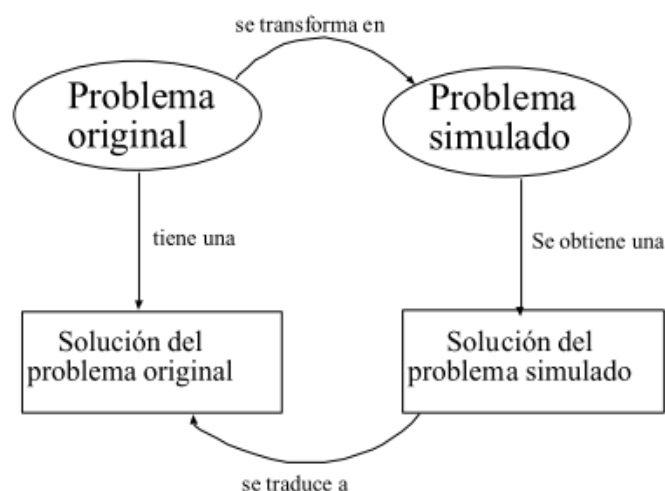
- Considerar la experiencia y los conocimientos previos de los profesores.
- Hacer que los profesores diseñen planes de enseñanza y planteen interrogantes para sus estudiantes.
- Promover que el profesor responda y examine el trabajo de sus estudiantes.
- Organizar la enseñanza entorno a ideas estadísticas claves, usando el ciclo de investigación para resolver problemas según las GAISE (Franklin et al., 2007): formular preguntas, recoger datos, analizarlos e interpretar los resultados.

Por otro lado, los trabajos de Huerta (Huerta, 2018, 2015) destacan que los futuros profesores necesitan sean conscientes de las diferentes naturalezas de la probabilidad, que deben usar en la resolución de problemas. Con ello, asegura que podrán “entender algunos de los aspectos que relacionan el proceso de resolución de problemas de probabilidad con la construcción del pensamiento probabilístico del estudiante y aprender a ser gestores del proceso de resolución de problemas” (Huerta, 2015, p. 107). Por ello, propone dar una intención didáctica a las resolución de problemas de probabilidad con contenido heurístico por medio de simulaciones, desde una aproximación donde el aprendizaje está centrado en la investigación (IBL, *inquiry-based learning*). Según esta perspectiva, los futuros profesores tienen la oportunidad de explorar los problemas probabilísticos propuestos en su formación inicial como aprendices y a su vez evaluar sus potencialidades didácticas para ser propuestos en sus futuras prácticas de enseñanza (Huerta, 2018).

En la Figura 14, el autor organiza el proceso de resolución de problemas de probabilidad por medio de simulaciones.

Figura 14

Esquema básico del proceso de resolución de un problema de probabilidad por simulación



Fuente. Huerta (2015, p. 109).

Al respecto, asegura que este proceso puede ocurrir únicamente luego de identificar un experimento aleatorio simulado que sea equivalente al considerado en el problema original. Además, como la solución simulada depende de un número dado de ensayos, entonces su fiabilidad dependerá de los criterios de convergencia considerados en cada caso. En Huerta (2018) resume en cinco etapas el proceso que experimentan los futuros profesores al resolver problemas de probabilidad con simulación (p. 308), es decir, con intención didáctica:

- Encontrar la solución teórica del problema original
- Traducir el problema original a uno simulado y probar su equivalencia en probabilidad, según el dispositivo aleatorio seleccionado para hacer la simulación.
- Diseñar e implementar la simulación en el dispositivo elegido para recoger datos y resolver el problema simulado.
- Traducir la solución del problema simulado al problema original, estableciendo las interdependencias entre ambas según los criterios de convergencia considerados.
- Revisitar el problema y su proceso de resolución desde en el lugar de profesor, explorando el potencial de la simulación para la enseñanza.

Hasta este punto, hemos revisado las principales propuestas teóricas que han conceptualizado el conocimiento profesional del profesor de estocástica. Al respecto, la tendencia ha sido caracterizar este conocimiento desde dos perspectivas, sobre el contenido y la enseñanza del contenido, incluyendo, en las propuestas más modernas, su interacción con las tecnologías de enseñanza de la estocástica. Por ello, aun cuando la literatura ha sugerido que los profesores necesitan más que únicamente conocimiento del contenido para enseñar

estocástica (Ball et al., 2008; Callingham et al., 2016), nos interesamos en investigar específicamente este aspecto del conocimiento profesional del profesor ya que el conocimiento sobre la enseñanza de la estocástica requiere de un sólido conocimiento del contenido (Batanero, 2009; Batanero y Díaz, 2012), aspecto en el que todos los modelos revisados previamente coinciden.

Sin embargo, los modelos teóricos que han conceptualizado al conocimiento del contenido de estocástica, tienen algunas deficiencias para diferenciar entre las componentes que articulan sus propuestas. Al respecto, Groth y Meletiou-Mavrotheris (2018) aseguran que sería positivo para los investigadores aprovechar las diferentes conceptualizaciones de la naturaleza del conocimiento estadístico para la enseñanza, como puntos de partida para comparar y contrastar distintos puntos de vista (refiriéndose al modelo CDM). **Por tanto, decidimos usar el modelo CDM como referencia teórica principal de esta investigación, que se desarrolla sobre la base de las herramientas teórico-metodológicas del EOS. Desde esta perspectiva, se asume que el conocimiento para la enseñanza es completamente especializado (dimensión didáctica), pero se cimienta sobre la base de un sólido conocimiento del contenido (dimensión matemática), y juntos permiten la reflexión de las prácticas de enseñanza (dimensión meta didáctico-matemática).** Con ello, se establece una clara distinción del conocimiento del contenido necesario para la enseñanza, que puede ser de naturaleza común o ampliada, según profundizaremos en la sección destinada al Marco Teórico de esta investigación, que se desarrolla en el siguiente capítulo.

Por otro lado, el EOS (donde se enmarca el modelo CDM) propone una aproximación pragmatista de la cognición, enfatizando que para estudiar el conocimiento matemático o estocástico es necesario considerar aspectos afectivos que condicionan el comportamiento y la habilidad de aprender, ya que el aprendizaje produce reacciones afectivas. En consecuencia, decidimos considerar también un aspecto del dominio afectivo, las actitudes, para investigar su relación con el conocimiento del contenido. De esta forma, en la siguiente sección revisamos las principales investigaciones que han centrado su atención en el conocimiento del contenido, las actitudes hacia la estocástica y la relación entre ambos en profesores, tanto en ejercicio como formación.

Antecedentes

Estudios sobre el Conocimiento del Contenido de Estocástica.

En cuanto al conocimiento del contenido necesario para que el profesor pueda enseñar estocástica efectivamente, la literatura ha destacado que los programas de formación deben

enforzarse en conceptos estocásticos clave para desarrollar una manera adecuada de pensar el contenido (Burrill, 2014; Groth y Meletiou-Mavrotheris, 2018; Leavy, 2015; Ponte y Noll, 2018). Estas nociones se han organizado comúnmente en torno a siete aspectos (Burrill, 2014; Burrill y Biehler, 2011; Pfannkuch y Ben-Zvi, 2011):

- Datos, entendidos como números o cualidades con un contexto. Considera los distintos tipos de datos, la manera de recogerlos y medirlos.
- Variación (*variation*), entendida como la identificación y medición de la dispersión o variabilidad (*variability*) estadística con un interés predictivo, explicativo o de control.
- Distribución, que destaca a las nociones de tendencia (central o respecto a cualquier posición) y dispersión como principales para razonar acerca de distintos tipos de distribuciones (empíricas, teóricas o muestrales).
- Representación, referida a la capacidad de leer e interpretar distintas maneras de representar los datos, cuya naturaleza puede variar entre gráfica, tabular, numérica, entre otras.
- Asociación y modelación de relaciones bivariadas, referida a la naturaleza de las relaciones entre variables estadísticas para datos categóricos y numéricos, incluida la regresión para modelar asociaciones bivariadas.
- Modelos de probabilidad en los procesos de generación de datos. Referida a la modelación de relaciones estructurales hipotéticas generadas a partir de teorías, simulaciones o aproximaciones de grandes conjuntos de datos.
- Muestreo e inferencia, referido a la relación entre las muestras y la población, y la capacidad de sacar conclusiones con cierto grado de certeza, según cómo se recopilen y analicen los datos.

Por tanto, usamos esta clasificación para organizar la literatura previa sobre el conocimiento de los contenidos de estocástica en profesores. Otras habilidades importantes de considerar para enriquecer el conocimiento profesional del profesor de estocástica según los requerimientos actuales, como las diferencias entre las matemáticas y la estadística, el uso de la tecnología y el cambio en el paradigma evaluativo, que no son el foco de esta sección, han sido discutidas en Ruz (2017) y Ruz, Díaz-Levicoy, Molina-Portillo y Ruiz-Reyes (2018).

Datos. Este concepto es parte del corazón de la estadística, por ser la materia prima que nos permite conocer el mundo real y basar nuestras decisiones en la evidencia que de ellos podamos recoger. Los datos son números o cualidades con los que medimos algún aspecto de interés dentro de un contexto, que representa la base de significado para la interpretación de

resultados y cuya validez dependerá principalmente de haber medido adecuadamente el atributo de interés. Sin embargo, el interés otorgado a la medición y al contexto en las matemáticas es muy distinto al caso de la estadística (delMas, 2004; Rossman et al., 2006).

Mickelson y Heaton (2004) realizan un estudio de caso sobre el razonamiento acerca de los datos y su distribución, demostrado por una profesora de primaria al diseñar e implementar distintas lecciones articuladas según el proceso de investigación empírica PPDAC. Los autores concluyen que la formación del profesorado debe estar organizada en torno a las componentes de este proceso, y en lo referido a los datos, recomiendan incluir aspectos como definir y crear variables en investigaciones que consideren contextos desafiantes donde manipular y organizar bases de datos; y evaluar el cumplimiento del objetivo de investigación según los datos analizados. Además, destacan que los profesores deben ser capaces de reconocer cuándo y cómo el contexto es importante en todas las etapas del ciclo de investigación, con el interés promover su capacidad de tomar decisiones de enseñanza planificadas de antemano o improvisadas en consecuencia de la dinámica de cada clase.

Los trabajos de Chick y Pierce (Chick y Pierce, 2012, 2008) analizan las oportunidades de enseñanza (*potential affordances*) identificadas por diversos grupos de futuros profesores de primaria australianos, en el diseño de clases sobre temas de estadística usando un conjunto de datos reales del almacenamiento de agua en Melbourne (tema de interés social en ese momento por problemas de sequía que se atravesaban en esa región de Australia). Las autoras usan la expresión *affordances* para referirse a “oportunidades que son inherentes a una tarea, lección o ejemplo” (Chick y Pierce, 2008, p. 2) contenidas en los datos, dependiendo del nivel de pensamiento estadístico que se desee desarrollar. Entre sus resultados, se destaca que los futuros profesores asocian principalmente los datos con representaciones gráficas o tabulares y el uso de estadísticos de resumen. Sin embargo, en la mayoría de los planes de clase analizados, no se articularon los conceptos esperados, demostrando dificultad en la identificación de oportunidades de enseñanza a partir de datos reales, pero valorando que su contexto ofrece el desarrollo de la alfabetización estadística de los profesores (Chick y Pierce, 2012).

Los trabajos de Doll y colaboradores (Doll et al., 2005; Sikorski, 2016; Sikorski et al., 2014) se han interesado en organizar instancias de desarrollo profesional para fortalecer la alfabetización de datos (*data literacy*) en profesores, entendida como una competencia del profesor en el manejo de datos en general y concretamente sobre sus estudiantes (como el rendimiento académico o interés en la materia). Doll et al. (2005) identifican seis aspectos para fortalecer esta competencia en el profesorado, que denomina *data basics*: (1) Conocer diversos métodos de recolección de datos sobre los estudiantes; (2) Seleccionar métodos de recolección

y medición de datos según el aspecto de interés en sus estudiantes; (3) Recoger y graficar datos; (4) Identificar tendencias y diferencias en los datos; (5) Usar datos de los estudiantes en el diseño instruccional; y (6) Seleccionar afirmaciones basadas en la evidencia. Desde esta perspectiva, Sikorski (2016) desarrolla un instrumento para medir las habilidades y conocimientos del profesor respecto al uso de datos sobre sus estudiantes, denominado *Nebraska University-NU Data Knowledge Scale*. Esta escala se compone de 30 reactivos tipo test con una única respuesta correcta, que fue aplicada en 215 profesores rurales de Nebraska. Entre sus resultados, el autor destaca la unidimensionalidad de la escala y concluye que sus participantes cuentan con un grado suficiente de competencia en el uso de datos sobre su quehacer profesional, quienes lograron un porcentaje medio de logro cercano al 70%.

A su vez, los aportes de Piro y colaboradores (Dunlap y Piro, 2016; Piro et al., 2014; Piro y Hutchinson, 2014) destacan el problema que enfrentan los profesores al interpretar datos de sus estudiantes, como el rendimiento en pruebas locales y estandarizadas (nacionales e internacionales), para tomar decisiones adecuadas respecto al diseño instruccional de sus clases. Los autores interpretan a la alfabetización de datos como una competencia profesional del profesor, que debe ser desarrollada desde su formación inicial. En este contexto, Piro y Hutchinson (2014) proponen una metodología de instrucción denominada *Data Chat*, donde los futuros profesores debían analizar conjuntos de datos reales (provenientes de pruebas locales o estatales) y según las fortalezas y/o debilidades identificadas, diseñar experiencias de enseñanza. Piro et al. (2014) destacan positivamente la efectividad de esta propuesta tras su implementación en dos grupos de futuros profesores norteamericanos, durante dos cohortes consecutivos (19 y 77 participantes respectivamente). Posteriormente, Dunlap y Piro (2016) implementan el diseño *Data Chat* en 54 futuros profesores que cursaban una asignatura sobre métodos de enseñanza y evaluación. Tras la evaluación de la competencia de alfabetización de datos, antes y después de la instrucción, los autores concluyen que sus participantes inicialmente se sienten abrumados e inseguros cuando se les asigna la tarea de revisar datos sobre calificaciones obtenidas en pruebas estandarizadas y hacer una interpretación y uso adecuados de los resultados en el aula, pero tras la intervención su capacidad mejoró significativamente.

Variación y distribución. Dada la naturaleza variable de la estocástica, otro aspecto que la diferencia del determinismo de las matemáticas (Burrill y Biehler, 2011; delMas, 2004; Rossman et al., 2006), la variación es un aspecto implícito en todos los contenidos de esta materia. Usamos el término *variación* para referirnos a la identificación, comprensión y cuantificación de la dispersión y variabilidad estadística, que son componentes claves para

entender el concepto de *distribución*. La noción de distribución subyace a todas las formas estadísticas de razonamiento sobre la variación (Del Pino, 2017; Garfield y Ben-Zvi, 2008b; Wild, 2006), lo que nos motivó a destinar esta sección a ambas ideas simultáneamente.

Para desarrollar la comprensión de estas nociones clave es necesario razonar a partir de las distribuciones en varios sentidos (Wild, 2006). Un conjunto de datos debe ser explorado como una entidad (una distribución) más que como casos individuales y aislados, por medio de diversas representaciones para visualizar tanto su forma, como la dispersión y simetría respecto al centro. Harradine, Batanero y Rossman (2011) destacan que las distribuciones pueden estar formadas a partir de conjuntos de datos (distribución empírica o de datos), posibles valores de una variable aleatoria (distribución teórica o de probabilidad) o de estadísticos de resumen (distribuciones muestrales). Por tanto, a continuación, profundizamos en la literatura interesada en las distribuciones empíricas de datos univariados, dejando el caso bivariado y los otros dos tipos de distribuciones para las secciones posteriores, sobre asociación, probabilidad e inferencia respectivamente. Al respecto, organizamos estos antecedentes según su interés en la comprensión de diversos estadísticos de resumen, primero sobre el centro, luego consideramos a las medidas de dispersión (o algún aspecto de la variabilidad estadística en el análisis de datos) y finalizamos concretamente con la noción de distribución.

Estudios que han examinado las concepciones de los profesores (en ejercicio y formación) sobre las medidas de tendencia central o promedios (Batanero, Godino y Navas, 1997; Callingham, 1997; Estrada, Batanero y Fortuny, 2004b; Gfeller, Niess y Lederman, 1999; Groth y Bergner, 2006; Jacobbe, 2012; Leavy y O'Loughlin, 2006; Ortiz y Font, 2014) han evidenciado sistemáticamente que lograr un conocimiento profundo de estos conceptos no es trivial (Jacobbe y Carvalho, 2011)

Batanero et al. (1997) exploran los conocimientos y dificultades en la comprensión de los promedios (media, moda y mediana) en una muestra de 273 futuros profesores de primaria españoles. Para ello, usan cuatro ítems del cuestionario desarrollado por Konold y Garfield, que actualmente forman parte del test *Statistical Reasoning Assessment* [SRA] (Garfield, 2003). Los participantes tienen dificultades en el tratamiento de valores atípicos (*outlier*) al calcular promedios y en identificar la relación entre la media, moda y mediana en distribuciones asimétricas. Al comparar dos distribuciones predominan estrategias erróneas como basar la comparación en datos puntuales y no en la distribución como una entidad en si misma, o usar solo los promedios sin considerar la dispersión. Años más tarde, Estrada, Batanero y Fortuny (2004) indagan en los conocimientos estadísticos elementales de una muestra de 367 futuros profesores de primaria españoles por medio de nueve ítems del cuestionario SRA (Garfield,

2003), entre los que se encontraban los cuatro aplicados previamente por Batanero et al. (1997). A pesar del tiempo transcurrido entre ambos estudios, los resultados obtenidos reflejan nuevamente las mismas dificultades identificadas antes en cuanto a la comprensión de los promedios.

Callingham (1997) analiza el conocimiento sobre los promedios (*average*) en 136 profesores australianos (100 en formación y 36 en ejercicio) a través de cuatro ítems de respuesta abierta, tomados de la literatura. El primero sobre calcular la media aritmética de un conjunto de datos con un valor atípico; los dos siguientes sobre la comparación de dos distribuciones de datos representadas gráficamente (un par de igual tamaño y el otro distinto); y el cuarto sobre el uso de la media ponderada. La autora, organiza los resultados según la taxonomía de conocimiento SOLO (*Structure of the Observed Learning Outcome*) (Biggs y Collis, 1982) donde se identifican cinco categorías de complejidad creciente para las respuestas de los participantes (Prestuctural, Uniestructural [U], Multiestructural [M], Relacional [R] y Abstracto [A]), según el modo de pensamiento involucrado para resolver la tarea (sensorio motor, icónico, simbólico concreto, formal y posformal). Entre sus resultados, Callingham identifica respuestas que demuestran dos niveles del ciclo U-M-R en el modo simbólico concreto, apoyadas por el pensamiento icónico. En el primero, las respuestas evolucionan desde no considerar el uso de promedios (U1), errar en el algoritmo (M1) y únicamente determinar el valor de algún promedio (R1). Mientras que en el segundo ciclo, las respuestas destacan facilidad en aplicar algún algoritmo (M2), aunque hay problemas con el tratamiento de valores atípicos (U2), se observa el uso de medidas adecuadas para representar la situación propuesta, como la media ponderada (R2).

Gfeller, Niess y Lederman (1999) analizaron la capacidad de usar distintas representaciones al resolver problemas que involucraran a la media aritmética en una muestra de 19 futuros profesores estadounidenses (13 de ciencias y 6 de matemáticas). Para ello, usaron un instrumento de 10 problemas de dos tipos (determinar la media y encontrar el dato faltante conociendo el valor medio) y pidieron a los participantes que los resolvieran entregando dos posibles soluciones a cada uno. Las respuestas variaron según tres estrategias de resolución de los problemas propuestos, que ordenadas según mayor frecuencia corresponden a la aplicación del algoritmo de cálculo, relación con la idea de división justa o equitativa (*fair share*) y el reconocimiento de la variación.

Groth y Bergner (2006) estudian el conocimiento del contenido sobre la media, moda y mediana y sus relaciones, en 46 futuros profesores de primaria estadounidenses, desde una perspectiva mixta entre la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1991) y la noción de Conocimiento profundo de las matemáticas (PUFM, *Profound Understanding of Fundamental*

Mathematics; Ma, 1999). En este caso, informan de los resultados en una de las seis preguntas abiertas que conformaron el cuestionario utilizado, referida a cómo se diferencian y asemejan los conceptos de media, moda y mediana. Para los autores, un PUFM representa la estructura ideal de conocimiento del contenido de un maestro, que va más allá de las matemáticas escolares, mientras que con la taxonomía SOLO describen niveles de razonamiento dentro de esa estructura. Entre sus resultados, reportan un ciclo de cuatro niveles (UMRA): Uniestructural, donde ocho participantes solo se refieren a la definición de las medidas; Multiestructural, donde 21 futuros profesores destacan a las medidas como útiles para resumir conjuntos de datos, pero no especifican en qué sentido; Relacional, donde 13 sujetos reconocen que las medidas representan lo típico o central de los datos; y Abstracto, con solo 3 participantes que además profundizan en qué casos la media, moda y mediana representan más adecuadamente el centro de la distribución de datos. Este último nivel, es catalogado por Groth y Bergner como un PUFM deseado para los profesores de primaria en cuanto a su dominio de las medidas de tendencia central.

Leavy y O'Loughlin (2006) analizan la comprensión sobre la media aritmética en 263 futuros profesores de primaria irlandeses desde una perspectiva procedimental y conceptual. A través de un cuestionario de cinco preguntas abiertas, aplicado a todos los participantes, exploran aspectos procedimentales, mientras que seleccionan a 25 de ellos para realizar entrevistas clínicas donde profundizar en lo conceptual. En la primera interrogante, sobre elegir una medida para comparar dos conjuntos de datos, la mayoría de los participantes (57%) selecciona y calcula correctamente la media, pero nadie a la mediana. La segunda pregunta, sobre determinar la media ponderada, fue respondida correctamente solo por un quinto de los sujetos. En la tercera y cuarta pregunta se debían inventar conjuntos de datos para valores dados de la media, que un 88% de los participantes logra hacer correctamente. En la última pregunta, se solicitó determinar la media a partir de un gráfico de puntos y explicar su significado en el contexto del problema. Solo un 3% de los participantes pudo determinar correctamente el valor medio, mientras que la mayoría confunde este valor con la moda de la distribución. En cuanto a la interpretación de esta medida, se observa confusión entre ella y la moda o mediana, y más de la mitad de los sujetos (52%) explica a la media como un promedio (*average*). Las autoras concluyen que sus participantes demuestran escasas formas de conocimiento conceptual sobre la media, ya que reflejan una comprensión principalmente procedimental basada en la aplicación de algoritmos y cálculos.

Los trabajos de Jacobbe se han interesado particularmente en la comprensión de los promedios en profesores (Jacobbe, 2012, 2008; Jacobbe y Carvalho, 2011). Jacobbe (2008, 2012) explora la comprensión de la media y mediana respecto a los aprendizajes esperados en

la enseñanza de la estadística para los estudiantes de EEUU sugeridos en GAISE (Franklin et al., 2007), a través de un estudio de caso compuesto por tres profesores de primaria destacados en la enseñanza de las matemáticas. Para ello, utiliza distintos métodos de evaluación como cuestionarios, entrevistas y observaciones de clase. Entre sus resultados, destaca que uno de sus participantes confunde los algoritmos para determinar cada medida en los cuestionarios, pero no en las entrevistas. Mientras que en instancias donde se les solicitó describir las diferencias entre la media y mediana o explicar situaciones donde una pueda ser más informativa que la otra, los tres tienen dificultades y asocian estos promedios únicamente con sus algoritmos de cálculo, demostrando un conocimiento más procedimental que conceptual de cada uno. El autor afirma que los profesores participantes no cuentan con los conocimientos y habilidades descritas en los dos primeros niveles de GAISE, que coinciden con las promovidas para los grados 1 al 5 (*elementary school*, 6-11 años) y 6 al 8 (*middle school*, 11-14 años) de EE.UU, aun cuando son considerados destacados en la enseñanza de la matemática.

Ortiz y Font (2014) analizan el conocimiento común del contenido (Ball et al., 2008) sobre la media aritmética en 40 futuros profesores de primaria españoles, a través de la herramienta de análisis cognitivo propuesta por el EOS (Godino et al., 2007). Para ello, reportan los resultados de aplicar dos interrogantes, una sobre estimar el peso real de un objeto del que se conocen ocho mediciones concretas y la otra sobre comparar dos conjuntos de datos. En el primer caso, un 37,5% de los sujetos responde correctamente, mientras que un tercio no reconoce a la media como un buen estimador del peso del objeto y entre quienes si lo hacen, un cuarto no logra determinar su valor. Mientras que en el segundo problema, un 80% de los futuros profesores basó sus comparaciones en datos concretos de las distribuciones de datos comparadas y no mencionó a la media aritmética, y entre quienes si lo hicieron, solo un 17,5% determinó su valor y estableció comparaciones correctas.

Por otro lado, los estudios que han examinado concretamente las concepciones de los profesores sobre las medidas de dispersión o algún aspecto de la variabilidad estadística en el análisis de datos, son escasos en la literatura y han evidenciado dificultades en su comprensión al mismo nivel que los estudiantes (Biehler, Frischemeier, Reading y Shaughnessy, 2018; Sánchez, Silva y Coutinho, 2011).

Hammerman y Rubin (2004) analizan las estrategias de razonamiento estadístico empleadas por profesores al comparar grupos con el uso del software TinkerPlots (Konold y Miller, 2005) en el marco de un programa de desarrollo profesional denominado VISOR (*Visualizing Statistical Relationships*). Durante esta instancia, los 11 profesores participantes (seis de *middle* y cinco de *high school*) se familiarizaron con el uso de una herramienta

(*binning*) que permite agrupar variables continuas. Los autores destacan que tras esta experiencia los profesores pudieron profundizar en sus razonamientos sobre la variación estadística, dejando de centrarse únicamente en las medidas de centro o dispersión, sino que, considerando también distintas estrategias de agrupamiento para establecer comparaciones visualmente gracias al apoyo de tecnología.

Makar y Confrey (2005) analizaron el lenguaje utilizado para describir la variación (*variation-talk*) al comparar dos distribuciones de datos en una muestra de 17 profesores de matemática y ciencias en formación. Desde una perspectiva cualitativa, el estudio mostró que la mayoría de los participantes expresaron ideas importantes que conectaban la variación con la distribución, utilizando principalmente un lenguaje no especializado (*nonstandard*). Entre ellos, se refirieron a la dispersión (*spread*) al concentrar la comparación en aspectos de la forma de la distribución, más que en alguna medida concreta, también en algunas partes concretas. Estas últimas, fueron clasificadas en: (1) baja-media-alta (*low-middle-high*) cuando la partición fue realizada en tres partes, (2) grupo modal (*modal clump*) cuando el foco estuvo en los grupos más frecuentes de ambas distribuciones, demostrando su relación con las medidas de centro, y (3) otras particiones valiosas (*other meaningful chunks*) cuando eligieron agrupaciones diferentes y dinámicas para establecer las comparaciones.

Silva y Coutinho (2008) estudiaron el razonamiento acerca de la variación utilizado por nueve profesores de matemática brasileños, al analizar la distribución de las edades de los estudiantes de un curso representada como tabla e histograma. Los resultados fueron organizados según la taxonomía SOLO (Biggs y Collis, 1982) adaptada por Garfield (2002) en su modelo general de Razonamiento estadístico (*statistical reasoning*). Las autoras reportan que en el nivel: (1) Idiosincrático, los profesores calcularon la media y mencionaron la desviación estándar sin entender su significado; (2) Razonamiento verbal, se observaron cuatro etapas: (a) percepción de la variación, (b) comprensión de la desviación estándar como una medida de la diferencia entre los valores de la variable, (c) comprensión de que es deseable una menor desviación e (d) identificación del rango de valores donde están contenidos los datos; (3) Razonamiento transicional, usaron más de un estadístico para resumir el comportamiento de las edades, como el máximo o mínimo; (4) Razonamiento procedimental, los profesores relacionaron la media con la desviación estándar; y (5) Razonamiento del proceso, que ningún participante alcanzó. Además, el nivel dos fue el más frecuente, donde la desviación estándar se caracteriza como una medida de homogeneidad de la muestra.

Dabos (2011) explora las concepciones sobre la variación de 52 profesores de matemática, de los cuales 29 también enseñan estadística, pertenecientes a 33 universidades comunitarias (*2-years community college*) de California, EE.UU. Para ello, construye un

cuestionario a partir de la literatura previa, compuesto de 16 preguntas de conocimiento, diez de las cuales eran preguntas abiertas que respondieron todos los participantes, y las otras seis fueron aplicadas a 12 de los participantes en formato de entrevista. Este instrumento consideraba la percepción de la variación en contextos aleatorios y en el análisis de datos, tanto al analizar una distribución como al comparar dos de ellas. Al respecto, Dabos (2014) profundiza en los resultados obtenidos por los mismos participantes en cuanto a los cuatro reactivos que incluyeran histogramas (dos en preguntas abiertas y dos en entrevistas). Entre sus resultados, la autora destaca que la identificación del gráfico con más variabilidad no garantiza un razonamiento apropiado, ya que mientras algunos profesores parecían captar la idea de variabilidad como una medida de dispersión respecto al centro, otros utilizaron este conocimiento de manera inapropiada. Por ejemplo, se destaca una alta recurrencia de argumentos que asociaron una baja variabilidad con distribuciones acampanadas, basando su juicio únicamente en la forma de la distribución, ignorando el rango, la dispersión respecto al centro y la frecuencia de cada valor.

Los trabajos de Peters (Peters, 2011, 2014; Peters y Kopeikin, 2016; Peters y Stokes-Levine, 2019) se han interesado en analizar el razonamiento sobre la variación estadística en profesores de matemática destacados (*leaders*). Peters (2011), propone un modelo sobre la comprensión formal de la variación desde tres perspectivas: de control (en el diseño de experimentos), de medición y descripción (centrada en los datos) y de modelación (al establecer inferencias sobre el ajuste de un modelo). Según la taxonomía SOLO, la autora asegura que para lograr un razonamiento sólido de la variación es necesario recorrer dos ciclos UMR, el primero que se observa independientemente dentro de cada perspectiva de la variación considerada, y el segundo que integra a las tres (Peters y Kopeikin, 2016). En este contexto, Peters (2014) desarrolla un estudio fenomenológico para detallar los resultados de cinco profesores que lograron recorrer ambos ciclos de razonamiento correctamente, demostrando lo que cataloga como una sólida comprensión (*robust understanding*) de la variación. Al respecto, detalla que el aspecto principal que diferenció a estos sujetos es que experimentaron situaciones conflictivas o dilemas que los desafiaron cognitivamente para desarrollar una mejor comprensión del tema. En este sentido, Peter y Stokes-Levine (2019) contrastan sus hallazgos previos en otra muestra de profesores, inscritos en programa de desarrollo profesional, concluyendo que el uso de dilemas es una herramienta valiosa para promover un razonamiento sólido de las distintas perspectivas de la variación.

A su vez, los resultados de la tesis doctoral de Vermette han informado sobre el conocimiento de la dispersión (Vermette, 2018) y variabilidad estadística (Vermette y Gattuso, 2014) en 12 profesores de matemática de Canadá. En general, la mayoría de sus participantes

tienen dificultades con estas nociones y su relación con la representación gráfica de una distribución de datos. Entre ellos, Vermette y Savard (2019) destacan la presencia de errores observados previamente en estudiantes, como interpretar la variabilidad según las diferencias en las alturas y número de barras de un histograma, o como una desviación de la distribución normal, concluyendo que una baja variabilidad es sinónimo de simetría.

Finalmente, revisaremos aquellos estudios que hayan centrado su interés en la comprensión de la noción de distribución en profesores. Tras la revisión de Reading y Canada (2011) se destaca que el razonamiento distribucional involucra una compleja red de contenidos de los que depende la noción de distribución, como el centro, dispersión, forma, densidad, sesgo, frecuencias relativas (para distribuciones de datos) o probabilidad (para distribuciones teóricas), proporcionalidad y causalidad, y que son necesarios para desarrollar conocimientos más avanzados en el marco de la inferencia (distribuciones muestrales). En este sentido, identifican que la investigación en profesores se ha centrado en la comprensión de alguno de los temas de los que la noción de distribución depende (como los revisados previamente) o en su uso en la comprensión de conceptos que dependen de ella.

Leavy (2006) investiga la comprensión de la distribución, expresada según las medidas de resumen y representaciones utilizadas para comparar dos distribuciones de datos, por 23 futuros profesores de primaria irlandeses, en el marco de una asignatura de metodología. La autora destaca la evolución en los argumentos utilizados, que inicialmente se centraron en calcular algunas medidas descriptivas como la media, pero evolucionaron considerando otras representaciones para explorar la forma de la distribución y coordinar aspectos sobre el centro y dispersión. Sin embargo, aun tras formalizar la noción de distribución, los participantes tuvieron dificultades para establecer las comparaciones correctamente.

Canada y Ciancetta (2007) examinan el razonamiento distribucional informal demostrado por 58 futuros profesores de primaria estadounidenses frente a una tarea de comparar dos distribuciones de datos representadas gráficamente, con igual media pero distinta desviación estándar. Entre sus resultados, destaca que más de la mitad de sus participantes concentra sus comparaciones en medidas sobre el centro o dispersión de los datos, mientras que el 43.1% restante incluyó argumentos que consideraban ambos aspectos. Mientras que Canada (2008) compara los resultados de Canada y Ciancetta (2007) con los razonamientos de 50 estudiantes (24 de grado 7 y 26 de grado 6), obteniendo que, si bien ambos grupos usaron estrategias similares en cuanto a enfocarse mayormente en alguna medida sobre el centro o dispersión, un 43% de los futuros profesores versus un 14% de la de los estudiantes fueron capaces de integrar ambas nociones dentro de un razonamiento distribucional integrado.

Mcclain (2008) analiza la capacidad de comparar distribuciones de datos usando herramientas tecnológicas en 17 profesores de secundaria estadounidenses, en el marco de un programa de desarrollo profesional. Para ello, utiliza una secuencia de actividades diseñadas para desarrollar la capacidad de razonar estadísticamente en términos de distribuciones. Entre sus resultados, el autor reporta que si bien inicialmente los participantes concentraban sus comparaciones en puntos o fragmentos parciales de las distribuciones, fueron capaces de integrar sus razonamientos y plantear argumentos válidos, por lo que cataloga positivamente la instancia desarrollada.

Ruiz, Arteaga y Batanero (2009) analizaron la comprensión de la distribución en 101 futuros profesores de primaria españoles a través de un proyecto abierto. En él, los participantes debieron comparar sus intuiciones sobre el azar, donde la comprensión de la distribución fue evaluada a partir de los gráficos utilizados, las medidas de resumen calculadas y las comparaciones obtenidas en las conclusiones. Los autores concluyen que la mayoría de los futuros maestros no son capaces de razonar distribucionalmente, ya que a lo más un tercio de ellos es capaz de establecer conclusiones al menos parcialmente correctas (solo 4 participantes lo hacen totalmente bien). Entre quienes utilizan gráficos, menos de un cuarto de ellos es capaz de utilizar gráficos conjuntos, y sobre los estadísticos utilizados, más de un 90% calcula algún promedio, pero la mayoría no complementa estos resultados con alguna medida de dispersión (solo un 60% usa el rango y un 25% la desviación estándar).

Thanheiser, Noll y Leavy (2011) estudiaron las concepciones sobre la distribución en 27 futuros profesores de educación infantil en EE.UU., según cuatro contextos diferentes: comparar distribuciones de datos con iguales promedios pero distinta dispersión; construir conjuntos de datos para una media concreta; reconocer a la media como una buena medida para comparar distribuciones de distinto tamaño; y calcular e interpretar la mediana. Entre sus resultados, las autoras reportan que casi todos sus participantes demuestran un conocimiento algorítmico de la media, pero solo unos pocos consideraron aspectos de la dispersión para justificar sus conclusiones. Además, aseguran que los sujetos proponen valores cercanos a la media y con un rango acotado, mientras que la mitad reconocieron a la media como una medida apropiada para comparar distribuciones de distinto tamaño, pero más de la mitad no reconocieron la necesidad de usar todos los datos para calcular la mediana.

Gea, Batanero, Fernandes y Arteaga (2016) evaluaron la interpretación de resúmenes estadísticos en 65 futuros profesores de educación secundaria y bachillerato españoles. Para ello, utilizaron dos tareas, la primera sobre interpretar distintos estadísticos sobre el centro y dispersión de una distribución de datos reales y la segunda sobre elegir entre los promedios mostrados el más representativo considerando además un gráfico de caja y bigotes. Entre sus

resultados, más de la mitad de los participantes interpretan los estadísticos correctamente, donde lo más frecuente fue considerar dos o tres de ellos. Sin embargo, muestran mayores dificultades para interpretar la desviación estándar, para seleccionar un promedio representativo (llegando a elegir automáticamente a la media aunque la distribución fuese asimétrica) y para integrar el contexto en la interpretación de los estadísticos mostrados.

Representación. La capacidad de buscar patrones en los datos es similar a intentar “desbloquear la historia oculta dentro de ellos” (Pfannkuch y Ben-Zvi, 2011, p. 326) y para lograrlo, es necesario experimentar el proceso de Transnumeración. Esta competencia es entendida como la transformación de los datos en alguna representación que facilite su comprensión (Wild y Pfannkuch, 1999) de forma gráfica, tabular, en diagramas, etc. Al respecto, los estudios sobre las habilidades de lectura e interpretación gráfica de profesores en formación o ejercicio, muestran una tendencia a subestimar las complejidades propias del aprendizaje de representaciones gráficas (Groth y Meletiou-Mavrotheris, 2018), expresando confianza en su comprensión para enseñar este tema, en comparación con otras ideas estadísticas (González y Pinto, 2008; Leavy, 2010; Watson, 2001). Sin embargo, a pesar de sus actitudes positivas y su confianza en la enseñanza de gráficos, muchos profesores tienen un conocimiento limitado de ellos (Arteaga, 2011; Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas, 2015; Arteaga, Batanero, Ortiz y Contreras, 2011; Fernandes y Freitas, 2019; González, Espinel y Ainley, 2011; Jacobbe y Horton, 2010).

Monteiro y Ainley (2007) investigaron el “sentido crítico” (*critical sense*) de la representación gráfica en 218 futuros maestros de Brasil e Inglaterra, entendido como una habilidad clave para leer e interpretar gráficos presentes en los medios de comunicación. Entre sus resultados, reportaron que muchos profesores en formación no tenían el conocimiento matemático adecuado para leer gráficos de la prensa diaria. Sin embargo, la mayoría demostró capacidad para pensar críticamente y justificar sus ideas combinando el conocimiento estadístico con la experiencia personal y el conocimiento contextual.

Espinel, Bruno y Plasencia (2008) compararon la capacidad de leer e interpretar distribuciones de datos representadas gráficamente entre 109 futuros maestros españoles y 345 estudiantes universitarios estadounidenses de Delmas, Garfield y Ooms (2005). Entre sus resultados, destacan mejores resultados en los estudiantes americanos en la interpretación de un histograma, en relacionar descripciones con su respectiva representación gráfica y en vincular dos representaciones de la misma distribución de datos. Más tarde, Bruno y Espinel (2009) profundizan en esta situación reportando los resultados de evaluar la capacidad de construir histogramas y polígonos de frecuencia en otros 29 futuros maestros españoles. Entre

sus resultados, las autoras destacan que los participantes tendieron a confundir los histogramas con los gráficos de barras y tuvieron dificultades para tanto para construir el polígono de frecuencias asociado como para considerar intervalos con frecuencia cero.

Batanero, Arteaga y Ruiz (2010) analizaron los gráficos producidos por 93 futuros maestros españoles en un proyecto abierto sobre la comparación de dos variables estadísticas. Para ello, organizan sus resultados según cuatro niveles de complejidad semiótica en la construcción de gráficos: (1) Representar resultados individuales; (2) Representar todos los resultados individuales para al menos una variable; (3) Producir gráficos separados para cada distribución; (4) Producir un gráfico multivariante de ambas distribuciones. Mientras que para evaluar la comprensión gráfica de los participantes usaron los niveles de lectura propuestos por Curcio: (1) leer los datos (*reading the data*); (2) leer dentro de los datos (*Reading between the data*); (3) leer más allá de los datos (*Reading beyond the data*), sin considerar el cuarto nivel de “leer detrás de los datos” (*looking behind the data*) sobre la valorización crítica de los datos (Friel et al., 2001). Entre sus resultados, los autores destacan que, aunque aproximadamente dos tercios de los participantes construyeron un gráfico con la complejidad de nivel 3 o 4 (suficiente para llegar a una conclusión adecuada), la mitad de los gráficos eran inadecuados o incorrectos. En cuanto al nivel de lectura, un 57% de los futuros maestros plantea interpretaciones al menos parcialmente correctas, clasificadas en el segundo o tercer nivel de lectura.

Sobre la base del trabajo anterior, se cimientan los resultados de la tesis doctoral de Arteaga (2011) donde se analizan los conocimientos matemáticos en relación a los gráficos estadísticos de 207 futuros profesores de primaria españoles, al desarrollar un proyecto semiestructurado (“intuiciones sobre el azar”, el mismo mencionado previamente en Ruiz et al., 2009). Los participantes demuestran deficiencia en la lectura y producción de gráficos, y con la capacidad para establecer conclusiones al proyecto realizado (Arteaga et al., 2015). En la construcción, menos de la mitad de los sujetos que elaboraron gráficos los realizaron correctamente, y de la mitad restante se observan errores como el uso de escalas demasiado amplias para el rango de variación y valor de la variable, omisión de rótulos, introducción de líneas innecesarias y cambios en la ubicación de la variable independiente y dependientes en los ejes coordenados (Arteaga et al., 2016, 2013). En cuanto a la capacidad de leer esta representación, aproximadamente un 30% de la muestra que realizan gráficos no alcanza un nivel de lectura suficiente o bien confunden sus elementos. Finalmente, un grupo pequeño de futuros maestros llega a establecer conclusiones completas acerca de la situación representada.

González et al. (2011) describen la competencia gráfica de profesores como una característica clave de la alfabetización estadística, adoptando la perspectiva de dar sentido a

los gráficos (*making sense of graphs*) propuesta por Friel et al. (2001). Sobre esta base, establecen a la competencia gráfica como la unión de tres capacidades diferentes: (1) Extraer información de diferentes tipos de gráficos e interpretar su significado por la lectura *entre, más allá y detrás* de los datos, para establecer hipótesis sobre los fenómenos representados; (2) Seleccionar y crear gráficos apropiados para situaciones específicas, con o sin el apoyo de la tecnología; y (3) Evaluar críticamente las fortalezas y debilidades gráficas.

En esta misma línea, los trabajos de Contreras y colaboradores han propuesto a la alfabetización estadística gráfica (Molina-portillo et al., 2017) como una competencia elemental para la interpretación crítica de información estadística presente en los medios de comunicación (Contreras, Molina-Portillo, Godino y Batanero, 2017; Molina-Portillo, Contreras, Ruz y Contreras, 2018). En Contreras et al. (2017) detallan el proceso de construcción de un cuestionario para evaluar la interpretación crítica de noticias basadas en gráficos elementales. Los autores, concluyen de las buenas propiedades psicométricas del instrumento desarrollado, tras su aplicación en una muestra piloto de 45 futuros maestros españoles, quienes demostraron dificultades en todos los aspectos considerados (resumir la noticia, indicar el interés del gráfico, cuestionar la procedencia, identificar tendencias y transnumerar de un gráfico a una tabla). Más tarde, Molina-Portillo et al. (2018) aplican dicho instrumento en 653 futuros profesores de primaria españoles, reportando los resultados sobre las destrezas lingüísticas a la hora de interpretar y resumir una noticia basada un diagrama de barras adosadas. Entre sus resultados, los autores destacan que sus participantes demuestran una baja comprensión gráfica (solo un cuarto de ellos responde correctamente), tanto al interpretar la representación como en la posterior comunicación y argumentación de las conclusiones. Y más de la mitad de los sujetos comete errores como usar terminología inadecuada, no resumir la información, no considerar el contexto de la noticia o concluir refiriéndose únicamente a la noticia sin considerar el gráfico.

Fernandes y Freitas (2019) analizan la capacidad de seleccionar métodos estadísticos para determinar gráficos y medidas adecuados para resumir la distribución de datos, en 50 futuros profesores de primaria de Portugal. Entre sus resultados, destaca que los participantes tuvieron dificultades para identificar representaciones gráficas adecuadas para las variables analizadas y para interpretar los estadísticos utilizados.

Asociación y modelación de relaciones bivariadas. Según la revisión de Biehler et al. (2018), el análisis de la covariación y asociación bivariada puede darse según tres combinaciones posibles dependiendo del tipo de variable considerada. La relación entre una variable numérica y una categórica fue revisada previamente en la comparación de

distribuciones, por lo que destinaremos lo que sigue a los dos casos restantes, cuando la relación se produce entre dos variables cuantitativas y dos cualitativas respectivamente. Estas nociones amplían la idea de dependencia funcional, donde a cada valor de una variable X (independiente) le corresponde un solo valor de otra Y (dependiente), pero en el estudio de la asociación a cada valor de X corresponde una distribución de valores de Y (Engel y Sedlmeier, 2011). Los estudios sobre el razonamiento covariacional y la asociación estadística se han caracterizado por analizar la capacidad para interpretar distintas representaciones como, tablas de contingencia y gráficos de dispersión, o medidas de resumen, como la covarianza y el coeficiente de correlación. Al respecto, aunque escasa, la literatura ha reportado conflictos en el conocimiento sobre la asociación y modelación bivariada en profesores (Batanero, Estepa y Godino, 1996; Casey, 2010; Casey y Wasserman, 2015; Engel y Sedlmeier, 2011; Engel, Sedlmeier y Wörn, 2008; Estepa y Gea, 2011; Gea, 2014).

Batanero, Estepa y Godino (1996) analizan los efectos de un experimento de enseñanza con apoyo computacional para promover la comprensión de la asociación estadística en 19 futuros maestros españoles. Entre sus resultados, se destaca una mejora en las estrategias de razonamiento desarrolladas por los participantes, quienes mayormente superaron errores como una concepción determinista o local de la asociación. Además, la mayoría de los estudiantes usaron todas las diferentes distribuciones condicionales en las tablas de contingencia y abandonaron el procedimiento aditivo, utilizando la comparación multiplicativa de las diferentes frecuencias en la tabla. Sin embargo, se observan errores persistentes como la concepción unidireccional (no admitir la asociación inversa o interpretarla como independencia) y la concepción causal de la asociación estadística (una asociación fuerte entre dos variables implica una relación de causa y efecto entre ellas).

Engel, Sedlmeier y Wörn (2008) investigaron si la apreciación de la variación aleatoria de 179 futuros profesores de matemática alemanes puede mejorar tras un curso sobre relaciones funcionales con énfasis en la modelación. Para ello, propusieron una metodología aplicada en dos grupos, uno de control (101 sujetos de un curso tradicional) y otro de tratamiento (78 sujetos de otro curso centrado en relaciones funcionales de datos reales apoyado por tecnología). A lo largo del curso, los estudiantes tuvieron el desafío de discutir las desviaciones entre un modelo y los datos reales, debiendo analizar los gráficos de residuos. Los autores destacan que si bien los conceptos estadísticos no se enseñaron explícitamente en el curso, el manejo de la variación en diagramas de dispersión mejoró enormemente. Por ejemplo, muy pocos estudiantes del grupo de tratamiento interpolaron los datos (indicación de un razonamiento determinista) cuando se les pidió que dibujaran una curva a mano alzada sobre un diagrama de dispersión. Posteriormente, en la revisión de Engel y Sedlmeier (2011) se

identificaron tres problemas principales en la comprensión de la correlación y regresión: sesgos psicológicos (creencias previas, correlación ilusoria, relación de transitividad de la asociación y confundir variables), dificultades matemáticas (por ejemplo, al confundir asociación y dependencia, o al interpretar el coeficiente de correlación) y dificultades con la comprensión funcional de la asociación (por ejemplo, erróneas como la concepción determinista, unidireccional, local y causal).

Casey (2010) describió el conocimiento del contenido necesario para la enseñanza de la asociación estadística a partir de un estudio de caso de tres experimentados profesores de matemática estadounidenses, a través de entrevistas aplicadas inmediatamente después de enseñar este tema. Entre sus resultados, se destaca al significado, la terminología y el conocimiento del contexto como los componentes principales. Además, la autora enfatiza en el coeficiente de correlación, asegurando que los profesores deben ser capaces de dominar su cálculo, interpretar su magnitud, ser sensibles a los factores que pueden alterar su valor, estimar su valor a partir de un gráfico de dispersión y utilizar una terminología adecuada. Más tarde, Casey y Wasserman (2015) determinan los métodos utilizados por 19 profesores de matemática estadounidenses para trazar una línea “informal” que mejor se ajuste a los datos, en contraste a la obtenida con el método de mínimos cuadrados. Entre sus resultados, los participantes asociaron esta línea con las nociones de tendencia, valor típico, representante del conjunto de datos y predictor, apelando a justificaciones como dejar igual número de datos arriba y debajo de la línea, que la línea esté lo más cerca posible de todos los datos o que la diferencias entre los datos reales y estimados estén equilibrados. A pesar de la variedad de concepciones y criterios observados, la mayoría de los profesores colocaron las líneas en aproximadamente el mismo lugar en que aparecería la recta estimada de regresión en un diagrama de dispersión.

Los resultados de la tesis doctoral de Gea (2014) han informado sobre el conocimiento de la correlación y regresión en futuros profesores de secundaria y bachillerato españoles. En Batanero, Gea, Arteaga, Contreras y Díaz (2018), consideran a 65 sujetos para evaluar algunos aspectos del conocimiento del contenido según el modelo MKT (Ball et al., 2008). Para el conocimiento común usaron tareas de estimar el coeficiente de correlación, e identificar una función de ajuste a partir de diagramas de dispersión, cuyos resultados fueron bastante buenos, aunque mejores en la precisión de las estimaciones para correlaciones altas y en ajustes lineales. El conocimiento en el horizonte fue valorado a través de tareas de ordenar diversas variables según su grado de predicción de una misma variable (esperanza de vida) o de analizar posibles relaciones de causalidad entre ellas, cuyos resultados fueron más deficientes, principalmente al ordenar correlaciones menos intensas e identificar relaciones causales. Mientras que para el

conocimiento especializado evaluaron la capacidad de valorar la idoneidad epistémica (Godino, 2013) de las tareas propuestas para sus potenciales estudiantes.

Probabilidad. La teoría de probabilidad proporciona herramientas para expresar, cuantificar y modelar la incertidumbre debida a la variabilidad aleatoria, aspecto que incluye fenómenos que se encuentran fuera del dominio de la estadística. En este sentido, la investigación sobre el conocimiento probabilístico en profesores puede organizarse según la clasificación propuesta por Pratt y Kazak (2018) sobre los intereses que han permeado la literatura previa: (1) desde una perspectiva psicológica en la identificación de heurísticas, sesgos y falacias de razonamiento (2) desde una visión histórico epistemológica considerando los distintos significados o aproximaciones de la probabilidad, y (3) desde una perspectiva basada en la modelación de fenómenos aleatorios a través de la probabilidad.

Los trabajos sobre *heurísticas y sesgos* se han basado principalmente en los aportes de Kahneman, Slovic y Tversky (1982) sobre aspectos cognitivos de las intuiciones que emergen al tomar decisiones en situaciones de incertidumbre. Por ejemplo, Batanero, Godino y Cañizares (2005) analizan la presencia de sesgos en el razonamiento probabilístico de 132 futuros profesores de primaria españoles antes y después de trabajar con tareas de simulación. Inicialmente, los autores destacan el uso de razonamientos inadecuados, como la heurística de la representatividad (esperar que una muestra sea semejante a la población sin importar su tamaño), el sesgo de la equiprobabilidad (todos los sucesos asociados a cualquier experimento tienen la misma probabilidad de ocurrir) y el enfoque en el resultado (interpretando un enunciado probabilístico de forma determinista), que disminuyeron considerablemente luego del uso de tecnología en las actividades de simulación.

Carter (2008) analizó el conocimiento estocástico de 210 futuros profesores de matemática estadounidenses, quienes presentaron mayores dificultades en los ítems sobre probabilidad. Entre sus resultados, el autor destaca la presencia de razonamientos erróneos, que ordenados de manera decreciente según su frecuencia de aparición fueron confundir probabilidades conjuntas con simples o condicionales, el sesgo de la equiprobabilidad, indiferencia al tamaño muestral, la falacia del jugador (pensar que si un hecho no ha ocurrido en el pasado es más fácil que ocurra en el futuro) y la heurística de la representatividad.

La tesis doctoral de Contreras (2011) representa una fuente de información valiosa sobre los conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional. Al respecto, lleva adelante un primer estudio de evaluación sobre la capacidad de calcular probabilidades simples, compuestas y condicionales a partir de datos presentados en una tabla de contingencia, en 183 futuros profesores de primaria españoles. Entre sus resultados,

el autor informa de las principales dificultades observadas, que según mayor frecuencia de ocurrencia corresponden a confundir probabilidades simples con compuestas o condicionadas, acudir a la falacia de la condicional traspuesta (intercambiar el suceso condicionante con el condicionado), confundir probabilidades conjuntas y condicionales, y calcular la probabilidad del complemento en vez del suceso requerido. En su segundo estudio, Contreras considera una muestra de 196 futuros profesores de secundaria españoles, a quienes aplica un cuestionario sobre probabilidad condicional tomado de Díaz (2007). El autor destaca un mejor rendimiento en comparación a los estudiantes de psicología de Díaz, aunque más deficiente en la definición de probabilidad condicionada y en la aplicación del teorema de Bayes. En cuanto a los errores de razonamiento condicional, el sesgo más común fue la falacia del eje del tiempo (creencia de que un suceso no puede condicionar otro que ocurra anteriormente), la falacia de las tasas base (ignorar la probabilidad a priori en problemas de probabilidad inversa), confundir sucesos independientes y mutuamente excluyentes, no diferenciar probabilidades conjuntas y condicionadas; y en menor número la falacia de la condicional traspuesta o de la conjunción (creencia de que es más probable la intersección de dos sucesos que la de cada uno por separado).

Kahneman (2011) adopta una nueva perspectiva con la que extiende sus trabajos previos sobre heurísticas y sesgos según la teoría dual, como parte de los sistemas de pensamiento uno (relativo a la intuición) y dos (razonamiento formal). Kahneman identifica que, cuando una persona se enfrenta a un cuestionamiento complejo tiende a responder algo más sencillo, aspecto que denomina sustitución de atributos (*attribute substitution*). En esta acción, la heurística se utiliza para describir el proceso cognitivo que tiene lugar durante la sustitución de atributos y, además como cualidad del atributo para desviar la atención de lo que se estaba cuestionando. Desde este enfoque, Chernoff (2012) analiza la capacidad de comparar probabilidades en una muestra de 59 futuros profesores de matemáticas canadienses, a través de una tarea de determinar la más probable entre dos secuencias de resultados de un examen de diez ítems cerrados con cuatro opciones de respuesta. El autor reporta que todos los participantes demostraron el proceso común de sustitución de atributos, quienes en lugar de evaluar las probabilidades relativas de las dos secuencias, consideraron otra propiedad asociada con las posibles respuestas de un examen (atributos heurísticos como la representatividad, clave de respuesta prototípica, tendencias del creador de la prueba o reconocimiento de patrones). Es decir, su juicio fue mediado por una heurística y sus respuestas fueron razonables, pero para una variedad de preguntas que no les habían hecho.

Mohamed (2012) analizó el conocimiento común de las probabilidades en 283 futuros maestros españoles, a través de un cuestionario de 15 ítems sobre intuiciones y conocimientos

probabilísticos tomados de investigaciones previas con escolares. Entre sus resultados, el autor reporta de un rendimiento global aceptable, con más del 70% de respuestas correctas en preguntas sobre el cálculo de probabilidades simples y condicionales, mientras que este no supera el 10% en los ítems de variable aleatoria. A su vez, entre los errores más frecuentes, Mohamed informa dificultades para diferenciar entre suceso seguro y posible, falta de razonamiento combinatorio y confusión con la noción de independencia, además de la presencia de razonamientos que acudieron al sesgo de la equiprobabilidad, la heurística de la representatividad y el enfoque en el resultado.

Kustos y Zelkowski (2013) examinaron la presencia de errores comunes usados por 40 futuros profesores de matemática estadounidenses en cuatro tareas de probabilidad. Entre sus resultados, se observaron dificultades para distinguir entre probabilidades simples y conjuntas, considerar efectos del tamaño muestral (aplicar leyes de convergencia sin considerar el tamaño de la muestra), la heurística de la representatividad y la falacia del jugador (creer que si un hecho no ha ocurrido en el pasado es más fácil que ocurra en el futuro).

En el marco de la tesis doctoral de Vásquez (2014), se analizó el conocimiento didáctico-matemático para enseñar probabilidad de 93 profesores chilenos de educación primaria, reportando que los participantes no fueron capaces de superar el 23% de respuestas correctas en ninguno de los aspectos evaluados. Respecto al conocimiento del contenido, los resultados sobre el conocimiento común fueron levemente superiores que respecto al conocimiento ampliado. Sin embargo, en ambos casos se observa el uso de la heurística de la representatividad, el sesgo de la equiprobabilidad y el enfoque en el resultado. La autora concluye destacando la urgencia de promover instancias de desarrollo profesional que permitan a los profesores mejorar, adquirir y desarrollar su competencia para enseñar probabilidad.

Chernoff, Vashchyshyn y Neufeld (2018) se interesan en analizar la naturaleza del razonamiento detrás de las heurísticas y sesgos comunes al comparar probabilidades por profesores de matemática en formación, en búsqueda del uso de razonamientos basados en la falacia de la composición (error de suponer que algo es verdad sobre el todo basado en verdades asociadas con partes del todo). Para ello, se pidió a 363 futuros profesores de matemáticas, organizados en tres estudios separados (de 106, 162 y 95 sujetos en cada uno) que compararan eventos relacionados con el lanzamiento de monedas y que determinaran cuáles tenían menor probabilidad de ocurrencia. En estos estudios, el 69%, 70% y 73% de los participantes, respectivamente, respondieron incorrectamente que todos los eventos tenían la misma probabilidad de ocurrir. Entre ellos, 26 de los 257 participantes que consideraron a los eventos equiprobables, se identificaron como evidencia del uso de la falacia de la composición. Los autores concluyen que, en general, estos participantes demostraron el uso del siguiente

razonamiento: los lanzamientos de monedas son equiprobables (la parte) y los eventos se componen de lanzamientos de monedas (el todo); por lo tanto, los eventos son equiprobables.

En segundo lugar, la investigación se ha interesado en los conocimientos sobre los *significados de la probabilidad*. Al respecto, desde una perspectiva histórica, Batanero, Henry y Parzysz (2005) han identificado cuatro aproximaciones o significados de esta noción. El clásico o apriori, que surge principalmente de los juegos de azar y bajo el supuesto de equiprobabilidad establece la ocurrencia de un evento como el cociente entre el número de casos favorables y posibles. El frecuencial o aposteriori, donde se asigna la probabilidad de eventos futuros a partir de regularidades observadas en las frecuencias relativas tras una serie grande de repeticiones del fenómeno aleatorio. El subjetivo, donde las probabilidades representan grados de creencia personal condicionados según el conocimiento y experiencia de la persona, donde el teorema de Bayes tiene un protagonismo principal. Y la formalización o significado matemático, donde se deduce una axiomática para la probabilidad sobre la base de la teoría de conjuntos y de la medida. En el currículo escolar, como parte de los contenidos de estocástica, se promueven usualmente las tres primeras aproximaciones (Batanero, 2005), con las que se establece una conexión entre la estadística y las probabilidades bajo un enfoque frecuentista para introducir la inferencia estadística, o desde una perspectiva subjetiva a través del teorema de Bayes.

Sobre esta base, encontramos algunas investigaciones centradas en el conocimiento probabilístico de los profesores según las aproximaciones mencionadas antes. En cuanto al enfoque subjetivo, retomando la tesis de Contreras (2011), previamente hemos mencionado sus principales resultados respecto a las heurísticas, sesgos y falacias relativas a la comprensión de la probabilidad condicional en 183 y 196 futuros profesores de primaria y secundaria españoles, respectivamente. Aquí nos referiremos a los resultados sobre el conocimiento de la definición y la capacidad para resolver problemas sobre probabilidad condicional. En cuando a los futuros maestros, más de un 60% es capaz de calcular correctamente probabilidades simples, pero menos un 40% lo hace en tareas sobre probabilidades compuestas o condicionales. Mientras que en la segunda muestra, se reporta un adecuado conocimiento formal, aunque menor respecto a la definición de la probabilidad condicional que para resolver problemas sobre este tema.

Dollard (2011) analizó el conocimiento de 24 futuros profesores de educación infantil estadounidenses sobre el término probabilidad y la capacidad de aproximar su valor según una perspectiva clásica o frecuencial, a través de entrevistas. Más de un 90% de los participantes tienen buenas concepciones asociadas al término probabilidad y responden adecuadamente a problemas donde es posible aplicar el significado clásico, como en el experimento de lanzar un

dado honesto. Sin embargo, el autor alerta que en experimentos donde el generador aleatorio tiene forma irregular, ninguno de los participantes es capaz de sugerir la estrategia de experimentación para obtener resultados e intentar aproximarse a la probabilidad desde un enfoque frecuencial. Más aún, tras sugerirles la idea, menos de la mitad de los participantes fue capaz de llegar a una respuesta correcta.

En el marco del enfoque clásico, Ortiz, Batanero y Contreras (2012) investigaron el conocimiento probabilístico de 167 futuros profesores de primaria españoles, en el análisis de si un juego es o no equitativo. Entre sus resultados, los autores destacan un buen razonamiento probabilístico en más del 70% de los participantes, quienes usaron principalmente estrategias multiplicativas de comparación de cocientes o de correspondencia al establecer algún criterio de proporcionalidad como fracción. Mientras que quienes aplican razoamientos erróneos establecen comparaciones únicamente entre los casos favorables o posibles por separado.

La tesis doctoral de Gómez-Torres (2014) ha aportado con antecedentes sobre el conocimiento común y ampliado de la probabilidad según las aproximaciones clásica, frecuencial y subjetiva en 157 futuros maestros españoles, a través de un cuestionario diseñado y validado para este fin (Gómez-Torres et al., 2016). Entre sus resultados sobre la comprensión del significado clásico, los futuros profesores presentaron un conocimiento común adecuado, para quienes fue sencilla la enumeración del espacio muestral, la comparación de probabilidades en urnas y el cálculo de probabilidades conjuntas en experimentos independientes. Mientras que su conocimiento ampliado fue más deficiente, mostrando principalmente errores de razonamiento proporcional y al usar el sesgo de la equiprobabilidad en experimentos compuestos. Respecto al significado frecuencial, se observaron dificultades en ambas categorías de conocimiento. Aunque la mayoría de los participantes demuestra una buena percepción del valor esperado en un problema de probabilidad frecuencial (común), en ítems sobre el conocimiento ampliado predominan errores sobre la variabilidad en el muestreo y el sesgo de equiprobabilidad (Gómez-Torres, Batanero y Contreras, 2014). Finalmente, en cuanto al significado subjetivo, tanto el conocimiento común como ampliado fue deficiente en esta muestra, donde menos de un tercio de los participantes responden bien un ítem de probabilidad conjunta en experimentos dependientes, y menos de un quinto el único problema de probabilidad condicional. La autora asocia estos resultados a la escasa atención que se le presta a este significado en la formación de maestros.

Parraguez, Gea, Díaz-Levicoy y Batanero (2017) analizaron la capacidad de conectar las aproximaciones clásica y frecuencial de la probabilidad en 60 futuros profesores de educación primaria españoles, mediante un cuestionario escrito. Entre sus resultados, los autores destacan que más de un 70% los participantes no tienen mayores dificultades para

calcular probabilidades en el enfoque clásico. Sin embargo, los futuros maestros tuvieron mayores problemas para estimar probabilidades según el enfoque frecuencial (menos de un tercio de respuestas correctas), reflejando dificultades en la comprensión de la ley de los grandes números.

El tercer foco de interés en el campo, es la *modelización de fenómenos aleatorios* a través de las distribuciones de probabilidad y simulaciones. En este caso, las probabilidades establecen un puente de conexión entre procedimientos exploratorios e inferenciales de la estadística, al proporcionar herramientas para medir y evaluar la incertidumbre de una generalización más allá de los datos (Batanero y Borovcnik, 2016). Al respecto, se destacan conceptos clave como las nociones de aleatoriedad y variabilidad aleatoria (asociada al significado probabilístico de la variación), como también los vínculos entre las probabilidades y nuevas aproximaciones informales a la inferencia.

Desde una perspectiva didáctica, entendiendo a un modelo como una representación abstracta, simplificada e idealizada de un fenómeno, Chaput, Girard y Henry (2008) reconcentran tres pasos en la modelación estocástica: pseudo-concreto (contextualización del conocimiento previo), matematización (formalización y traducción a lenguaje formal) y validación (dar significado a los resultados y confrontarlos con las hipótesis del modelo propuesto). En este sentido, las características del conocimiento sobre las distintas aproximaciones o significados de la probabilidad revisadas en el apartado anterior, representan ejemplos sobre la capacidad de modelar fenómenos aleatorios en profesores.

Otro contexto de interés ha sido la modelación de juegos de azar. Volviendo al trabajo de Ortiz et al. (2012) con 167 futuros maestros españoles más del 70% de los participantes determina correctamente la esperanza matemática, mientras que los restantes demuestran dificultades para comparar las probabilidades de ganar o no el juego. Una situación similar ocurre en el estudio de Smith y Hjalmarson (2013) respecto a las concepciones de 32 futuros profesores de matemáticas sobre los procesos aleatorios involucrados en el juego de "piedra, papel, tijeras". Aunque la mayoría de los sujetos concluye que las elecciones de qué opción jugar no se generaron al azar, tuvieron dificultades para conciliar la equiprobabilidad de ganar o no cada partida. Kazak y Pratt (2017) exploran el uso de modelos probabilísticos al plantear estrategias para ganar distintos juegos de dados, usando material concreto y simulaciones, en 12 futuros profesores de matemática de Turquía. Entre sus resultados, se destaca positivamente el apoyo de tecnología para reconocer patrones de convergencia y fortalecer la confianza los participantes en las estrategias identificadas para ganar. Aunque, profundizando en las respuestas de tres sujetos, reconocen dificultades de razonamiento combinatorio para establecer los elementos del espacio muestral de cada juego.

A su vez, entre quienes se han interesado concretamente en las concepciones sobre la noción de aleatoriedad en futuros profesores, Batanero recurre a su proyecto “Intuiciones sobre el azar”, con el que hemos profundizado previamente en otros aspectos del conocimiento (Ruiz et al., 2009; Arteaga, 2011), donde los participantes deben comparar dos secuencias de 20 lanzamientos de una moneda, una inventada y otra real. Batanero, Arteaga, Ruiz y Roa (2010) informan de su evaluación en 215 futuros maestros españoles, mientras que Batanero, Arteaga, Serrano y Ruiz (2014) consideran otros 208 sujetos de la misma población. En ambos casos, se destaca que los participantes demuestran una buena concepción del valor esperado en una serie de lanzamientos (distribución binomial), pero tienen deficiencias para percibir la variabilidad aleatoria e independencia, ya que producen rachas más largas en las secuencias simuladas que reales. Además, predominan en proporciones similares concepciones de la aleatoriedad como una causa del azar, una cualidad impredecible, un sinónimo de equiprobabilidad, una ausencia de patrones u orden o como algo incontrolable. Es decir, en términos de la clasificación de Chaput et al. (2008), estos participantes completan correctamente las dos primeras etapas, pero no son capaces dar significado a los resultados y confrontarlos con las hipótesis iniciales (validación).

Además, gracias a la tecnología se han materializado recursos valiosos para la modelización de fenómenos aleatorios, como las técnicas de re-muestreo (*repeated sampling*) basadas en simulaciones para aproximarse a la inferencia. Este término, es usado comúnmente para referirse a aquellos procedimientos que consideran la repetición reiterada de los procesos de muestreo (como el bootstrapping, jackknifing o las pruebas de permutación). Al respecto, Lee y colaboradores (Lee, 2018; Lee, Doerr, Tran y Lovett, 2016) profundizan en el rol crítico de los modelos de probabilidad en las técnicas de re-muestreo, que organiza según las tres R de Cobb (2007) en los procesos de aleatorización (*Randomize*) de los datos, repetición (*Repeat*) a través de la simulación y rechazo (*Reject*) de cualquier modelo que no se ajuste a los datos (Lee, 2018). Para ello, se basa en la literatura y las habilidades demostradas por 27 profesores (13 en formación y 14 en ejercicio) estadounidenses, quienes participaron en una asignatura que promovía el desarrollo de la modelación a través de actividades de provocación (*eliciting*), exploración y aplicación. Entre sus resultados, Lee et al. (2016) destacan la necesidad de vincular explícitamente el rol de las probabilidades e inferencia en el proceso de modelación, que organiza en cinco pasos (los dos primeros vinculados con la etapa de aleatorización, el tercero con la repetición y los dos últimos con el rechazo): (1) crear un modelo específico del contexto real en términos estadísticos; (2) crear un proceso de simulación que modele las acciones repetibles en el problema original y pueda usarse para generar muestras aleatorias; (3) explicitar la construcción de la distribución muestral del estadístico de interés a partir de las

muestras generadas; (4) concebir la distribución obtenida como una aproximación de la verdadera distribución de probabilidad; y (5) decidir sobre la posibilidad de que ocurra ese estadístico observado o uno más extremo según las hipótesis asumidas.

Por su parte, Pfannkuch y Ziedins (2014) se interesan en determinar las grandes ideas que sustentan el pensamiento y modelación probabilística, con el propósito de establecer nuevas metas para la enseñanza y aprendizaje de la probabilidad en la era actual. En este contexto, Pfannkuch et al. (2016) informan de los modos de pensamiento y aplicación de los modelos probabilísticos de siete expertos en diversas áreas de conocimiento. En cuanto a la descripción del pensamiento probabilístico involucrado al resolver problemas de modelación, se destacan principalmente al conocimiento del contenido y el contexto, quienes interactúan en el desarrollo de cinco etapas interconectadas, y a veces simultáneas, hasta construir un modelo: (1) meta-imágenes de la probabilidad (una estática y otra como proceso), con las que se construye una (2) representación mental de la situación en (3) búsqueda de estructuras potenciales del sistema, (4) vinculando una serie de objetos probabilísticos (supuestos y distribuciones teóricas conocidas) para (5) construir un modelo. Además, en la búsqueda de estructuras en situaciones de incertidumbre, destacan cuatro bloques de conocimiento principales: la noción de aleatoriedad, distribución, condicionamiento y matemáticas (en términos de leyes y axiomas), que coinciden con las revisadas en los apartados anteriores. Sobre esta base, proponen el ciclo de modelación probabilística SWAMTU: Situación-Problema (Situation), Motivación (*Want-to-know*), Supuestos (*Assumptions*), Construir un modelo (*Model*), Valorar si el modelo tiene sentido, investigando y comparando sus propiedades (*Test*) y Uso en la aplicación del modelo (*Use*).

Muestreo e Inferencia. La inferencia representa una de las grandes ideas de la estadística, ya que dentro de ella la mayor parte del trabajo consiste en tomar una muestra aleatoria y usarla para estimar o tomar decisiones acerca de algún parámetro o característica de la población o proceso con el que se esté trabajando. Sin embargo, mediante un razonamiento inductivo no es posible llegar a la verdad de una proposición, lo que ha generado controversias en las aplicaciones de esta materia en distintos campos (López-Martín, Molina-Portillo, Contreras y Ruz, 2019). Diversas escuelas de estadística han proporcionado soluciones a esta situación, que pueden organizarse en: (1) inferencia frecuencial (apoyada en el significado frecuencial de la probabilidad), donde destacan las pruebas de significación de Fisher y las reglas de decisión entre dos hipótesis propuestas por Neyman y Pearson; y (2) la inferencia bayesiana, donde es posible asignar probabilidad a una hipótesis a partir de un grado de creencia personal (Batanero et al., 2017)

Además, en el escenario educativo actual, la inferencia estadística bajo un enfoque frecuencial, que muchas veces representa una mezcla entre los enfoques de Fisher y Neyman-Pearson (Batanero et al., 2017; Makar y Rubin, 2018), ha ido incorporándose cada vez más en los currículos escolares; mientras que los responsables de su enseñanza, profesores de matemática, en la mayoría de los casos no tiene la preparación suficiente para hacerlo y hasta presentan los mismos problemas que sus estudiantes (Groth y Meletiou-Mavrotheris, 2018; Harradine et al., 2011). Una explicación a estos problemas es que la correcta aplicación de la inferencia requiere de la comprensión y discriminación de una amplia gama de conceptos (Castro-Sotos, Vanhoof, Van den Noortgate y Onghena, 2007), provocando que una persona cuya formación fuese deficiente en alguno de ellos, tienda a confundirse y aplicar la inferencia de una manera mecánica. Por esta razón, en lo que sigue, complementamos y actualizamos las dificultades en el aprendizaje de diversos conceptos que intervienen en los procedimientos inferenciales en profesores, como la comprensión del muestreo y las distribuciones de los estadísticos de resumen (distribuciones muestrales), los intervalos de confianza y los contrastes de hipótesis.

Conceptos clave como el *muestreo* (entendido como las técnicas estadísticas para la recolección de muestras) y las *distribuciones muestrales*, implican equilibrar entre dos ideas, la representatividad muestral (que indica si la muestra tendrá características similares a las de la población) y la variabilidad muestral (que sugiere que no todas las muestras extraídas de una misma población son iguales entre sí). Por ejemplo, en el ámbito de los contrastes de hipótesis o los intervalos de confianza, sus procedimientos consideran el trabajo con una única muestra, utilizada para cuantificar el grado de atipicidad de ella respecto a las muchas otras que se pudieron recoger. Sin embargo, la literatura previa, aunque escasa, ha informado que la comprensión de estos temas por profesores en ejercicio o formación es deficiente y mecánica, al igual que en la población general (Chance et al., 2004; Groth y Meletiou-Mavrotheris, 2018).

Groth y Bergner (2005) se interesaron por el conocimiento del contenido puesto en juego por 54 futuros maestros estadounidenses al inventar metáforas sobre el concepto de muestra. La mayoría de sus participantes demostraron una visión limitada de esta noción, que asociaron principalmente como parte de un todo o una colección de objetos, y casi un cuarto de ellos no fue capaz de superar esta tarea.

Noll (2011) analiza el conocimiento del contenido sobre muestreo en 68 profesionales asistentes de la enseñanza (*graduate teaching assistants*) de la estadística en los primeros cursos de 18 universidades de EE.UU. Los participantes demostraron un conocimiento teórico considerable de las distribuciones de probabilidad. Sin embargo, experimentaron dificultades

al hacer predicciones utilizando distribuciones muestrales empíricas, reflejando problemas para articular los conceptos detrás de la teoría con la que están familiarizados.

Green y Blankenship (2014) también se interesan en esta población de sujetos, pero informan sobre el diseño de una asignatura para fortalecer el conocimiento del contenido más allá de los cálculos, detallando en lo referido a las distribuciones muestrales. Basadas en las bitácoras de eventos registrados por 34 participantes en el curso, las autoras destacan un fortalecimiento en el conocimiento y confianza sobre el tema, pero al definir qué son las distribuciones muestrales se refieren solo a la media y al teorema central del límite, y al igual que Noll (2011), destacan la dificultad para diferenciar entre las distribuciones muestrales teóricas y empíricas.

Meletiou-Mavrotheris, Kleanthous y Paparistodemou (2014) se interesan en analizar el conocimiento sobre la noción de muestra estadística y las técnicas de muestreo en 42 futuros profesores de Chipre. Los autores concluyen que sus participantes tienen un conocimiento parcial del muestreo y que comparten algunas de las dificultades identificadas previamente en estudiantes, como asociar la noción de representatividad muestral con equidad (*fairness*) o no reconocer sesgos de muestreo entre distintos métodos propuestos.

Retomando los resultados de la tesis de Gómez-Torres (2014), la autora informa sobre el conocimiento del contenido (común y en el horizonte matemático según Ball et al. 2008) sobre el muestreo en los mismos 157 futuros maestros españoles (Gómez-Torres et al., 2018). Entre sus resultados, los autores informan de un razonamiento probabilístico en general deficiente en el contexto del muestreo. Respecto al conocimiento común, al estimar las características de una población conociendo información de una muestra, los participantes demuestran un razonamiento mayormente aditivo (confundiendo entre la intersección y unión de eventos) en vez de multiplicativo o proporcional, así como una comprensión deficiente de la relación entre probabilidad y frecuencia relativa. Mientras que para el conocimiento en el horizonte matemático, se consideraron tareas en que se conoce a la población y se estiman características de la muestra, donde solo un quinto responde correctamente, predominando un razonamiento insensible al tamaño muestral.

A su vez, los *Intervalos de Confianza* (IC) representan uno de los procedimientos clásicos de la inferencia, que consiste en determinar un intervalo de valores reales a partir de una muestra aleatoria, entre los cuales sea altamente probable que esté contenido el verdadero valor de un parámetro poblacional de interés. Además, representan un procedimiento que da sentido a la ausencia de significación estadística, por lo que diferentes asociaciones profesionales como la American Psychological Association (APA), American Educational Research Association (AERA) y National Council on Measurement in Education (NCME)

recomiendan su uso de forma complementaria a los contrastes de hipótesis (López-Martín, Molina-Portillo, et al., 2019). Mientras que Cummin (2014) mantiene una perspectiva más radical y en su propuesta *the new statistics* recomienda basar las prácticas inferenciales en investigación en analizar el efecto del tamaño muestral, los IC y el meta análisis, omitiendo totalmente a los contrastes de hipótesis.

En cuanto a las concepciones acerca de los IC, si bien las investigaciones que han centrado su atención en este objeto no han logrado la popularidad que han tenido otros tópicos de la estocástica, en los últimos años se han realizado importantes hallazgos en el nivel universitario, principalmente con estadísticos y futuros ingenieros (Behar, 2001; Olivo, 2008) o estudiantes de psicología (Cumming y Fidler, 2005). Al respecto, Morey, Hoekstra, Rouder, Lee y Wagenmakers (2016) organizan la literatura previa en términos de falacias sobre los razonamientos erróneos más comunes al interpretar un IC, contruidos desde un enfoque frecuencial. Entre ellas, se destaca la falacia fundamental de la confianza (podemos tener un $X\%$ de confianza o probabilidad de que el intervalo observado contiene el verdadero valor del parámetro), la falacia de la precisión (creer que la amplitud de un IC indica la precisión de nuestro conocimiento sobre el parámetro) y la falacia de la viabilidad (*likelihood*) (creer que los valores dentro del IC son más probables, creíbles o razonables que los que están fuera). En este sentido, podemos asociar esta situación al hecho de no reconocer el carácter aleatorio de los extremos de un IC, aspecto que se pierde al calcular su valor en una muestra particular. Otras dificultades guardan relación con la construcción de IC para el parámetro de proporción, que parece más compleja que para la media (Olivo, 2008), o en la comprensión de la interacción entre los distintos objetos que componen un IC, como el tamaño muestral, la amplitud del intervalo y su nivel de confianza (Fidler y Cumming, 2005).

En profesores, las investigaciones previas han sido aún más escasas (Harradine et al., 2011). Entre ellas, destacamos el trabajo de López-Martín, Batanero y Gea (2019), quienes se han interesado en evaluar el conocimiento del contenido de 73 futuros profesores de matemática españoles, por medio de una tarea sobre construir e interpretar un IC. Entre sus resultados, las autoras destacan que más de un 70% de los sujetos fue capaz de construir el IC, pero sorprende que más de dos quintos de los participantes no aportara alguna interpretación. Casi un tercio fue capaz de hacerlo adecuadamente, mientras que los demás recurrieron a alguna de las falacias mencionadas previamente, como la falacia fundamental de la confianza y una versión determinista de la falacia de la viabilidad (el IC debía contener, con seguridad, el valor del parámetro).

Por otro lado, los *contrastos o pruebas de hipótesis* también representan un componente esencial de la inferencia estadística, cuyas aplicaciones se pueden remitir a todos los campos

que usen datos. Sin embargo, la situación es similar al caso anterior, donde la investigación a proliferado principalmente en universitarios o investigadores, considerando escasamente a profesores (Dolor y Noll, 2015; Harradine et al., 2011; Makar y Rubin, 2018). En este sentido, la literatura previa ha reportado que la comprensión de este contenido implica el dominio de una gran diversidad de conceptos, lo que se ha traducido en la identificación de variados errores y dificultades asociados. En cuanto a las hipótesis del contraste, se han reportado problemas para determinar la hipótesis nula y alternativa, que además de confundirse entre sí, suelen entenderse como hipótesis a demostrar o definirse respecto a la población o muestra y no al parámetro de interés (Castro-Sotos et al., 2007; Harradine et al., 2011; López-Martín, Molina-Portillo, et al., 2019; Vallecillos, 1999; Vera et al., 2011). También se han notificado problemas para elegir el tipo de contraste, entre unilateral o bilateral, o confundir entre parámetro y estimador muestral (Ramos et al., 2009; Vallecillos, 1999). Sobre las concepciones de la lógica los contrastes de hipótesis, se han identificado diferentes concepciones acerca del tipo de validación de las hipótesis que constituyen este procedimiento: como una regla de decisión para aceptar una de las dos hipótesis contrastadas, como un procedimiento para obtener soporte empírico para las hipótesis analizadas, como una demostración probabilística de las hipótesis, o como prueba matemática de la verdad de las hipótesis (concepción determinista) (Castro-Sotos et al., 2007; Harradine et al., 2011; Inzunza y Jiménez, 2013; Vallecillos, 1994). En este sentido, si bien las dos primeras concepciones son correctas y se acercan a las lógicas de Neyman-Pearson y Fisher respectivamente, las dos últimas son incorrectas. Además, sobre la interpretación del nivel de significación y del p-valor, es usual el uso de la falacia de la condicional traspuesta (intercambiar los términos de la probabilidad condicional) o asociar este valor con la probabilidad de la hipótesis nula o alternativa (Inzunza y Jiménez, 2013; Reaburn, 2014; Vallecillos, 1999).

En cuanto a los resultados en profesores, Liu y Thompson (2009) analizan el conocimiento sobre los contrastes de hipótesis demostrado por ocho profesores estadounidenses, en el marco de un seminario de desarrollo profesional sobre enseñanza de la estocástica. Entre sus resultados, se destaca que los participantes no fueron capaces de razonar adecuadamente sobre las distribuciones muestrales, tanto en el proceso de realización como interpretación de un contraste. Además, informan de dificultades observadas previamente en estudiantes, como la creencia de que rechazar una hipótesis nula significa probar que está equivocada (concepción matemático-deductiva) o no reconocer a los contrastes como un procedimiento para realizar inferencias estadísticas.

Dolor y Noll (2015) se interesan en analizar la capacidad de un grupo de 12 profesores (seis en formación y seis en ejercicio) para determinar una secuencia viable de pasos sobre un

contraste de hipótesis a partir de datos categóricos (similar a la prueba Chi-cuadrado de bondad de ajuste). En su propuesta, desde una aproximación informal, los autores identificaron siete etapas: (1) Comenzar con una pregunta de investigación y su respectiva hipótesis; (2) Recoger datos relevantes; (3) Generar o diseñar un procedimiento para elegir un estadístico muestral; (4) Generar una distribución muestral empírica a través de simulación, basados en la hipótesis nula; (5) Determinar qué tan inusual o improbable es el estadístico observado en relación a la distribución muestral; (6) Concluir los resultados del contraste; y (7) Interpretar. Al respecto, valorizan positivamente la secuencia propuesta, con la que se evidencia un acercamiento a nociones como la distribución muestral empírica y los valores de corte para estadísticos considerados inusuales.

Finalmente, volviendo a trabajo de López-Martín et al. (2019) con 73 futuros profesores de matemática españoles, las autoras también evaluaron la capacidad de interpretar un contraste de hipótesis. Entre sus resultados, informan que más de cuatro quintos de los participantes fue capaz de tomar la decisión correcta, pero comete algún error en la interpretación de los resultados (p-valor como probabilidad de la hipótesis, asumir que la hipótesis nula es falta y contextualizar erróneamente los resultados). Mientras que menos de un 40% toma la decisión e interpreta adecuadamente los resultados.

Por otro lado, dada la importancia de entender y razonar acerca de la inferencia estadística y las dificultades que presentan los estudiantes al enfrentarse a este tipo de tareas, nace una nueva corriente denominada *Inferencia Informal* (Makar et al., 2011; Makar y Rubin, 2018; Rossman, 2008; Zieffler et al., 2008) o *aproximación informal a la inferencia* (Batanero et al., 2017). En este contexto, la idea consiste en exponer a los estudiantes a usar métodos que les permitan razonar a partir de datos empíricos y simulaciones, a través de argumentos que no emplean procedimientos formales, comúnmente vinculados a la distribución normal. Para ello, comúnmente se ha recurrido a los métodos de re-muestreo (Rossman, 2008; Rossman y Chance, 2014; Watson y Chance, 2012) o a técnicas basadas en una aproximación Bayesiana a la inferencia (Batanero y Borovcnik, 2016).

El uso de este tipo de procedimientos con un fin educativo no tiene más de 20 años, en los cuales han sido considerados útiles para transitar entre los procedimientos descriptivos e inferenciales tanto en el nivel escolar como universitario. En este sentido, Makar y Rubin (2018) organizan en cinco los principales aspectos que han sido considerados en la literatura para describir esta corriente. Representan postulados que van más allá de los datos; se expresan con cierto grado de incertidumbre; usan datos como evidencia; consideran un conjunto de datos representados por estadísticos de resumen; e integran el contexto. Al respecto, la literatura interesada en el conocimiento de este tema en profesores es casi inexistente, ya que la

disponible se ha interesado en su capacidad para incluir estos temas en la enseñanza (Leavy, 2010, 2015). No obstante, Groth y Meletiou-Mavrotheris (2018) concluyen que, al promover nuevos repertorios didácticos sobre ideas estadísticas a través de investigaciones con datos reales y simulados por computadora, puede ayudar a los profesores a desarrollar un adecuado razonamiento inferencial informal y contribuir a una comprensión más sofisticada de la lógica de la inferencia formal. Por tanto, en lo que sigue revisaremos los principales hallazgos de De Vetten, Schoonenboom, Keijzer y van Oers (2019), a los que sumamos algunos revisamos previamente según otro contenido como central, pero desde una lógica informal (Canada, 2008; Dolor y Noll, 2015; Peters y Kopeikin, 2016; Casey y Wasserman, 2015).

De Vetten et al. (2019) se interesan en describir el conocimiento del contenido sobre inferencia informal en una muestra de 722 futuros profesores de los Países Bajos, a través de una encuesta virtual. Los resultados fueron organizados según la capacidad de los participantes para aplicar tres de los cinco aspectos considerados por Makar y Rubin (2018): usar los datos como evidencia, plantear generalizaciones que van más allá de la muestra disponible y referirse a la incertidumbre en sus inferencias. En cuanto al primero, la mitad de los profesores en formación reconocieron que los datos pueden ser usados como evidencia de una generalización; aunque cuando no se les entregó una muestra de datos, la mayoría destacó como más valiosa a las creencias y experiencias personales. Sobre el segundo, casi un 90% de los participantes entendió que hacer generalizaciones deterministas es imposible. Mientras que, sobre la incorporación de la incertidumbre en sus inferencias, la mitad de los encuestados evaluaron correctamente afirmaciones sobre tamaños de muestra adecuados, pero solo alrededor de un tercio prestó atención al tamaño de la muestra en sus respuestas abiertas, y menos del 40% de los sujetos vinculó la viabilidad de plantear generalizaciones con el uso de un método de muestreo y un tamaño de muestra adecuados.

Finalmente, a modo de síntesis, a lo largo de esta sección revisamos una amplia gama de investigaciones previas, la mayoría centradas en profesores de educación infantil y primaria, tanto en ejercicio como formación, cuya frecuencia fue disminuyendo en la medida que nos acercábamos a los temas de probabilidad e inferencia. Por ello, resaltamos como un aporte valioso el concentrar la atención en estos temas y en profesores de niveles superiores, como secundaria y bachillerato, más aún de latitudes que no han sido tan exploradas, como Chile. A su vez, otro aspecto destacable es que, comúnmente las investigaciones revisadas se interesaron en un contenido específico de la estocástica, y sin importar cual fuera, se han reportado persistentemente problemas en el conocimiento de los profesores. Por tanto, con el interés de complementar estos resultados, en lo que sigue detallamos los principales aportes llevados a cabo en el área de las actitudes hacia la estadística, centrándonos en profesores.

Estudios sobre Actitudes hacia la Estocástica.

Las actitudes hacia la estadística han sido un aspecto de interés creciente para investigadores y educadores estadísticos desde hace más de 70 años (Bendig y Hughes, 1954), consolidándose como un objetivo de la reforma educacional en torno a su enseñanza (Tishkovskaya y Lancaster, 2012). En este sentido, Gal, Ginsburg y Schau (1997) destacan su importancia por influir en (1) el proceso de enseñanza y aprendizaje; (2) el uso de la estadística fuera del contexto escolar; y (3) la decisión de continuar estudios futuros sobre el tema. Como resultado, existe gran número de investigación relacionada con evaluar las actitudes de los estudiantes, motivada principalmente por predecir el rendimiento académico en cursos de estadística y monitorear los cambios actitudinales antes y después de la instrucción (Carmona, 2004; Nolan, Beran y Hecker, 2012). Entre ellas, se destacan como más usados:

- La escala Statistics Attitude Survey (SAS) de Roberts y Bilderback (1980), diseñada para predecir el rendimiento en estadística a partir de las actitudes hacia la materia de sus estudiantes.
- La escala Attitudes Toward Statistics (ATS) de Wise (1985), elaborada para medir el cambio actitudinal en estudiantes universitarios al comienzo y término de un curso de introducción a la estadística, con el interés de evaluar una estructura bidimensional de la escala, actitudes hacia la estadística como asignatura y su uso en lo profesional.
- La Escala de Actitudes hacia la Estadística (EAE) de Auzmendi (1992), destacada como precursora de este tipo de estudios en lengua castellana, propone una estructura multidimensional de cinco componentes: (1) Utilidad subjetiva sobre el conocimiento estadístico desde una perspectiva afectiva y comportamental; (2) Ansiedad manifestada ante la materia; (3) Confianza para enfrentarse con la estadística; (4) Agrado que produce el trabajo estadístico; y (5) Motivación hacia el estudio y uso.
- La Survey of attitudes Toward Statistics 1 (SATS-28) de Schau, Stevens, Dauphinee y Del Vecchio (1995), quienes proponen una estructura multidimensional de cuatro componentes: (1) Afectivo: sentimientos positivos o negativos hacia la estadística; (2) Competencia Cognitiva: acerca del conocimiento y habilidades intelectuales aplicadas a la estadística; (3) Valor: utilidad, relevancia y valor de la estadística en la vida personal y profesional; y (4) Dificultad percibida hacia la estadística como asignatura.
- La Survey of attitudes Toward Statistics 2 (SATS-36) de (Schau, 2003), quien propone una nueva versión de la SATS donde incorpora dos nuevos componentes, sobre el Interés (nivel de atracción personal de los estudiantes hacia la estadística, con cuatro

ítems) y Esfuerzo (cantidad de trabajo que los estudiantes gastan en aprender estadística, con cuatro ítems), que se suman a los cuatro anteriores.

En la Tabla 1 presentamos algunas características estructurales y psicométricas de los instrumentos mencionados como: el número de reactivos y de opciones de respuesta, las dimensiones o componentes consideradas; el alfa de Cronbach como índice de confiabilidad; la correlación entre los resultados de la escala y alguna variable sobre la evaluación del conocimiento estadístico o escala anteriormente validada, como indicador de la validez predictiva del instrumento; y algunas referencias a su validez estructural.

Tabla 1

Principales características de las escalas mencionadas

Característica	Escala de actitudes hacia la estadística				
	SAS	ATS	EAE	SATS-28	SATS-36
Nº Ítems	34	29	25	28	36
Nº opciones	5	5	5	7	7
Componentes	1	2: Curso y Campo profesional	5: Utilidad, Ansiedad, Seguridad, Agrado y Motivación	4: Afectivo (A), Competencia cognitiva (CC), Valor (V) y Dificultad (D).	6: Los cuatro de SATS-28, más Interés (I) y Esfuerzo(E)
Consistencia interna	0.95	Curso: 0,90 Campo profesional: 0,92, con muestra 1	Puntuación total entre 0,87 y 0,90	A: 0,81 – 0,85 CC: 0,77 – 0,83 V: 0,80 – 0,85 D: 0,64 – 0,77	A: 0,81 pre, 0,85 post CC: 0,84 pre, 0,86 post V: 0,87 pre, 0,90 post D: 0,76 pre, 0,79 post I: 0,89 pre, 0,91 post E: 0,81 pre, 0,77 post
Validez predictiva	Correlación entre 0,33 y 0,54 con un examen de estadística.	Curso: 0,27 Campo: -0,04.	Correlación de 0,86 con la escala SAS	Correlaciones que varían de 0,34 y 0,79 entre SATS-28 y ATS.	Correlaciones entre -0,17 y 0,39 con un test de estadística.
Validez estructural	Entre un 10 y 30% de varianza explicada según cada muestra.	2 factores explican un 49% de la varianza total.	5 factores explican el 60,7% de la varianza total.	Para 4 factores, el índice de bondad de ajuste de Tucker-Lewis (TLI) es 0,98.	AFC con 6 factores (CFI=0,95) se ajusta levemente mejor que con una combinación de 4 (CFI=0,94)

Fuente. Elaboración propia a partir de los resultados disponibles (Auzmendi, 1992; Carmona, 2004; Estrada, 2011; Nolan et al., 2012; Roberts y Bilderback, 1980; Schau et al., 1995; Schau y Emmioğlu, 2012; Vanhoof et al., 2011; Wise, 1985). *Nota.* CFI = Índice de ajuste comparativo.

Por otro lado, la literatura sobre el estudio de las actitudes de los profesores, tanto en ejercicio como en formación, es escasa (Estrada, Batanero y Lancaster, 2011; Groth y Meletiou-Mavrotheris, 2018) y entre la disponible, la tendencia ha sido usar alguno de los instrumentos mencionados anteriormente o proponer uno nuevo (muchas veces adaptado de los anteriores) que además considere actitudes hacia la enseñanza de la materia. Entre los primeros, destacamos los resultados de aplicar la escala ATS (Onwuegbuzie, 1998), SATS-28 (Estrada, 2002; Nasser, 2004) y SATS-36 (Hannigan, Gill y Leavy, 2013; Zientek, Carter, Taylor y Capraro, 2011) y sobre los segundos, resaltamos los resultados de usar la Escala de Actitudes hacia la Estadística y su Enseñanza (EAEE) para profesores de Estrada (2002) en España (Estrada, Batanero y Fortuny, 2004), Portugal (Martins, Estrada, Nascimento y Comas, 2015) y Perú (Aparicio y Bazán, 2006). Y, a su vez, las investigaciones que han utilizado una evolución de la EAEE aplicada al campo de las probabilidades, denominada Escala de Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza para profesores (EAPE) (Estrada et al., 2018; Estrada y Batanero, 2015) en Chile (Alvarado et al., 2018; Vásquez et al., 2019) y España (Estrada y Batanero, 2020).

Onwuegbuzie (1998) aplica la escala ATS para obtener datos normativos sobre las actitudes de 222 profesores estadounidenses y concluye que este grupo de profesionales tiene actitudes relativamente menos positivas que otros reportados hasta ese momento. Nasser (2004) analiza la asociación existente entre el rendimiento en estadística y las actitudes hacia la estadística con la escala SATS-28, en 162 futuros profesores de Israel. Entre sus resultados, la autora reporta actitudes positivas (sobre la puntuación de indiferencia) hacia los componentes afectivos, de competencia cognitiva y de valor, pero negativas (bajo la indiferencia) hacia el componente de dificultad. Estrada (2002), aplica una traducción al español de la escala SATS-28 en 367 futuros profesores de primaria españoles, reportando puntuaciones medias superiores al valor teórico de indiferencia, es decir positivas, tanto globalmente como en cada uno de los cuatro componentes de actitudes considerados en la SATS-28.

Entre quienes han usado la escala SATS-36 para evaluar este aspecto del dominio afectivo, Zientek et al. (2011) evalúan el efecto de las actitudes en el rendimiento de 95 futuros profesores de primaria estadounidenses. Entre sus resultados sobre actitudes, los participantes declaran una disposición positiva hacia la estadística en las componentes de valor, competencia cognitiva y esfuerzo, pero negativa en lo referido a los componentes afectivo, de interés y dificultad. Hannigan et al. (2013), quienes analizan la relación entre las actitudes y la comprensión conceptual de la estadística en 134 futuros profesores de matemática para secundaria irlandeses. Los autores informan que sus participantes declaran actitudes positivas

en cada uno de los seis componentes considerados en la SATS-36, aunque estas se acercan más a la posición neutral en la dificultad percibida hacia el curso de estadística.

Por otro lado, entre quienes proponen nuevas vías de acercamiento a aspectos afectivos en estos profesionales, Begg y Edwards (1999) analizan las actitudes y creencias sobre la enseñanza de la estadística en 34 futuros profesores de primaria a través de entrevistas, escalas de medición y mapas conceptuales. Entre sus resultados, la mayoría de los maestros en formación expresan actitudes negativas hacia la estadística. Estrada (2002), en su primer estudio, desarrolla un instrumento para evaluar específicamente este aspecto en profesores (EAEE) conformado por 25 ítems que consideran la interacción de seis componentes organizados según: (1) *Aspectos Antropológicos*, abarcando componentes de tipo *Social* (percepción del valor de la estadística en la sociedad), *Educativo* (interés en aprender y enseñar estadística); e *Instrumental* (percepción de la utilidad de la estadística en otras áreas); y (2) *Aspectos Pedagógicos*, que consideran tres componentes clásicos sobre cuestiones *Afectivas* (sentimientos personales hacia la estadística), *Cognitivas* (concepciones acerca de la estadística) y *Comportamentales* (tendencia a usar la estadística).

En este contexto, Estrada *et al.* (2004) reportan los resultados de aplicar la EAEE en 140 profesores de primaria (66 en ejercicio y 74 en formación) españoles, indicando que en general se observa una actitud positiva hacia la estadística en los seis componentes de la EAEE, aunque menos positiva en el grupo de futuros profesores. Posteriormente, Aparicio y Bazán (2006) usan la EAEE para analizar la relación entre actitud y rendimiento en estadística de 87 profesores en ejercicio peruanos. Sus resultados sobre actitudes fueron también positivos, tanto globalmente como en cada uno de los componentes de actitudes considerados. Martins *et al.* (2015) analizan las actitudes en 1.098 profesores del 1º y 2º ciclo de enseñanza portugueses, quienes reportan actitudes levemente positivas en ambos grupos, aunque más bajas en profesores del primer ciclo.

Por otro lado, Estrada y Batanero (2015) proponen la EAPE aplicada al campo de las probabilidades, donde se consideran siete componentes, agrupados en tres dimensiones: (1) *Actitudes hacia la probabilidad* y sus componentes Afectivo, de Competencia Cognitiva y Comportamental; (2) *Actitudes hacia la enseñanza de la probabilidad*, con componentes Afectivos, de Competencia Didáctica y Comportamentales; y (3) La valoración de la materia y su enseñanza, con el componente de *Valor hacia la probabilidad y su enseñanza*. Alvarado *et al.* (2018) aplicaron la EAPE en 122 profesores de matemática chilenos (70 en ejercicio y 51 en formación) reportando actitudes mayormente positivas en todos los componentes considerados y globalmente, aunque estas fueron menos positivas en el grupo de profesores en formación. Vásquez *et al.* (2019) usaron la EAPE para explorar diferencias actitudinales hacia

la estadística y la probabilidad y su enseñanza en una muestra de 124 futuras maestras de educación infantil chilenas. Los autores reportaron resultados mayormente positivos hacia ambos tópicos, aunque estos fueron más bajos al considerar los contenidos de probabilidad. A su vez, Estrada y Batanero (2020) aplicaron la EAPE en 416 futuros profesores de primaria españoles, reportando actitudes positivas en los siete componentes considerados en la escala.

A partir de los resultados anteriores podemos notar que, con el paso de los años, el interés por investigar aspectos actitudinales en profesores se ha ido especializando, proponiendo instrumentos que recogen adecuadamente las particularidades de estos profesionales. Esta situación es considerada también por Groth y Meletiou-Mavrotheris (2018), quienes sugieren el uso de instrumentos que establezcan una distinción clara entre las actitudes de los profesores “hacia la estadística” y las “hacia la enseñanza de la estadística”, que permitan explorar las características propias del quehacer profesional de los profesores, aspecto en el que profundizamos en el próximo capítulo. Por tanto, destinamos la siguiente sección a la revisión de la literatura sobre la relación entre el conocimiento y las actitudes hacia la estocástica.

Estudios sobre la Relación entre el Conocimiento del Contenido y las Actitudes.

Los estudiantes, en este caso profesores en formación, reaccionan positiva o negativamente a una situación de aprendizaje sobre estocástica en función de sus creencias sobre sí mismos y sobre el contenido. Si la situación se repite varias veces, produciendo el mismo tipo de reacción emocional (frustración, satisfacción, etc.) esta podría convertirse en una actitud (Estrada, 2002; Gómez-Chacón, 2000). Las actitudes negativas, a su vez, pueden afectar la voluntad de los profesores de incluir estos contenidos en el plan de estudios y de mejorar su comprensión sobre ellos. Sin embargo, como destacaron Groth y Meletiou-Mavrotheris (2018), hay varias hipótesis relacionadas con las actitudes que esperan su comprobación empírica. Por ejemplo, en estudios sobre el impacto de las actitudes en el conocimiento del contenido de los profesores, investigaciones previas han reportado una fuerza de asociación de moderada a baja entre estos aspectos (Estrada, 2002; Hannigan et al., 2013; Nasser, 2004; Zientek et al., 2011). Las actitudes negativas hacia la estadística parecen ser claramente perjudiciales, pero parece haber un límite en la medida en que las actitudes positivas se relacionan con un mayor conocimiento (Hannigan et al., 2013). Groth y Meletiou-Mavrotheris afirman que una posible causa de la evidencia limitada de correlaciones entre las actitudes y el conocimiento del contenido entre los profesores, en formación o ejercicio, es la falta de instrumentos diseñados específicamente para estos sujetos.

La mayoría de los estudios que han evaluado aspectos del conocimiento del contenido y actitudes hacia la estadística simultáneamente, lo han hecho de distintas formas en cada uno. El conocimiento del contenido se ha valorado comúnmente de acuerdo con las calificaciones obtenidas en las asignaturas sobre el tema o con pruebas de rendimiento previamente validadas, como los test SRA (Garfield, 2003) o CAOS (Comprehensive Assessment of Outcomes in Statistics) (delMas et al., 2007). Con las actitudes, la tendencia ha sido utilizar algunos de los instrumentos clásicos, entre los mencionados en el apartado anterior (SATS-28 y SATS-36), o proponer un nuevo instrumento que también considere las actitudes hacia la enseñanza, como la escala EAEE para profesores (Estrada, 2002).

Los hallazgos sobre la asociación entre las actitudes y el conocimiento del contenido de los profesores han sido poco claros, como se muestra en la Tabla 2. Entre ellos, Estrada (2002) y Aparicio y Bazán (2006) informaron correlaciones bajas (0.22 y 0.23 respectivamente) y puntuaciones, en promedio, moderadas en ambas escalas. Por otro lado, Nasser (2004) y Zientek et al. (2011) informan un rendimiento medio más alto en el conocimiento del contenido por parte de sus participantes (promedio de 85-87% del logro) y actitudes en promedio ligeramente más altas que el valor teórico de la indiferencia. Sin embargo, la intensidad de la asociación entre ambos aspectos difirió entre ambos estudios.

Tabla 2

Principales resultados sobre el conocimiento y las actitudes hacia la estadística en profesores

Referencia	Participantes	Conocimiento	Actitudes	Correlaciones (comp. actitud)
Estrada (2002)	367 futuros maestros de España	9 items del test SRA (media de 12.1 entre 19 puntos)	SATS-28 (media global de 88.7 entre 140 puntos)	0.09 (dificultad) a 0.26 (comp. cog.) y 0.23 respecto al total
Nasser (2004)	162 futuros profesores de Israel	10 preguntas abiertas (media de 85.38 entre 100 puntos)	24 items de la escala SATS-28 (media ponderada de 4.66 entre 7 puntos)	0.11 (dificultad) to 0.28 (comp. cog.)
Aparicio y Bazán (2006)	87 profesores peruanos	Rendimiento en un curso introductorio de estadística	EAEE (media de 83.49 entre 125 puntos)	0.22 (total en el post test)
Zientek et al. (2011)	95 futuros profesores de EE.UU.	Rendimiento en un programa de desarrollo profesional (87.03 entre 100 puntos)	SATS-36 (media ponderada de 3.29 entre 5 puntos)	0.14 (dificultad) a 0.49 (afectivo)
Hannigan et al. (2013)	104 futuros profesores Irlandeses	Test CAOS (media de 45 entre 100 puntos)	SATS-36 (media ponderada de 4.94 entre 7 puntos)	-0.02 (esfuerzo) a 0.19 (comp. cog.)

Fuente. Elaboración propia a partir de los resultados disponibles.

Por ejemplo, en el componente afectivo (sentimientos respecto a la estadística) compartido por las escalas SATS-28 y SATS-36, Nasser informó una correlación débil de 0.17 mientras que Zientek et al. reportan un valor de 0.49. Esta variación en los resultados podría explicarse por el uso de diferentes formas para valorar el conocimiento del contenido. Otro caso fueron los profesores en formación estudiados por Hannigan et al. (2013), quienes demostraron menor conocimiento del contenido (media del 45% de logro) pero actitudes mayoritariamente positivas, lo que se tradujo en una asociación débil entre ellos.

De esta manera, un conocimiento más sólido del contenido parece ser un predictor razonable de actitudes positivas hacia la estadística, pero no al revés. Por tanto, nos interesamos en explorar estas mismas asociaciones con una muestra de futuros profesores de matemáticas chilenos para los grados 7 al 12, según la Metodología descrita en el siguiente capítulo. Con ello, proseguimos a exponer las conclusiones de este capítulo.

Síntesis del Capítulo

En este capítulo, nos acercamos al problema de investigación y revisamos los principales antecedentes que orientaron el desarrollo de los estudios vinculados a esta tesis doctoral. Tras ubicar al profesor de matemática como uno de los principales agentes en la corriente reformista en torno a la enseñanza de la estocástica en la escuela, revisamos las principales propuestas teóricas que han conceptualizado el conocimiento necesario para llevar adelante esta tarea. Comenzamos en el campo de la educación matemática, profundizando en aquellos aportes que han generado mayor impacto en el campo de la educación estocástica de profesores. Posteriormente, revisamos las principales propuestas teóricas que han conceptualizado el conocimiento profesional del profesor de estocástica. Al respecto, destacamos al conocimiento del contenido como un factor común entre ellas, que ha sido valorado como un aspecto fundamental para desarrollar un adecuado conocimiento profesional sobre la enseñanza su enseñanza. Esta situación nos motivó a centrar el interés en este aspecto, por lo que destinamos la sección de antecedentes a revisar las principales investigaciones sobre el conocimiento del contenido de estocástica en profesores en formación o ejercicio. Además, debido a la estrecha relación entre aspectos cognitivos y afectivos desde una perspectiva pragmatista del conocimiento, revisamos aquellos estudios interesados en las actitudes hacia la estocástica en profesores, como también aquellas investigaciones centradas en la relación entre ambos aspectos en esta población.

Respecto al conocimiento del contenido, tras organizar los temas de estocástica según su consideración dentro de las siete nociones clave para el dominio de este tema en profesores,

pudimos observar que la investigación, aunque escasa, se ha centrado principalmente en profesores de educación infantil y primaria en formación. Comúnmente se han estudiado segmentadamente los tópicos de la estocástica. Entre ellos, los temas más frecuentes tuvieron relación con el análisis exploratorio de datos, concentrándose mayormente en las nociones de variación, distribución y gráficos. Mientras que las concepciones sobre la inferencia y las probabilidades ha sido menos prolífica. Sin embargo, más allá del tema, en todos ellos se concluye la necesidad de reforzar la formación estocástica del profesorado, quienes muchas veces reproducen los mismos errores y tienen las mismas dificultades que sus estudiantes.

En cuanto a las actitudes, la literatura en profesores también ha sido escasa y entre la disponible, la tendencia ha sido usar alguno de los instrumentos clásicos diseñados para estudiantes de cualquier grado, o proponer uno nuevo (muchas veces adaptado de los anteriores) que además considere actitudes hacia la enseñanza de la materia. Al respecto, notamos la tendencia a obtener una posición favorable hacia la estadística, aunque esta se torna levemente más negativa en algunos de los componentes abarcados según las distintas perspectivas teóricas consideradas.

Sobre la relación entre ambos aspectos (conocimiento y actitudes), la mayoría de los hallazgos han sido poco concluyentes. Las investigaciones previas destacan que un buen conocimiento del contenido se relaciona fuerte y positivamente con actitudes positivas hacia la estadística. No obstante, la asociación pierde intensidad cuando el conocimiento del contenido es suficiente (ligeramente superior al valor esperado) y las actitudes son más indiferentes, o cuando el conocimiento es deficiente, incluso cuando las actitudes son mayoritariamente positivas en profesores, tanto en ejercicio como en formación.

Sobre esta base, en el siguiente capítulo detallamos aspectos metodológicos que orientaron y organizaron esta tesis doctoral. Comenzamos refiriéndonos al marco teórico de referencia según las distintas etapas de recorridas. Posteriormente, planteamos el problema y definimos los objetivos e hipótesis de investigación, para finalizar con una breve descripción de los artículos que conforman los resultados de esta tesis, y su relación con el logro de los objetivos propuestos.

Capítulo 2

Metodología

Introducción

En este capítulo, se presentan los fundamentos metodológicos que permitieron el desarrollo de los distintos estudios enmarcados en esta tesis doctoral, cuya modalidad es la agrupación de publicaciones. Se comienza con el marco teórico, construido a partir de la revisión realizada en el capítulo anterior, de donde se seleccionan algunas herramientas del EOS, como la noción de idoneidad didáctica, para sistematizar las exigencias locales sobre la formación estocástica de profesores de matemática chilenos. A su vez, se expone la postura adoptada respecto a lo que se va a conceptualizar como conocimiento del contenido de estocástica. Y luego se detallan las bases teóricas utilizadas para describir las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza.

Posteriormente, se formaliza el problema central de investigación, relativo a la relación entre el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en profesores, del cual emerge el objetivo general de la tesis, que sistematizamos en torno a cinco objetivos específicos. Luego, se exponen las hipótesis iniciales respecto a las metas planteadas en base a las revisiones previas y la perspectiva teórica asumida. Sobre esta base, se describe la organización de esta investigación, que considera la secuenciación de siete artículos de investigación, de los cuales se mencionan brevemente aspectos metodológicos que son abordados en detalle en el siguiente capítulo. Se finaliza con una síntesis del capítulo.

Marco Teórico

Como se destacó en el capítulo anterior, el conocimiento profesional del profesor de estocástica se ha caracterizado en torno a diversos componentes, que dependen de la perspectiva adoptada en cada caso. Por ello, en lo que sigue se sintetizan aquellos aspectos teóricos que respaldaron concretamente los distintos estudios desarrollados en el marco de esta tesis. Por una parte, con el interés de sistematizar las exigencias y recomendaciones locales e internacionales sobre la formación estocástica de profesores chilenos, utilizamos la noción y criterios de Idoneidad Didáctica (Godino, 2013) propuestas en el EOS. Posteriormente, centramos nuestro interés en el conocimiento del contenido, que describimos desde el punto de vista del modelo de Conocimientos Didáctico-Matemáticos (CDM) (Godino, 2009), también

enmarcado en el EOS. Y finalizamos con una descripción de la perspectiva adoptada sobre las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en profesores.

Idoneidad Didáctica

Los elementos en los que se fundamenta la Teoría de Idoneidad Didáctica han sido introducidos de forma gradual al EOS (Godino et al., 2007), a partir de los trabajos de Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006), como herramientas de una didáctica normativa, orientada a la intervención efectiva en el aula. La noción de *idoneidad didáctica* es entendida como un criterio sistémico de pertinencia (adecuación al proyecto educativo) de un proceso de instrucción, respecto al grado de adaptación entre dos tipos de significados, los personales logrados por los estudiantes y los pretendidos o implementados según la institución de referencia. De esta forma, la idoneidad de un proceso de instrucción (pretendido o implementado) se define como la articulación coherente y sistémica de seis facetas y sus posibles interacciones entre sí (Godino, 2013):

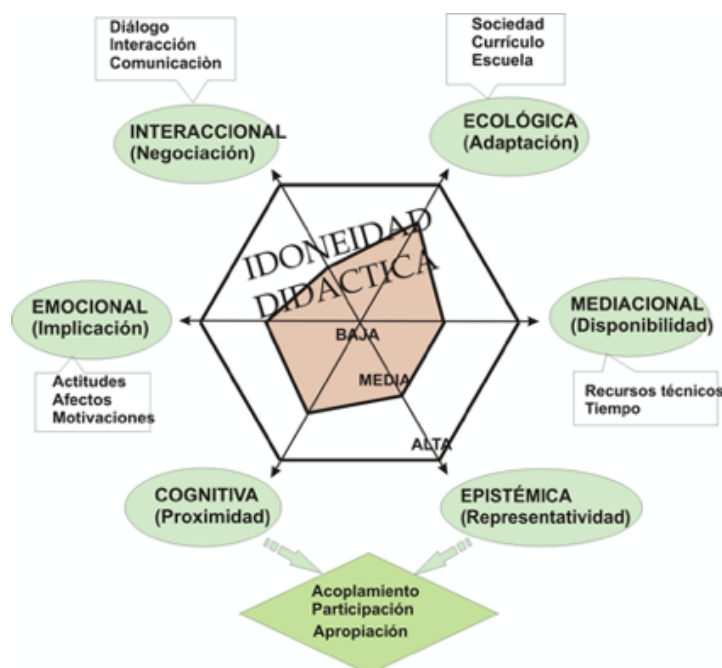
- *Idoneidad epistémica*: Referida al grado de representatividad de los significados institucionales pretendidos o implementados respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*: expresa el grado en que los significados pretendidos o implementados están en la zona de desarrollo potencial o son próximos a los significados personales de los estudiantes.
- *Idoneidad afectiva*: representa el grado de implicación (interés, motivación etc.) de los estudiantes con el proceso de estudio, que puede verse influenciado tanto por factores institucionales como personales.
- *Idoneidad interaccional*: refleja el grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas, que son parte del proceso de enseñanza y aprendizaje, identifiquen y resuelvan conflictos semióticos potenciales.
- *Idoneidad mediacional*: expresa el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje.
- *Idoneidad ecológica*: representa el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo institucional y a los condicionamientos del entorno en que se desarrolla.

En la Figura 15 se resumen las seis facetas descritas anteriormente, representadas por un hexágono regular, que hace alusión a un proceso de estudio programado, donde a priori se supone un grado máximo de las idoneidades parciales. Además, el hexágono irregular interno correspondería a las idoneidades efectivamente logradas en la realización de un proceso de estudio implementado.

A su vez, reconociendo la complejidad de evaluar la idoneidad de un proceso de instrucción, debido al gran número de aspectos que intervienen en él, Godino identifica una serie de componentes que articulan y sistematizan el análisis de cada una de las facetas mencionadas anteriormente. Godino (2013) propone una *Guía para la Valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de Instrucción Matemática* (GVID-IM), compuesta por una colección de indicadores que sintetizan los elementos y relaciones que intervienen en un proceso de instrucción matemática de cualquier nivel escolar. Mientras Godino, Batanero, Rivas y Arteaga (2013) adoptan el modelo CDM y desarrollan una evolución de la GVID-IM para convertirla en un instrumento de reflexión y valoración sobre procesos de instrucción en didáctica de la matemática, donde reconocen dos perspectivas.

Figura 15

Facetas de Idoneidad Didáctica



Fuente. Godino (2013, p. 116)

Por un lado, dentro de la faceta epistémica, organizan en seis contenidos didáctico-matemáticos (disciplinares, cognitivos, afectivos, interaccionales, mediacionales y ecológicos) los conocimientos institucionales sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática que intervienen en la labor profesional del profesor en formación, respecto a sus estudiantes. Mientras que un segundo foco de análisis abarca las cinco facetas restantes, que involucran al formador con sus estudiantes, respecto al aprendizaje (faceta cognitiva), intereses y motivaciones (faceta afectiva), modos de interacción (faceta interaccional), uso de recursos (faceta mediacional) y conexiones intra e interdisciplinares (faceta ecológica) en el proceso formativo. En este contexto, los autores diseñan la “Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de Instrucción en Didáctica de la Matemática” [GVID-IDM].

En el caso de la estadística, sobre la base de los resultados anteriores, Rivas (2014) diseña la *Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Formación Estadística* [GVID-PFE] y reporta los resultados de su uso en la valoración de un programa sobre estadística para profesores de primaria chilenos. Según el número de indicadores satisfechos en cada componente de análisis, el autor establece un criterio cualitativo organizado según: (1) *Idoneidad baja*, si el porcentaje de indicadores logrados es menor a 40; (2) *Idoneidad media*, cuando este valor es mayor o igual a 40, pero menor que 70; e (3) *Idoneidad alta*, si el porcentaje es mayor o igual a 70. Con ello, concluye un grado de idoneidad medio en términos epistémicos, mientras que bajo para las demás cinco facetas, siendo la referida a aspectos interaccionales aquella menos satisfecha. Con estos ejemplos, notamos que la noción de idoneidad didáctica y sus criterios, además de ser una herramienta para orientar la reflexión meta-didáctica sobre la práctica docente, proveen una guía para diseñar, implementar y valorar procesos de formación de profesores. En este contexto, destacamos la ausencia de un instrumento que organice los aspectos deseables de la formación del profesorado en didáctica de la estadística, que pueda complementar los esfuerzos llevados adelante en esta área.

En lo que sigue, se profundiza en la perspectiva teórica sobre el conocimiento del contenido asumida en esta investigación.

Conocimiento del Contenido

A partir de la revisión presentada en el Capítulo 1, se destaca que el conocimiento del contenido se ha concebido desde distintas perspectivas. Entre ellas, las más influyentes en el campo corresponden a la propuesta en el modelo PCK (como *Subject Matter Content Knowledge*), para referirse al conocimiento matemático per-se en la mente del profesor, o en el marco del modelo MKT (como simplemente *Subject Matter Knowledge*), donde se

distinguen tres tipos de conocimientos matemáticos necesarios para la enseñanza: común, en el horizonte y especializado. Aunque entre ellas, el conocimiento común del modelo MKT por sí solo, es más cercano a lo conceptualizado en el modelo PCK.

En el caso de la estocástica, la literatura se ha sustentado en el modelo PCK (Watson, 2001) y MKT (Burgess, 2011, 2012; O. González, 2016; Groth, 2007, 2013; Leavy, 2015; Noll, 2011), o en alguna mezcla entre ambos que además considere la tecnología (Huerta, 2018; Lee et al., 2014; Lee y Hollebrands, 2011). Sin embargo, para conceptualizar el conocimiento del contenido estocástico, estas propuestas tienen algunas debilidades. Por ejemplo, la perspectiva de Groth (2013) reconoce los tres tipos de conocimiento de la materia del modelo MKT, pero destaca la dificultad de separar el conocimiento especializado del conocimiento pedagógico del contenido, como el conocimiento del contenido y los estudiantes. Además, distinguir entre conocimiento especializado y común no siempre es trivial (Leavy, 2015; Noll, 2011). Mientras que la perspectiva de Lee (Lee et al., 2014; Lee y Hollebrands, 2011) o Burgess (2011, 2012), es más general con respecto al desarrollo del pensamiento estadístico, que describen según la perspectiva de Wild y Pfannkuch (1999) aplicada a cualquier proceso de investigación empírica.

Por tanto, utilizamos el modelo CDM (Figura 6) (Godino, 2009; Pino-Fan y Godino, 2015), que se basa en las herramientas teórico-metodológicas del EOS, y cuya aplicación a la estadística se desarrolló en Godino et al. (2011) (Figura 8). El modelo CDM caracteriza al conocimiento profesional del profesor de matemáticas desde tres dimensiones: (1) Matemática, relacionada con el conocimiento del contenido; (2) Didáctica, relativa al conocimiento del contenido pedagógico; y (3) Meta Didáctico-Matemática, que abarca el conocimiento de normas y meta-normas, y la capacidad de reflexionar sobre la práctica. En esta propuesta se establece una diferenciación clara en cuanto a los conocimientos necesarios para la enseñanza de la estocástica. Lo anterior, debido a que en este modelo el conocimiento para la enseñanza es enteramente especializado y exclusivo del profesor (dimensión didáctica), pero se sustenta sobre la base de un sólido conocimiento de contenido (dimensión matemática), y que en conjunto permiten la reflexión de las prácticas (dimensión meta didáctico-matemática). La dimensión matemática considera dos tipos de conocimiento, común y ampliado, como se define en la Tabla 3.

Tabla 3

Descripción de las categorías consideradas en la dimensión matemática del modelo CDM

Categoría	Definición
Conocimiento Común del contenido	Conocimiento que se considera suficiente para resolver los problemas propuestos en el currículo de matemática y en los libros de texto del nivel donde se enseñe.
Conocimiento Ampliado del contenido	Conocimiento que representa las bases matemáticas para vincular los contenidos escolares con niveles educativos posteriores.

Fuente. Pino-Fan y Godino (2015, p. 97)

Estas dos categorías son reinterpretaciones de ambos, el conocimiento de contenido común y el conocimiento en el horizonte matemático del modelo MKT, respectivamente. Este desarrollo se basa en la necesidad de organizar los conocimientos que debe poseer un profesor de matemáticas sobre los temas que deban ser enseñados en algunos grados escolares específicos. El término *común* se utiliza desde una perspectiva diferente al modelo MKT (Ball et al., 2008), ya que se trata de un conocimiento compartido (común) entre el docente y los alumnos, y no en general con todos; menos considerando que las directrices curriculares están en constante actualización. A su vez, es diferente al conceptualizado por Groth (2007) porque en este caso nos referimos concretamente al conocimiento de las estocásticas escolares del grado donde se enseñe, y no a las habilidades desarrolladas en los cursos convencionales en general. En cuanto al conocimiento ampliado, desde esta perspectiva no se trata solo de cómo se relacionan los temas en el plan de estudios o del conocimiento que va más allá de lo prescrito, sino que depende del nivel educativo considerado. Por ello, en nuestro caso, al referirnos a la formación estocástica del profesorado, diferenciaremos entre conocimiento común y ampliado respecto al currículo escolar actual. Estas pautas representan el límite entre el conocimiento estocástico que se considerará común entre el profesor y el alumno, o se ampliará como parte de la formación inicial del profesorado.

Por otro lado, el EOS (donde se enmarca el modelo CDM) asume una concepción pragmática y relativista de la comprensión matemática, donde se debe reconocer la dialéctica entre lo personal y las facetas institucionales del conocimiento y su comprensión. Es decir, el significado de un objeto no se concibe como absoluto y unitario, sino más bien como compuesto y relativo a los contextos institucionales. Además, en esta perspectiva pragmatista se enfatiza que para estudiar el conocimiento matemático o estocástico es valioso considerar aspectos afectivos que puedan condicionar la conducta y la capacidad de aprender, porque los procesos de aprendizaje producen reacciones afectivas. Por tanto, como se mencionó en el

capítulo anterior, decidimos considerar también un aspecto del dominio afectivo, como las actitudes, aspecto en el que se profundiza a continuación.

Actitudes hacia la Estocástica y su Enseñanza

La investigación sobre aspectos afectivos relativos a la estadística se ha establecido principalmente sobre la base de las perspectivas desarrolladas hacia las matemáticas (Groth y Meletiou-Mavrotheris, 2018). En ellas, no se ha podido establecer una definición clara de afecto o dominio afectivo (Gómez-Chacón, 2000), sino que ha dependido de la aproximación teórico-metodológica desde la cual se analice. Por ejemplo, Goldin et al. (2016) presentan una revisión global sobre diversos conceptos considerados dentro de este dominio (como actitudes, ansiedad, creencias, autoeficacia, entre otras), destacando que, aun usando una misma terminología, no se estudian dentro de él los mismos fenómenos, por lo que es fundamental esclarecer la perspectiva adoptada en cada caso.

En esta investigación, nos posicionamos desde la mirada de McLeod sobre el dominio afectivo, quien afirma que “se refiere a un amplio rango de creencias, sentimientos y estados de ánimo, que generalmente se consideran como algo más que el puro dominio de la cognición” (McLeod, 1992, p. 576). Con ello, usamos el término afecto en forma general y consideramos a las emociones, creencias y actitudes como sus principales descriptores, aunque nuestro foco de interés son las últimas. De esta forma, entendemos que la relación entre el dominio afectivo y el aprendizaje, no va en un único sentido, sino que los afectos condicionan el comportamiento y la capacidad de aprender, y a su vez el proceso de aprendizaje provoca reacciones afectivas (Estrada, 2002). Si un estudiante reacciona positiva o negativamente frente a una situación de aprendizaje matemático, y esta se reitera varias veces produciendo el mismo tipo de reacción afectiva (frustración, satisfacción, etc.) esta puede convertirse en actitud (Gómez-Chacón, 2000).

En este sentido, al igual que con el dominio afectivo, no existe unanimidad en la definición de *actitud*, ya que estas varían en función del pensamiento y contexto de cada investigador. Para Estrada (2002), esto se produce porque este aspecto no es observable directamente y debe ser inferido a partir de comportamientos externos (usualmente verbales), según la construcción teórica en que se enmarquen. En este sentido, podemos identificar diversas aproximaciones a su definición: “Son respuestas afectivas que consideran sentimientos positivos y negativos de moderada intensidad y razonable estabilidad” (McLeod, 1992, p. 581); “Son aspectos no directamente observables sino que inferidos, compuestos tanto por las creencias como por los sentimientos y las predisposiciones comportamentales hacia el

objeto al que se dirigen” (Auzmendi, 1992, p. 17); “Son predisposiciones evaluativas, positivas o negativas, que determinan las intenciones personales e influye en el comportamiento” (Gómez-Chacón, 2000, p. 23); “Son una suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período de aprendizaje de la materia objeto de estudio” (Estrada, 2002, p. 56); “Son maneras de actuar, sentir o pensar que muestran la disposición u opinión de un sujeto. Cambian más lentamente que las emociones, pero más rápidamente que las creencias” (Philipp, 2007, p. 259); “Se consideran un constructo mental, no directamente observable, sino que ha de ser inferido a partir de la valoración en una escala de actitudes o de la observación del comportamiento de los sujetos” (Batanero, 2009, p. 6).

A raíz de estas definiciones, podemos notar que en esencia con el término actitud se consideran sentimientos y predisposiciones hacia el objeto de interés, cuya estabilidad en el tiempo es mayor que las emociones, pero menor que las creencias. Por ello, en este estudio adoptamos la definición propuesta por Philipp (2007), que hacemos operativa desde la perspectiva de Batanero (2009). Con ello, tras adoptar una perspectiva teórica de la noción de actitud, seguimos la recomendación de Groth y Meletiou-Mavrotheris (2018) sobre basar la exploración de las actitudes de los profesores según perspectivas teóricas donde se establezca una distinción clara entre las “actitudes de los profesores hacia la estadística” o “actitudes hacia la enseñanza de la estadística”.

Por tanto, a partir de la revisión presentada en el Capítulo 1, destacamos los aportes de Estrada, quien propuso una de las primeras escalas destinadas a profesores (EAEE: Escala de Actitudes hacia la Estadística y su Enseñanza) (Estrada, 2002), desarrollada a partir de los fundamentos que enmarcan a escalas clásicas como la ATS (*Attitudes Toward Statistics*) (Wise, 1985) y SATS-28 (*Survey of attitudes Toward Statistics*) (Schau et al., 1995). Años después, Estrada et al. (2015) evolucionan la EAEE aplicada al campo de la probabilidad (EAPE: Escala de Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza). La Escala EAPE considera siete componentes actitudinales organizados en tres dimensiones: actitudes hacia el contenido, actitudes hacia su enseñanza y el valor otorgado a ambos (Estrada et al., 2018). De esta forma, basamos nuestra investigación en la perspectiva teórica de la EAPE, cuyas componentes y dimensiones se definen como se muestra en la Tabla 4.

Desde esta perspectiva, es posible explorar las actitudes de los profesores desde dos sentidos diferentes, respecto a su experiencia como estudiantes en el aprendizaje del contenido (dimensión 1) y en cuanto a su disposición frente a la acción de enseñar este tema (dimensión 2). Además, en la séptima componente se considera la valoración de ambos aspectos (dimensión 3).

Tabla 4*Descripción de las componentes de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza*

Dimensión	Componente	Descripción
1. Componentes hacia la probabilidad	Afectivo	Sentimientos del sujeto, positivos o negativos, hacia los contenidos de probabilidad.
	Competencia cognitiva	Percepción del sujeto sobre su propia competencia y capacidad intelectual hacia los contenidos de probabilidad.
	Comportamental	Tendencia a usar herramientas de la probabilidad cuando sea conveniente para tomar decisiones.
2. Componentes hacia la enseñanza de la probabilidad	Afectivo	Sentimientos personales, positivos o negativos, hacia la enseñanza de la probabilidad.
	Competencia didáctica	Percepción del profesor sobre su propia capacidad para enseñar los contenidos de probabilidad.
	Comportamental	Valora la tendencia a la acción didáctica en la enseñanza de la probabilidad, en comparación a otros temas del currículo escolar de matemáticas.
3. Valor hacia el contenido y su enseñanza	Valor	Considera el valor, utilidad y relevancia que el sujeto concede a los contenidos de probabilidad y su enseñanza en la vida personal y profesional.

Fuente. Estrada y Batanero (2015, p. 241-242)

En esta sección, se han revisado los aspectos teóricos en los que se sustentan los distintos estudios concretos vinculados a esta tesis doctoral. Sobre esta base, en la sección siguiente se establece el problema central de investigación, junto a los objetivos e hipótesis que dan sentido al desarrollo de las distintas etapas recorridas.

Problema de Investigación

Tras la revisión desarrollada en el Capítulo 1, se han establecido los fundamentos que han permitido abordar el problema central de esta investigación, relativo a que *los profesores de matemática no se sienten preparados para asumir la responsabilidad de enseñar estocástica en la escuela, ni tampoco son capaces de demostrar un conocimiento adecuado del contenido*. Por ello, valoramos a la formación inicial como una instancia clave para centrar la atención e identificar aspectos que puedan promover la mejora de dicho problema, con lo cual resaltamos el carácter diagnóstico de esta tesis. Como consecuencia de esta situación, se desprenden una serie de problemáticas concretas (atendidas parcialmente en los distintos estudios desarrollados) que se sintetizan a continuación junto a los objetivos de esta investigación.

Objetivos de investigación

Objetivo General (OG). Producto de la problemática principal descrita en el apartado anterior, nos planteamos el objetivo general de *analizar la relación entre el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en futuros profesores de matemática chilenos*. La importancia de este objetivo, resaltada en la sección 1.2, se deduce de la necesidad de proporcionar una mayor alfabetización estadística a los ciudadanos, lo que ha consolidado a los contenidos de estocástica en el currículo escolar y ha establecido nuevos desafíos para la formación del profesorado de matemática responsable de su enseñanza. Con ello, desde la perspectiva teórica presentada previamente., organizamos el logro de esta meta general a través de cinco objetivos específicos que se describen a continuación.

Objetivo Específico 1 (OE1). Determinar un sistema de indicadores de idoneidad didáctica que sistematice las exigencias esperadas sobre los conocimientos didáctico-estocásticos en los procesos de formación inicial de profesores de matemática chilenos.

Este objetivo se fundamenta en la necesidad de elaborar un modelo de referencia sobre las características deseables que debe tener la formación estocástica de profesores de matemática, que represente la base para la evaluación posterior del conocimiento y actitudes. Sin embargo, a pesar de nuestro interés concreto en estos aspectos, tras la revisión de la literatura y la perspectiva teórica adoptada, consideramos valioso ampliar la panorámica en esta etapa inicial y sistematizar también los requerimientos relativos a la enseñanza de este tema. Por tanto, a partir de las sugerencias establecidas internacionalmente y también para Chile, se espera establecer indicadores de idoneidad relativos a la enseñanza y aprendizaje de la estocástica. Además, con el interés de probar la pertinencia y utilidad del sistema de indicadores seleccionados, proyectamos su uso en la valoración de la idoneidad de algunos procesos de instrucción programados en didáctica de la estadística en Chile.

Objetivo Específico 2 (OE2). Construir y validar un instrumento de evaluación sobre el conocimiento del contenido de estocástica en futuros profesores de matemática.

Nos planteamos esta meta parcial a raíz de la revisión de los principales estudios sobre el conocimiento del contenido de profesores en ejercicio y formación. Pudimos notar que la tendencia ha sido concentrar la atención en la capacidad de dominar alguno de los temas o tópicos de estocástica, por medio de diversas herramientas de evaluación. Al respecto, además de evidenciar diversas deficiencias, destacamos la ausencia de instrumentos que consideren simultáneamente diversos aspectos del contenido. Por tanto, en el marco del modelo CDM,

esperamos aportar a la superación de este problema a través del diseño, construcción y validación de un cuestionario con el cual poder acercarse a evaluar el conocimiento del contenido común y ampliado de estocástica en profesores.

Objetivo Específico 3 (OE3). Explorar las actitudes de los futuros profesores de matemática hacia los contenidos de estocástica, según su organización en el currículo escolar chileno.

Este objetivo se motiva en el hecho de que en Chile, desde 2020, el plan de formación diferenciado Humanístico-Científico (grados 11-12) ha incluido una asignatura denominada probabilidad, y estadística descriptiva e inferencial (MINEDUC, 2019). En esta nueva asignatura, además de promover el desarrollo de habilidades y conocimientos específicos, se incluyen aspectos actitudinales. Por tanto, surge el problema de que la implementación de estas propuestas curriculares dependerá no solo de los conocimientos disciplinarios y didácticos de los profesores, sino también de su disposición e interés por la enseñanza de estas materias. En este contexto, entre las perspectivas revisadas en el Capítulo 1, destacamos los trabajos de Estrada, que han evolucionado actualmente en la EAPE (cuyo foco es la probabilidad. Sobre esta base, decidimos adaptar la EAPE a los demás temas de estocástica en que se organiza el currículo chileno, a saber, estadística descriptiva, probabilidad e inferencia.

Objetivo Específico 4 (OE4). Evaluar las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en una muestra de futuros profesores de matemática chilenos.

Esta meta parcial se establece tras explorar la factibilidad de la escala AEPE para ser utilizada también en referencia a los contenidos de estadística descriptiva e inferencia. En este caso, nos interesamos por identificar aspectos afectivos de estos profesionales, que pueden condicionar su interés en la materia y su enseñanza, principalmente en los temas más nuevos del currículo de estocástica, como la inferencia, que están en constante actualización. Esta situación cobra mayor importancia considerando que Chile, junto a otros 21 países agrupados en el acuerdo de Cooperación Económica Asia-Pacífico (APEC), participa en un proyecto para reformular el currículo de matemáticas que incorporará el pensamiento computacional y de *machine learning*, incluyendo técnicas de *big data* (CIAE Noticias, 2018)¹. Por tanto, considerando el currículo vigente, nos interesamos en evaluar las actitudes hacia los tres bloques de contenido en que se organiza la estocástica escolar chilena, con el interés de

¹ Producto de la pandemia de la COVID-19, esta incorporación se postergó para el año 2022.

identificar las principales diferencias en la disposición de los futuros profesores hacia estos temas y su enseñanza.

Objetivo Específico 5 (OE5). Evaluar el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en una muestra de futuros profesores de matemática chilenos, profundizando en la relación entre ambos aspectos.

Este objetivo, se justifica principalmente en el problema de investigación y OG, que nos motivó a realizar una evaluación empírica de ambos aspectos en una muestra de futuros profesores de matemática chilenos. Con ello, pudimos acercarnos a explorar la asociación entre las distintas componentes del conocimiento del contenido consideradas (común y ampliada) y la disposición de los participantes hacia los temas curriculares de estocástica (estadística descriptiva, probabilidad e inferencia estadística).

Hipótesis Iniciales de Investigación

En esta sección, planteamos algunas hipótesis iniciales sobre nuestras expectativas acerca de los objetivos de investigación descritos previamente, basados en los resultados previos presentes en la literatura.

Hipótesis 1 (H1). Se espera que el análisis sistemático del contenido de documentos curriculares oficiales de la realidad chilena, junto a la revisión de investigaciones que han llevado adelante este tipo de estudio, permita la identificación de indicadores de idoneidad didáctica sobre la enseñanza y aprendizaje de la estocástica en futuros profesores de matemática. Además, en la implementación de dichos indicadores para la valoración de la idoneidad didáctica de algunos procesos de instrucción programados, se espera obtener niveles bajos de idoneidad en todas sus componentes.

Si bien la metodología planificada para el logro del OE1 asociado a esta hipótesis es de carácter cualitativo, para formular esta hipótesis nos hemos apoyado en los estudios previos de Godino et al. (2013) y Rivas (2014). Al respecto, Godino et al. (2013) determinan exitosamente una colección de indicadores para valorar procesos de instrucción en didáctica de la matemática, que aplican en la valoración de un programa sobre este tema para futuros maestros, obteniendo niveles bajos de idoneidad en todas las facetas y componentes consideradas. Mientras que Rivas (2014), diseña satisfactoriamente otra colección de indicadores, pero para valorar asignaturas sobre estadística para maestros, que pone en práctica en la valoración de un

programa de estudio chileno y cuyos resultados también reflejan bajos niveles de idoneidad didáctica en las seis facetas consideradas.

Hipótesis 2 (H2). Proyectamos como factible la posibilidad de construir un instrumento de evaluación debidamente validado sobre el conocimiento del contenido, que considere la revisión presentada en el Capítulo 1 para la selección de sus interrogantes.

Valoramos positivamente nuestras opciones de diseñar y construir un cuestionario con las características esperadas, sobre la base de los trabajos de Batanero y Díaz (2005) y Gómez-Torres, Batanero, Díaz y Contreras (2016), cuyas metodologías han resultado en instrumentos con buenas características para evaluar el conocimiento. Además, con la diferenciación entre conocimiento común y ampliado (Tabla 3), esperamos que en la exploración piloto se evidencien dificultades tanto con las estocásticas escolares como con aquellas promovidas durante la formación inicial como profesores.

Hipótesis 3 (H3). Esperamos que la escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza mantenga sus buenas propiedades psicométricas al ser usada para explorar las actitudes respecto a los contenidos de estadística descriptiva e inferencial.

Tomamos esta posición considerando la evolución de los trabajos de Estrada, como se describió en el Capítulo 1, quien a raíz de trabajos previos sobre la evaluación de las actitudes hacia la estadística, y hacia la enseñanza de la estadística, ha desarrollado su propuesta aplicada al caso de probabilidad. Con ello, esperamos que la adaptación de la EAPE a los contenidos específicos de estadística descriptiva e inferencial mantenga la consistencia y estructura teórica de su versión original.

Hipótesis 4 (H4). Esperamos que las actitudes declaradas por los participantes hacia los tres bloques de contenidos sobre estocástica y su enseñanza sean en general positivas, aunque menos hacia el caso de inferencia.

Basados en los resultados de los estudios sobre las actitudes en profesores, presentados en el Capítulo 1, pudimos notar que la tendencia ha sido reportar en general actitudes positivas, o al menos neutrales, de los profesores tanto hacia la estadística como hacia su enseñanza. Sin embargo, esperamos que existan diferencias entre los tópicos considerados, donde la disposición será menos positiva hacia la inferencia. Lo anterior, se justifica principalmente porque estos temas son más nuevos en el currículo escolar chileno y en algunos casos ni siquiera fueron considerados como parte de la formación inicial de los profesores de matemática.

Hipótesis 5 (H5). En cuanto a la evaluación del conocimiento del contenido y las actitudes, esperamos que los participantes tengan un conocimiento insuficiente y unas actitudes mayormente positivas, que se traducirá en una débil asociación entre ambos aspectos.

Los resultados sobre la evaluación del conocimiento y las actitudes se fundamentan en las revisiones realizadas en el capítulo anterior, mientras que basados en los resultados de Hannigan, Gill y Leavy (2013) donde se observó un bajo conocimiento y actitudes positivas, esperamos que la asociación entre ambos aspectos también sea débil o casi inexistente en nuestro caso.

Tras la presentación del problema, objetivos e hipótesis iniciales de esta investigación, en lo que sigue describimos la organización de los distintos estudios desarrollados, que en su conjunto representan los resultados de esta memoria (Capítulo 3).

Organización de la Investigación

La investigación se ha organizado alrededor de siete artículos complementarios, asociados a los OE detallados anteriormente, que permiten el logro del OG planteado para esta investigación doctoral. La descripción de los materiales, métodos y participantes de cada uno de ellos se expone brevemente a continuación, agrupados según el OE que los motivó, cuyo detalle se aborda en el capítulo siguiente.

Sobre el OE 1

Para el cumplimiento de este objetivo, llevamos adelante dos estudios, donde abordamos el problema de la valoración de procesos de instrucción en didáctica de la estadística para profesores de matemática. El primero, publicado en el *Boletim de Educação Matemática* (Bolema) (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2019), donde se describe el proceso de construcción de la Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de Instrucción programados sobre Didáctica de la Estadística (GVID-IDE). Por medio de este instrumento, es posible valorizar la idoneidad didáctica de dichos procesos formativos, según una colección de indicadores inferidos por medio de la técnica de análisis de contenido de documentos de consenso internacional, que rigen u orientan esta etapa formativa. Y el segundo, publicado en *PNA. Revista de investigación en didáctica de la matemática* (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020c), sobre la valoración de la idoneidad de cuatro programas de asignaturas sobre didáctica o enseñanza de la estadística para profesores de matemática chilenos. Para ello,

siguiendo una metodología cualitativa y mediante un análisis de contenido, se identificó la presencia o ausencia de cada uno de los indicadores que conforman la GVID-IDE.

Sobre el OE 2

Se presentan los resultados de la construcción e implementación piloto en una muestra de 126 futuros profesores de matemática (españoles y chilenos), de un cuestionario sobre el conocimiento del contenido de estocástica que, debido a su extensión, se publica por partes. Una de ellas, está disponible en la revista *Avances de Investigación en Educación Matemática* (AIEM) (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020b), donde se ejemplifica el proceso desarrollado con los ítems de estadística descriptiva. Desde una metodología mixta, profundizamos en las etapas recorridas para dar validez al instrumento y valorar algunas propiedades psicométricas de los reactivos seleccionados, como su dificultad y fuerza de discriminación. Posteriormente, exploramos el conocimiento demostrado por la muestra piloto en los ítems considerados. Mientras que lo relativo a probabilidades (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, aceptado en BEIO) e inferencia, fue incluido en el Anexo 1 para evitar sobrecargar el texto y completar aquellos aspectos aún no publicados de la memoria.

Sobre el OE 3

Para el logro de este objetivo, se presentan los resultados de adaptar la EAPE hacia los contenidos de estocástica y aplicarla en la muestra piloto, organizados en dos estudios. El primero, publicado en la revista *Cadernos de Pesquisa* (CP) (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020a), sobre las actitudes hacia la estadística descriptiva y su enseñanza. Siguiendo una metodología cuantitativa, comenzamos refiriéndonos a la validez del instrumento utilizado, para luego explorar el sentido (positivo o negativo) de las actitudes declaradas por los participantes hacia los distintos componentes considerados, finalizando con las principales diferencias según el país de procedencia de la muestra. Y el segundo, publicado en la revista *Acta Scientiae* (AS), respecto a las actitudes hacia la probabilidad (Ruz, Molina-Portillo, Vásquez, et al., 2020). A través de una metodología cuantitativa, en este estudio examinamos la validez y confiabilidad de la EAPE para profesores en la muestra piloto. Mientras que, al igual que en el caso anterior, lo referido a inferencia se incluye como parte del Anexo 2.

Sobre el OE 4

Se presentan los resultados de evaluar las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en una muestra de 269 futuros profesores de matemática chilenos, cuyo artículo asociado se

encuentra en revisión en la *International Journal of Science and Mathematics Education* (IJMA) (Ruz, Chance y Contreras, en evaluación). A través de una metodología cuantitativa, organizamos los contenidos de estocástica en tres tópicos (estadística descriptiva, probabilidad e inferencia) para explorar las principales diferencias en la disposición de los participantes hacia cada uno de ellos, según las distintas componentes de actitudes consideradas (Tabla 4).

Sobre el OE 5

Para el logro de este objetivo, se presentan los resultados de evaluar el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en una muestra de 269 futuros profesores de matemática chilenos, cuyo artículo asociado se encuentra aceptado en la *Statistics Education Research Journal* (SERJ). En este caso, desde un enfoque cuantitativo, nos acercamos al conocimiento y las actitudes declaradas por los participantes, con el interés de analizar las posibles relaciones entre estos aspectos.

Síntesis del Capítulo

En este capítulo, se han detallado los aspectos metodológicos que sistematizaron las distintas etapas desarrolladas en esta tesis. Primero, se profundizó en las herramientas teóricas seleccionadas del capítulo anterior, como la noción de idoneidad didáctica y la manera de conceptualizar al conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza. Una vez establecida nuestra perspectiva teórica, se presentó el objetivo general de esta investigación (evaluar el conocimiento del contenido y las actitudes en futuros profesores), que articulamos a través de cinco objetivos específicos.

Por medio del primero, intentamos responder a ¿cuáles son las recomendaciones local e internacionalmente promovidas sobre la enseñanza y aprendizaje de la estocástica en los procesos de formación inicial de profesores de matemática chilenos? Para ello, nos enmarcamos en la teoría de idoneidad didáctica, con la que sistematizamos dichas recomendaciones (Ruz et al., 2019) y valoramos cuatro procesos de instrucción programados sobre didáctica de la estadística en Chile (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020c).

La segunda meta fue sobre el diseño de un instrumento que nos permitiera explorar ¿cuál es el conocimiento del contenido de estocástica en futuros profesores de matemática?, cuya construcción abordamos con herramientas del EOS en el marco del modelo CDM. El proceso recorrido se ejemplifica en cuanto a los temas de estadística descriptiva (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020b), mientras que lo relativo a probabilidades (Ruz et al., aceptado) e inferencia se detalla en el Anexo 1.

El tercer objetivo abarcó la adaptación de una escala de actitudes, con el interés de responder si la escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza (EAPE) de Estrada y Batanero (2015) mantiene sus buenas propiedades al cambiar a otros tópicos de estocástica. Por ello, aplicamos la escala en la muestra piloto variando a los temas de estadística descriptiva (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020a) e inferencia (Anexo 2), para compararlos con los obtenidos hacia el contenido de probabilidad (Ruz, Molina-Portillo, Vásquez, et al., 2020)

La cuarta meta, relativa a la evaluación de las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza, se establece tras probar las buenas características de la EAPE para ser usada en otros tópicos del contenido. Desde esta forma, profundizamos en las principales diferencias en la disposición declarada hacia los tres tópicos de estocástica y las componentes de actitudes consideradas (Ruz, Chance y Contreras, en evaluación).

El quinto objetivo específico fue construido en base a las metas previas, que permitieron el desarrollo de instrumentos sobre el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica para profesores. Por ello, en este caso nos interesamos en evaluar ambos aspectos y analizar su asociación en una nueva muestra de futuros profesores de matemática chilenos (Ruz, Chance, Medina y Contreras, aceptado).

Posteriormente, a partir de los antecedentes revisados, expusimos nuestras hipótesis iniciales de los objetivos planteados. Además, debido a la modalidad de esta tesis, vinculamos las metas propuestas con algunos artículos aceptados o en proceso de evaluación en diversas revistas científicas. Sobre ellos, se presentaron brevemente algunos aspectos metodológicos y destinamos el capítulo siguiente para detallar su contenido, ya que en su conjunto representan los resultados de esta investigación doctoral.

Capítulo 3

Resultados

Introducción

En este capítulo, se presentan los principales resultados de esta investigación, en respuesta a las metas planteadas en el capítulo anterior. Al respecto, hemos coordinado la publicación de dichos resultados en distintas instancias de divulgación científica, entre las cuales destacamos a siete manuscritos (cinco publicados, uno en prensa y otro en etapa de evaluación) que conforman este capítulo.

El primero, publicado en el *Boletim de Educação Matemática* (Bolema), sobre los requerimientos y condiciones establecidas en la realidad chilena acerca de la formación estocástica de profesores de matemática, organizados según la teoría de idoneidad didáctica. Y el segundo, publicado en *PNA. Revista de investigación en didáctica de la matemática*, sobre la valoración de la idoneidad de una colección de cuatro programas de asignaturas sobre enseñanza de la estadística para profesores de matemática chilenos.

Posteriormente, se presentan los resultados de la construcción e implementación piloto de un cuestionario sobre el conocimiento del contenido de estocástica para profesores, que publicamos por partes. Una de ellas, sobre el rendimiento demostrado por la muestra piloto en los ítems de estadística descriptiva, fue publicado en la revista *Avances de Investigación en Educación Matemática* (AIEM). Mientras que lo relativo a probabilidades (aceptado en el *Boletín de Estadística e Investigación Operativa* BEIO) e inferencia estadística, fue incluido en el Anexo 1 para evitar sobrecargar el texto y completar aquellos aspectos aún no publicados de la memoria.

Continuando con las metas propuestas, se presentan los resultados de adaptar la EAPE hacia los contenidos de estocástica, organizados en dos estudios. El primero, publicado en la revista *Cadernos de Pesquisa* (CP), sobre las actitudes hacia la estadística descriptiva y su enseñanza. Y el segundo, publicado en la revista *Acta Scientiae* (AS), respecto a las actitudes hacia la probabilidad. Mientras que, al igual que en el caso anterior, lo referido a inferencia se incluye como parte del Anexo 2. Sobre esta base, se da paso a exponer los resultados de evaluar las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en una muestra de futuros profesores de matemática chilenos, cuyo manuscrito se encuentra en revisión en la *International Journal of Science and Mathematics Education* (IJMA).

Por último, en respuesta directa a la meta principal de esta investigación, se presentan los resultados de evaluar el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en una muestra de futuros profesores de matemática chilenos, cuyo artículo asociado se encuentra en prensa en la *Statistics Education Research Journal* (SERJ). El capítulo finaliza con una síntesis de los resultados reportados. Por último, antes de comenzar la exposición de los manuscritos mencionados, es importante indicar que la numeración de tablas y figuras en cada uno es independiente entre sí y respecto a la presentada en los Capítulos 1 y 2, con el interés de permitir la fluidez en la presentación de los resultados reportados en cada publicación.

Artículo en BOLEMA²

Introducción

En la actualidad, la estadística es considerada como parte de la herencia cultural necesaria para todo ciudadano, siendo valorada por diversos agentes educativos y políticos como un componente básico para desenvolverse eficazmente en la sociedad de la información. En ella, debemos ser conscientes de las tendencias y fenómenos de importancia social y personal, ser capaces de tomar decisiones en situaciones de incertidumbre y participar de manera informada en el debate público y político (Gal, 2002).

En este sentido, en un entorno donde diariamente nos convertimos en *consumidores de datos* (ciudadanos receptores de información estadística), debido a que los datos son utilizados, cada vez más, para añadir credibilidad a la información presente en los medios de comunicación, la toma de decisiones políticas y económicas, ser personas estadísticamente educadas se reconoce como una competencia necesaria para mejorar la calidad de vida, dado que con ella se espera desarrollar nuestra capacidad de monitorear y promover la justicia social (Ben-Zvi y Makar, 2016).

En los últimos años, ha aparecido una corriente reformista en torno a la educación estadística en la escuela, promoviendo su enseñanza, dentro del currículo de matemática, desde los niveles iniciales de primaria, con ideas básicas de la disciplina, hasta terminar la trayectoria escolar con elementos de inferencia estadística (p. e. Estados Unidos: NCTM, 2000; Franklin et al., 2007; España: MECD, 2015; Chile: MINEDUC, 2009).

² Ruz, F, Molina-Portillo, E. y Contreras, J.M. (2019). Guía de Valorización de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Instrucción en Didáctica de la Estadística. *Bolema*, 33(63), 135-154.

De esta forma, el éxito de los nuevos programas u orientaciones curriculares depende, en gran medida, de la formación de quienes tienen la tarea de su implementación, ya que los profesores de matemática “son la fuerza impulsora de la reforma en educación estadística” (Ben-Zvi y Makar, 2016, p. 6), por ser los responsables de adaptar e interpretar los nuevos requerimientos según las características y condiciones institucionales, de sus estudiantes y del entorno educativo. Por tanto, identificando que la clave para prosperar en la educación estadística comienza por los profesores en sí mismos, en este trabajo analizamos su formación inicial, centrando nuestra atención en los programas de estudio que regulan dicho proceso, de manera que podamos valorizar su grado de idoneidad respecto a las exigencias actuales declaradas en diversos documentos de consenso internacional y local para Chile.

El *diseño curricular* que norma la formación de profesores y regula sus procesos de instrucción, se lleva a cabo, usualmente, por distintos agentes educativos intervinientes. Por ejemplo, en la realidad chilena la formación de profesores está normada por el Ministerio de Educación a través de la conducción técnica del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (MINEDUC y CPEIP, 2012) y la colaboración de diversos centros de investigación específicos de esta materia. Luego, son las instituciones de educación superior que ofrecen carreras de pedagogía quienes a través de sus distintas entidades (institutos, escuelas, departamentos o seminarios) formulan programas de estudio específicos para cada centro y, por último, el formador a cargo de impartir docencia es el responsable de elaborar las planificaciones de aula específicas, que idealmente deben ser complementadas con resultados de la investigación educativa y didáctica en general.

De esta forma, aunque el formador maneje y domine los principios disciplinares, pedagógicos y didácticos orientadores del diseño curricular, su aplicación a temas específicos “deja demasiados grados de libertad, lo que torna insegura y excesivamente compleja la acción del docente” (Godino, Batanero, Rivas y Arteaga, 2013, p. 48). Lo que aplicado al campo de la enseñanza de la estadística y la probabilidad podría justificar lo mencionado por Batanero, Burrill y Reading (2011), quienes aseguran que muchos docentes consideran que no están bien preparados para enseñar estadística ni para afrontar las dificultades que este proceso implica.

Por lo tanto, con la intención de aportar herramientas que apoyen la mejora de la formación estadística de futuros profesores de matemáticas, en este artículo se presenta el proceso de construcción de una *Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de Instrucción en Didáctica de la Estadística* (GVID-IDE), conformada por un serie de indicadores empíricos que permitan evaluar programas de formación de manera operativa y apoyen la reflexión sistémica sobre la enseñanza y aprendizaje de la didáctica de la estadística,

según la gama de facetas de análisis que son parte de la Teoría de Idoneidad Didáctica (Breda, Font, Marina y Lima, 2015; Godino, 2013).

A continuación, en la sección 2 se describe el problema y marco teórico que respaldan el enfoque adoptado en esta investigación, destacando la noción de Idoneidad Didáctica, sus facetas y componentes. En la sección 3 se detalla y ejemplifica la metodología empleada en el proceso de construcción y validación de la GVID-IDE, tratando de destacar las etapas claves, de manera que puedan ser de utilidad para investigadores interesados en esta área y que puedan complementar nuestros resultados con el análisis de los procesos de formación en otras áreas específicas de las matemáticas (álgebra, geometría, números). Posteriormente, en la sección 4 se presenta la totalidad de indicadores de idoneidad que constituyen la GVID-IDE, destacando la manera de interpretarlos según la faceta o componente a la que pertenezcan. Por último, el artículo concluye con algunas reflexiones finales y proyecciones de la investigación reportada.

Problema y Marco Teórico

En este trabajo afrontamos el problema de evaluar planes de formación de profesores de matemática en el ámbito de didáctica de la estadística desde la perspectiva aportada por el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). El EOS se presenta como un sistema teórico inclusivo, abierto y dinámico, que desde sus inicios se ha planteado como problemática de investigación y reflexión la comparación y articulación de marcos teóricos, aspirando a incluir en él las nociones teóricas y metodológicas “necesarias y suficientes” (Godino, 2012, p. 56) para investigar la complejidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y la estadística.

Hasta la fecha, la evolución de este sistema teórico ha concluido en cinco grupos de herramientas que permiten analizar aspectos complementarios de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, entre los que tomamos la Teoría de Idoneidad Didáctica (Godino, 2013) para abordar la problemática del diseño y valoración de planes formativos en didáctica de la estadística para profesores de matemática de los niveles 7 al 12 (*estudiantes de doce a dieciocho años de edad*), cuyo desarrollo y aplicación fue tratado en Godino et al. (2013) para el caso de un plan de formación en didáctica de la matemática para profesores de educación primaria.

Los elementos en los que se fundamenta la Teoría de Idoneidad Didáctica han sido introducidos de forma gradual al EOS, a partir de los trabajos de Godino, Contreras y Font (2006) y Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi (2006), como herramientas de una didáctica normativa, orientada a la intervención efectiva en el aula. La *noción de idoneidad didáctica* es

entendida como un criterio sistémico de pertinencia de un proceso de instrucción, respecto al grado de adaptación entre dos tipos de significados, los personales logrados por los estudiantes y los pretendidos o implementados según la institución de referencia. De esta forma, la idoneidad de un proceso de instrucción (pretendido/programado o implementado) se define como la articulación coherente y sistémica de seis facetas y sus posibles interacciones entre sí (Godino, 2013):

- *Idoneidad epistémica*: Referida al grado de representatividad de los significados institucionales pretendidos o implementados respecto de un significado de referencia.
- *Idoneidad cognitiva*: expresa el grado en que los significados pretendidos o implementados están en la zona de desarrollo potencial o son próximos a los significados personales de los estudiantes.
- *Idoneidad afectiva*: representa el grado de implicación (interés, motivación etc.) de los estudiantes con el proceso de estudio, que puede verse influenciado tanto por factores institucionales como personales.
- *Idoneidad interaccional*: refleja el grado en que las configuraciones y trayectorias didácticas, que son parte del proceso de enseñanza y aprendizaje, identifiquen y resuelvan conflictos semióticos potenciales.
- *Idoneidad mediacional*: expresa el grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje.
- *Idoneidad ecológica*: representa el grado en que el proceso de estudio de ajusta al proyecto educativo institucional y a los condicionamiento del entorno en que se desarrolla.

A su vez, reconociendo la complejidad de evaluar la idoneidad de un proceso de instrucción, debido al gran número de aspectos que intervienen en él, Godino (2013) identifica una serie de componentes que articulan y sistematizan el análisis de cada una de las facetas mencionadas anteriormente. De esta forma, debido a que tanto las facetas como los componentes de idoneidad didáctica no son observables directamente, es necesario inferirlos a partir de indicadores empíricos, entendidos como heurísticas que consideran las restricciones propias del contexto y de la faceta correspondiente (Beltrán-Pellicer y Godino, 2017).

Godino (2013) propone una *Guía para la Valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de Instrucción Matemática* (GVID-IM), compuesta por una colección de indicadores que sintetizan los elementos y relaciones que intervienen en un proceso de instrucción matemática de cualquier nivel escolar. Sin embargo, puesto que nuestro interés es valorar planes de formación en didáctica de la estadística, consideramos los resultados de Godino et al. (2013) que representan la evolución de la GVID-IM para convertirla en un instrumento de reflexión sobre procesos de instrucción acerca de los conocimientos didáctico-matemáticos de

profesores en formación, denominada *Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de Instrucción en Didáctica de la Matemática* (GVID-IDM).

La GVID-IDM se construye sobre la base de los trabajos realizados en Godino (2009) (cuya perspectiva ampliada se desarrolla en Pino-Fan y Godino, 2015), donde se integran, organizan y extienden tres referentes teóricos sobre conocimiento y desarrollo profesional del profesor de matemáticas que han tenido gran aceptación en la comunidad educativa: (1) el Modelo de Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) (Shulman, 1987), entendido como el conocimiento necesario para la enseñanza de un cierto tema, que hace interactuar el conocimiento del contenido y el currículo; (2) el Modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) (Ball, 2000; Hill, Ball y Schilling, 2008), entendido como el conocimiento disciplinar necesario para que el profesor pueda conducir tanto la instrucción como el aprendizaje de sus estudiantes; y (3) la Teoría de desempeño experto en enseñanza de las matemáticas (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008), referida a los conocimientos y competencias profesionales del profesor de matemáticas para que su enseñanza pueda considerarse de calidad.

Con todo ello, Godino (2009) fusiona los tres referentes mencionados y aplica la diversidad de herramientas disponibles en el EOS, proponiendo un nuevo modelo de lo que denomina *Conocimiento Didáctico-Matemático* (CDM) del profesor, cuya aplicabilidad al campo de la estadística se expone en Godino, Ortiz, Roa y Wilhelmi (2011). De esta forma, Godino et al. (2013) adoptan el modelo CDM para garantizar que la GVID-IDM condense, a través de indicadores, el conocimiento necesario por el profesor de matemática para llevar a cabo su labor.

Sobre los cimientos teóricos declarados anteriormente y los componentes de la GVID-IDM que se resumen en el Tabla 1, se diseña una *Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de Instrucción en Didáctica de la Estadística* (GVID-IDE). De esta forma, para la construcción de un instrumento que permita evaluar un proceso de instrucción (pretendido/programado o implementado) de formación de profesores en didáctica de la estadística, es necesario distinguir dos dimensiones desde las cuales analizarlo: una que nos permita caracterizar la labor del futuro profesor según las expectativas de aprendizaje institucionales de sus estudiantes, y una segunda que considere las tareas del formador con los docentes en formación (ambos aspectos son representados por cada columna del Tabla 1).

Organizamos la primera de dichas dimensiones dentro de la Faceta Epistémica del instrumento GVID-IDE, referida a los conocimientos institucionales sobre la enseñanza y aprendizaje de la estadística, que considera diversos contenidos didáctico-estadísticos (disciplinar, cognitivo, afectivo, interaccional, mediacional y ecológico) que intervienen en la

labor profesional del profesor en formación respecto a sus futuros estudiantes. La segunda dimensión es contemplada en las Facetas restantes que involucran al formador con sus estudiantes (profesores en formación) en términos: (1) Cognitivos, referido al logro efectivo de las expectativas de aprendizaje en didáctica de la estadística; (2) Afectivos, actitudes y motivaciones de los futuros profesores hacia la enseñanza de la estadística; (3) Interaccionales, competencias comunicativas del profesor en formación con su formador y pares; (4) Mediacionales, uso de recursos disponibles para el planteamiento de situaciones vinculadas con la práctica de la enseñanza y (5) Ecológico, que contemple el conocimiento del formador en cuanto al currículo respectivo, el uso de nuevas tecnologías basadas en la investigación y la conexiones con otras áreas disciplinares.

Tabla 1

Componentes de la GVID-IDM

FACETA EPISTÉMICA	OTRAS FACETAS IMPLICADAS EN LA FORMACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA
Contenido Didáctico-Matemático, entendido desde el punto de vista institucional	FACETA COGNITIVA:
<i>Contenido matemático:</i> Problemas, lenguajes, conceptos, procedimientos, proposiciones, argumentos, conexiones	Aprendizaje del contenido didáctico-matemático por los profesores
<i>Contenido cognitivo:</i> Conocimientos previos, adaptaciones curriculares, aprendizaje del contenido matemático por parte de los alumnos	FACETA AFECTIVA:
<i>Contenido afectivo:</i> Intereses, actitudes, emociones hacia el aprendizaje del contenido matemático de los alumnos	Creencias, valores, intereses, actitudes, emociones de los profesores hacia el aprendizaje del contenido didáctico-matemático
<i>Contenido interaccional:</i> Modos de interacción y el discurso en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas	FACETA INTERACCIONAL:
<i>Contenido mediacional:</i> Uso de recursos tecnológicos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas	Modos de interacción y discurso en el proceso de formación de profesores
<i>Contenido ecológico:</i> Currículo, innovación didáctica, adaptación socio-profesional, conexiones interdisciplinarias	FACETA MEDIACIONAL:
	Uso de recursos tecnológicos en el proceso de formación de profesores
	FACETA ECOLÓGICA:
	Currículo, innovación didáctica en formación de profesores, conexiones interdisciplinarias

Fuente. Godino et al. (2013, p. 54)

A continuación, articulamos los aspectos teóricos mencionados anteriormente y exponemos un desglose metodológico respecto al proceso de construcción de la GVID-IDE.

Metodología

Esta investigación se cataloga dentro del enfoque cualitativo y se considera de tipo exploratoria descriptiva (Hernández, Fernández y Baptista, 2014) donde la técnica empleada para la recogida de información es el análisis de contenido (Krippendorff, 1990). Esta técnica,

considera que lo útil del fragmento de mensaje a analizar es la presencia o ausencia de una característica del contenido y es utilizada para identificar, clasificar y comparar normas organizadas en categorías, según las distintas facetas de idoneidad didáctica descritas en la sección 2, contenidas en documentos curriculares de consenso internacional y específicos para la realidad chilena, que rigen la formación de profesores en el eje de estadística y probabilidades. La elección de estos documentos se realiza por medio de un muestreo intencional de carácter teórico, fundamentado, principalmente, en el objetivo que se persigue con este estudio y la pertinencia de ellos respecto a toda la colección de documentos curriculares disponibles en la literatura que regulan u orientan la formación inicial docente en esta área.

El primero de estos documentos corresponde al informe *Statistical Education of Teachers* (SET) (Franklin et al., 2015), desarrollado por la Asociación Americana de Estadística (ASA), donde se describe el contenido y la comprensión conceptual que los profesores necesitan saber para ayudar a sus estudiantes a desarrollar habilidades de razonamiento estadístico. Este reporte se destina a todos los que participan en la educación estadística de los profesores, tanto en su proceso de preparación inicial como en la formación continua.

En cuanto al contenido analizado en este documento, seleccionamos las orientaciones propuestas para la formación de profesores de *middle* (niveles 6 al 8) y *high school* (niveles 9 al 12), omitiendo lo referido a los niveles inferiores, pues el alcance de este estudio está orientado a la valoración de planes formativos de futuros profesores que impartirán docencia escolar entre los niveles seleccionados.

El segundo documento, denominado *Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media* (MINEDUC y CPEIP, 2012), que tiene por finalidad orientar a las instituciones formadoras de profesores chilenos, respecto a aquellos conocimientos y habilidades que debe demostrar un futuro profesor de educación media (niveles 7-12) para enseñar la disciplina en los seis grados que comprende este nivel de escolaridad. Este informe se organiza en torno a dos aspectos: (1) los *estándares pedagógicos*, que corresponden a las competencias necesarias para el desarrollo del proceso de enseñanza, considerando aspectos como: la dimensión moral de la profesión, gestión de la clase, interacción con los estudiantes y promover un ambiente adecuado para el aprendizaje y (2) los *estándares disciplinarios para la enseñanza*, que sugieren los conocimientos y habilidades disciplinares que los futuros profesores deben demostrar, incluido el cómo se enseña, considerando atributos como: la comprensión sobre cómo aprenden los estudiantes, la capacidad para diseñar, planificar e implementar experiencias de aprendizaje y su evaluación.

Entre ambas colecciones de estándares, fueron analizados completamente los primeros, pero de los segundos observamos los estándares de matemática, particularmente los que conforman el eje de datos y azar que son nuestro foco de interés (del estándar 17 al 21 con sus respectivas descripciones e indicadores).

Otro documento, considerado inicialmente, corresponde a la última actualización del informe universitario *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education* (GAISE College Report, 2016) presentado por primera vez el año 2005 por la ASA, donde se sugiere una dirección para orientar los cursos introductorios de estadística en el nivel superior. Sin embargo, compartimos lo mencionado en Franklin et al. (2015) respecto a que tanto este informe como el *Common Core State Standards for Mathematics* (CCSSM) (CCSSI, 2010) y *Principles and Standards for School Mathematics* (NCTM; 2000) incluyen orientaciones que “no son adecuadas para preparar a los profesores para enseñar estadística” (FRANKLIN et al., 2015, p. 24), ya que dependiendo del interés profesional a quienes vayan dirigidas, usualmente prestan poca atención al ciclo de investigación empírica, proporcionan un enfoque axiomático a la probabilidad y la inferencia se aborda como una colección de procedimientos de memoria, por lo que fueron descartados.

Los reportes Franklin et al. (2015) y MINEDUC y CPEIP (2012) en conjunto, contienen *normas* que orientan el quehacer formativo de futuros profesores de matemática en lo que respecta a la estadística y las probabilidades, por tanto, representan una parte importante del conocimiento profesional que un profesor debe manejar. A partir de dichas normas se infieren indicadores clasificados según las facetas de idoneidad, proceso que se detalla y ejemplifica en lo que sigue.

En una primera fase, se identificaron y clasificaron Unidades de Análisis (UA) según las distintas facetas de idoneidad que, posteriormente, fueron sometidas a valoración por juicio de expertos para garantizar la validez del contenido resultante en cada categoría y asegurar su correcta clasificación. Este procedimiento involucró a dos académicos con una amplia trayectoria de investigación en el campo de la didáctica de la matemática y estadística, sumado a un total dominio del marco teórico y metodología seguida. De esta forma, los resultados de dicha valoración permitieron una nueva revisión de la clasificación propuesta, reubicando un número reducido de UA que produjeron discrepancia.

Continuando con la investigación, fue necesario comparar y reducir las UA resultantes de la etapa anterior con la intención de evitar reiteraciones. Este procedimiento consiste en identificar y etiquetar las UA que puedan estar contenidas en otra, o que no aporten información nueva, con la expresión *contenida en* acompañada de la letra (a, b, c...) de la UA correspondiente para dejar representado su contenido en una única Unidad de Análisis final.

En el Tabla 2, se ejemplifica el procedimiento explicado, donde las letras no siguen un orden correlativo ya que se mantiene su clasificación original y se presentan aquellas que contienen o están contenidas en otras.

Tras comparar y reducir las distintas UA se procede a inferir indicadores de *Idoneidad Didáctica* a partir de los fragmentos resultantes, considerando que: (1) dos o más UA pueden dar origen a un único indicador, y (2) una misma UA puede dar origen a uno o más indicadores. De esta forma, se obtiene una propuesta de indicadores para valorar procesos de formación en didáctica de la estadística para futuros profesores de matemática, que se ejemplifica en el Tabla 3. En este punto es importante mencionar que, con la intención de proponer una guía que pueda utilizarse tanto para valorar planes como acciones formativas, se han redactado los indicadores en un sentido global reemplazando expresiones como *resuelven* por *promueven* o *incluyen*, ya que la primera sólo podría aplicarse a un proceso de estudio implementado y no en la etapa de diseño.

Tabla 2

Ejemplo del proceso de comparación y reducción de la UA

COMPONENTES	UNIDADES DE ANÁLISIS
2.3. Aprendizaje	d. “razonan inductivamente los datos, haciendo inferencias que toman en cuenta el contexto de donde surgieron los datos” (SET, 2015, p. 11) <i>contenida en g.</i> e. “entiende que los modelos estadísticos se juzgan según su utilidad y que describan razonablemente los datos” (SET, 2015, p. 11). g. “Razonan en presencia de variabilidad y anticipan, reconocen, explican y permiten la variabilidad en los datos, ya que se relaciona con un contexto particular” (SET, 2015, p. 10). h. “comprender el rol de la variabilidad en la resolución de problemas estadísticos” (SET, 2015, p. 21) <i>contenida en g.</i> i. “Entender que la distribución de los datos describe la variabilidad presente en ellos” (SET, 2015, p. 22) <i>contenida en g.</i> jj. “Conoce la aproximación de la distribución binomial por la distribución Poisson y la usa para estimar probabilidades” (MINEDUC; CPEIP, 2012, p. 128) <i>contenida en e.</i> kk. “Conoce propiedades básicas de la distribución exponencial y resuelve problemas que la involucren” (MINEDUC; CPEIP, 2012, p. 130) <i>contenida en e.</i> ll. “Comprende la Ley de los Grandes Números y la aplica para resolver problemas” (MINEDUC; CPEIP, 2012, p. 130) <i>contenida en e.</i>

Fuente. Resultados de la investigación.

Tabla 3

Ejemplo del proceso de inferencia de indicadores de idoneidad

UNIDADES DE ANÁLISIS	INDICADOR
d. “entiende que los modelos estadísticos se juzgan según su utilidad y que describan razonablemente los datos” (SET, 2015, p. 11).	• Se promueve el correcto entendimiento de los modelos estadísticos, que se juzgan según su utilidad y descripción de los datos (UA d, u) • Se incluye la preparación para conducir el aprendizaje de los tópicos de análisis de datos, probabilidades e inferencia estadística presentes en el currículo escolar (UA t, w, x)
t. “Es capaz de conceptualizar, analizar, sintetizar, argumentar, interpretar, evaluar, inferir y explicar ideas o temas en forma oral o escrita” (MINEDUC; CPEIP, 2012, p. 45)	
u. “Comprende la importancia que tiene la forma de presentar los datos de manera gráfica y conoce las precauciones que deben considerarse al utilizar estas herramientas” (MINEDUC; CPEIP, 2012, p. 124).	
w. “Está preparado para conducir el aprendizaje de las variables aleatorias discretas” (MINEDUC; CPEIP, 2012, p. 128).	
x. “Está preparado para conducir el aprendizaje de inferencia estadística” (MINEDUC; CPEIP, 2012, p. 132).	

Fuente. Resultados de la investigación.

Finalmente, del proceso descrito anteriormente, hemos obtenido una primera versión de la GVID-IDE que, posteriormente, fue sometida a confrontación con la literatura existente acerca del análisis de la idoneidad didáctica de planes formativos desarrollado por Godino (2013), Godino, Rivas y Arteaga (2012) y Godino et al. (2013) quienes evalúan la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas o estadística en profesores de primaria (niveles K-8). Por esta razón, en lo que sigue presentamos la versión revisada de la GVID-IDE.

Resultados

En esta sección sintetizamos el conjunto de indicadores de idoneidad organizados según las dos dimensiones descritas en la sección 2, la faceta epistémica y las demás facetas (cognitiva, afectiva, mediacional, instruccional y ecológica). Dicha colección de indicadores, se espera sea útil para el diseño y valoración de planes formativos dirigidos a futuros profesores de matemática en el área de didáctica de la estadística.

Dimensión 1: Indicadores de idoneidad epistémica. La primera dimensión, referida a la faceta epistémica, considera el conocimiento del contenido didáctico-estadístico a enseñar (desde el punto de vista institucional) que la *comunidad de educadores estadísticos* considera pertinentes para un aprendizaje idóneo u óptimo sobre didáctica de la estadística. De esta

forma, según el enfoque teórico adoptado (Godino et al., 2013) organizamos esta dimensión en las seis facetas de idoneidad didáctica, entendidas en cada caso como:

Contenido Estadístico. Referido a que el profesor comprenda la disciplina desde un punto de vista plural, identificando a la resolución de problemas como un medio para dar sentido al contenido, articulando lo funcional con lo lingüístico, procedimental y argumentativo. El Tabla 4 presenta la colección de indicadores sobre este contenido.

Tabla 4

Indicadores de idoneidad del Contenido Estadístico

<i>Situaciones-Problema</i> • Se incluyen problemas significativos del mundo real que puedan ser desarrollados por medio del proceso de resolución de problemas estadísticos (PPDAC), enfatizando en la omnipresente variabilidad. • Se promueve el uso de problemas históricos que originaron el cálculo de probabilidades.
<i>Lenguajes</i> • Se incluyen distintas representaciones para explorar, resumir y describir patrones de variabilidad en datos univariados categóricos y cuantitativos (tablas, gráficos, estadísticos) • Se proponen diversas representaciones para describir patrones de asociación de dos variables, ya sean categóricas (tablas de doble entrada) o cuantitativas (gráfico de dispersión). • Se propone el uso de tablas de doble entrada, diagramas de árbol y otras representaciones para la enseñanza de las probabilidades. • Se promueve el uso del lenguaje escrito u oral para comunicar resultados de forma clara y precisa con el lenguaje estadístico.
<i>Reglas: Definiciones, proposiciones y procedimientos</i> • Se promueve el trabajo con modelos estadísticos que describan la variabilidad de los datos (datos = estructura + variabilidad). • Se propone transformar las preguntas de investigación en preguntas estadísticas (que puedan ser resueltas por medio de datos en el ciclo PPDAC). • Se propone identificar y distinguir los distintos tipos de variables y datos al abordar una pregunta estadística. • Se incluyen los conceptos, procedimientos y propiedades fundamentales de la estadística descriptiva. • Se incluyen los principales conceptos, procedimientos y propiedades de las probabilidades y las variables aleatorias. • Se promueven los conceptos y procedimientos primordiales para modelar la asociación entre variables por medio del análisis de regresión. • Se promueven los principales conceptos, procedimientos, técnicas y propiedades de la inferencia estadística paramétrica. • Se incluye diferenciar situaciones donde sea necesario un estudio observacional o un estudio comparativo.
<i>Argumentos</i> • Se promueve la construcción de argumentos viables, claros y precisos que comuniquen la utilidad y poder del pensamiento estadístico. • Se incluye evaluar y criticar la plausibilidad de conclusiones alternativas. • Se promueve la distinción entre el razonamiento estadístico correcto del defectuoso.

Continuación Tabla 4. *Indicadores de Idoneidad del Contenido Estadístico*

Relaciones

- Se promueve establecer conexiones entre el diseño del estudio y la interpretación de resultados.
- Se promueve interpretar los resultados de un estudio estadístico con aspectos como el sesgo y el alcance de inferencias.
- Se promueve relacionar la distribución de los datos y su variabilidad con modelos estadísticos sesgados y no sesgados.
- Se incluye conectar la simulación con procedimientos inferenciales.
- Se promueve valorar el contexto y la variabilidad en todo el proceso de resolución de problemas estadístico.
- Se promueve valorar el rol de los datos y la necesidad de producirlos considerando la variabilidad.

Fuente. Resultados de la investigación.

Contenido Cognitivo. Referido al conocimiento especializado, por parte de los profesores, de la estadística en relación al aprendizaje de los estudiantes (considerando errores, obstáculos, dificultades recurrentes y adaptaciones curriculares a las diferencias individuales), la evaluación y sus conocimientos previos, cuyos indicadores se resumen en el Tabla 5.

Contenido Afectivo. Abarca el conocimiento, comprensión y manejo de los intereses, necesidades, actitudes y emociones de los estudiantes en el aprendizaje de la estadística. Los indicadores inferidos para este contenido se presentan en el Tabla 6.

Tabla 5

Indicadores de idoneidad del Contenido Cognitivo

Conocimientos Previos

- Se propone trabajar desde el razonamiento informal para introducir la comprensión de tópicos de mayor dificultad para los estudiantes.
- Se promueve desarrollar no sólo el conocimiento del contenido disciplinar, sino que también su progresión y conexión entre los distintos niveles escolares.

Adaptaciones curriculares según diferencias individuales

- Se incluye identificar estilos de aprendizaje, necesidades educativas especiales y talentos específicos de los estudiantes.
- Se promueve el uso pertinente de la evaluación diferenciada.
- Se promueve la inclusión de todos los estudiantes con sus respectivas diferencias sociales, sexuales, étnicas, de apariencia física y desarrollo académico.

Aprendizaje

- Se promueve estar familiarizados con las concepciones, dificultades y errores comunes de los estudiantes al aprender estadística, probabilidades e inferencia.
- Se incentiva centrar el foco de atención en los estudiantes del sistema escolar, sus características y modos de aprendizaje.
- Se promueve el uso de estrategias de enseñanza y evaluación para promover el aprendizaje.

Fuente. Resultados de la investigación

Tabla 6

Indicadores de idoneidad del Contenido Afectivo

<i>Intereses y necesidades</i>
• Se consideran los intereses y motivaciones de los estudiantes para en la propuesta de problemas y tareas estadísticas. • Se promueven tareas y actividades que reconozcan la importancia de la disciplina en la sociedad. • Se analizan situaciones reales para identificar modos de pensar, sentir y actuar de los estudiantes.
<i>Actitudes</i>
• Se promueve una actitud positiva hacia la resolución de problemas estadísticos. • Se promueven actitudes como la perseverancia y crecimiento tanto intelectual como moral de los estudiantes.
<i>Emociones</i>
• Se promueve la seguridad física y afectiva de los estudiantes.

Fuente. Resultados de la investigación.

Contenido Interaccional. Referido a la capacidad del futuro profesor para comunicar adecuadamente el contenido estadístico, evaluar formativamente los aprendizajes e identificar y resolver conflictos relacionados con la manera de interactuar en el aula. Los indicadores de este contenido se resumen en el Tabla 7.

Tabla 7

Indicadores de idoneidad del Contenido Interaccional

<i>Interacción Docente-Estudiante</i>
• Se promueven estrategias que valoren el proceso de investigación estadística. • Se promueve un estilo de instrucción interactivo, centrado en problemas reales y sensible al pensamiento del estudiante. • Se promueve el logro de objetivos de aprendizaje por medio de tareas, recursos y evaluaciones efectivas y coherentes. • Se incluye incentivar, acoger y potenciar la participación de los estudiantes en la instrucción.
<i>Interacción entre Estudiantes</i>
• Se promueven instancias para compartir y comunicar razonamientos y métodos entre estudiantes.
<i>Autonomía</i>
• Se promueve el trabajo autónomo de los estudiantes en el proceso de resolución de problemas estadísticos.
<i>Evaluación Formativa</i>
• La evaluación enfatiza en la comprensión en interpretación conceptual sobre lo procedimental y algorítmico. • Se incluyen diversos métodos de evaluación que enfaticen en el proceso de resolución de problemas estadístico como preguntas de respuesta abierta o proyectos de investigación. • Se integra la evaluación como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje, retroalimenta y orienta estrategias para seguir progresando. • Se promueve el uso sistémico y efectivo de la evaluación formativa.

Fuente. Resultados de la investigación.

Tabla 8

Indicadores de idoneidad del Contenido Mediacional

Recursos Materiales

- Se promueve el uso de TIC's (calculadoras, hojas de cálculo, applets y dispositivos aleatorios) que potencien el desarrollo de la enseñanza de la estadística.
- Se promueve el uso de simulaciones computacionales y con material concreto para la enseñanza y aprendizaje de las probabilidades, variables aleatorias e inferencia estadística.

Número de estudiantes, horario y condiciones del aula

- Se promueve el uso adecuado del espacio, equipamiento y recursos del aula para potenciar el trabajo de los estudiantes.
- Se promueve generar en el aula y establecimiento educativo un espacio acogedor y estimulante para los estudiantes.

Tiempo para la enseñanza y el aprendizaje

- Se gestiona eficazmente el tiempo de la clase a favor del logro de los objetivos propuestos.

Fuente. Resultados de la investigación.

Contenido Mediacional. Referido al conocimiento de las posibilidades de uso y limitaciones de recursos manipulativos e informáticos (TIC's) en la enseñanza de la estadística y su gestión en el tiempo disponible, cuyos indicadores se resumen en el Tabla 8.

Contenido Ecológico. Referido al conocimiento del profesor respecto a las orientaciones curriculares y los factores externos (económicos, políticos, culturales) que intervienen en la enseñanza y aprendizaje de la estadística, junto a su capacidad de innovar basados en la investigación. Sus indicadores se presentan en el Tabla 9.

Tabla 9

Indicadores de idoneidad del Contenido Ecológico

Adaptación del Currículo

- Se conocen los enfoques pedagógicos y disciplinares del currículo y sus instrumentos para organizar la enseñanza.
- Se tiene en cuenta la normativa de integración de la discapacidad en el sistema escolar.

Innovación didáctica

- Se promueve el uso de herramientas tecnológicas que potencien el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Adaptación socio-cultural y profesional

- Se promueve la generación de una cultura de respeto, seguridad y confianza en la escuela, que involucre a los estudiantes, sus familias y comunidades.

Educación en valores

- Se promueve la formación ciudadana de los estudiantes.
- Se incluye el desarrollo de valores, actitud crítica e inclusión en los estudiantes.

Conexiones intra e interdisciplinares

- Se promueve el trabajo colegiado entre diversos docentes o especialistas
- Se promueven oportunidades para integrar y potenciar los aprendizajes de las distintas áreas curriculares y sus interdependencias.

Fuente. Resultados de la investigación.

Dimensión 2: Otros Indicadores de Idoneidad. Por otro lado, los procesos formativos de profesores deben tener en cuenta no sólo el contenido didáctico-estadístico a enseñar (faceta epistémica), sino que, además, las facetas restantes (cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica) implicadas en dicho proceso, que involucran al formador con los profesores en formación y conforman la segunda dimensión de la GVID-IDE que presentamos a continuación:

Faceta Cognitiva. Referida al logro efectivo de las expectativas de aprendizaje en didáctica de la estadística, donde el formador debe conocer las formas de razonar de sus estudiantes (futuros profesores), sus etapas de desarrollo cognitivo y estrategias, dificultades o posibles errores en el aprendizaje de la enseñanza de la estadística. Los indicadores resultantes para esta faceta se resumen en el Tabla 10.

Faceta Afectiva. Abarca aspectos como las actitudes y motivaciones de los futuros profesores hacia la enseñanza de la estadística y hacia el contenido subyacente, que deben ser potenciadas positivamente por parte del formador. El Tabla 11 contiene los indicadores que conforman esta faceta.

Tabla 10

Indicadores de idoneidad de la Faceta Cognitiva

<i>Conocimientos Previos</i>
• Se promueve la comprensión de que los conceptos estadísticos se construyen de forma progresiva en la escuela.
<i>Aprendizaje</i>
• Se promueve experimentar el aprendizaje conceptual de las estadísticas a enseñar de forma similar a sus estudiantes. • Se promueve el compromiso de los profesores en la resolución de problemas estadísticos. • Se diferencia entre el pensamiento matemático del estadístico. • Se promueve el correcto entendimiento de los modelos estadísticos, que se juzgan según su utilidad y descripción de los datos. • Se promueve la comprensión del razonamiento estadístico desde la perspectiva de los datos y/o la simulación, destacando la variación presente y el contexto de cada situación. • Se promueve el aprendizaje de la probabilidad, las variables aleatorias y sus componentes como base para identificar patrones de variabilidad que permitan cuantificar la incertidumbre. • Se promueve el aprendizaje de la inferencia estadística, su finalidad, componentes y principales procedimientos de estimación. • Se promueve la comprensión del razonamiento inferencial a través de la aleatorización y simulación. • Se considera el aprendizaje del análisis de regresión lineal. • Se incluye la preparación para conducir el aprendizaje de los tópicos de análisis de datos, probabilidades e inferencia estadística presentes en el currículo escolar.

Fuente. Resultados de la investigación.

Tabla 11

Indicadores de idoneidad de la Faceta Afectiva

Actitudes

- Se fomenta una actitud sanamente escéptica frente a la información estadística presente en los medios.
- Se promueve una actitud de supervisión durante el proceso de resolución de problemas, evaluando continuamente la razonabilidad de los resultados.
- Se aprecia la eficacia del ciclo de investigación en la resolución de problemas.

Fuente. Resultados de la investigación.

Faceta Interaccional. referida a las competencias comunicativas del profesor en formación con su formador y pares, junto a su capacidad de trabajo autónomo, sumado al uso de la evaluación formativa por parte de los formadores. Los indicadores obtenidos para esta faceta se presentan en el Tabla 12.

Faceta Mediacional. Referida al uso de recursos disponibles (informáticos, audiovisuales o de comunicación virtual) para el planteamiento de situaciones vinculadas con la práctica de la enseñanza y su análisis en los tiempos disponibles para ello. En este sentido, el Tabla 13 contiene los indicadores de esta faceta.

Tabla 12

Indicadores de idoneidad de la Faceta Interaccional

Interacción formador – futuro profesor

- Se incluye que los formadores alienten a sus estudiantes a esforzarse por mejorar su enseñanza continuamente.

Autonomía del futuro profesor

- Se promueve la autonomía y perseverancia en la resolución de problemas a lo largo del ciclo de investigación.

Uso de la evaluación formativa

- Se potencia y valoriza la evaluación formativa.
- Se promueve que la evaluación enfatice en la comprensión e interpretación conceptual por sobre la aplicación de fórmulas y algoritmos.
- Se fomenta que los formadores utilicen medios de evaluación apropiados a la disciplina, como los proyectos estadísticos, que sean un ejemplo a sus prácticas futuras.

Fuente. Resultados de la investigación.

Tabla 13

Indicadores de idoneidad de la Faceta Mediacional

<i>Recursos materiales</i>
• Se promueve el uso de herramientas tecnológicas para profundizar en la enseñanza de la disciplina y optimizar el tiempo destinado a ella.
<i>Tiempo para la enseñanza y aprendizaje</i>
• Se consideran al menos dos cursos destinados al estudio de la estadística y uno a su enseñanza.

Fuente. Resultados de la investigación.

Faceta Ecológica. Abarcar el conocimiento del formador en cuanto al currículo respectivo, el uso de nuevas tecnologías en la implementación de actividades formativas basadas en la investigación y la conexiones con otras áreas disciplinares, complementado con una formación en valores y pensamiento crítico. El Tabla 14 resume los indicadores correspondientes a esta faceta.

Tabla 14

Indicadores de idoneidad de la Faceta Ecológica

<i>Adaptación del currículo</i>
• Se promueve la modelización de situaciones de la vida real. • El currículo para futuros profesores incorpora aspectos del contenido estadístico y del conocimiento especializado para la enseñanza. • Los cursos de profesores se alinean con los principales hallazgos de investigación y dan oportunidades idóneas de enseñanza.
<i>Innovación didáctica</i>
• Se incluye el uso de <i>softwares</i> estadísticos que promuevan múltiples experiencias para analizar situaciones reales.
<i>Adaptación socio-cultural y profesional</i>
• Se promueve trabajar en formas propias de la disciplina para desenvolverse, de manera efectiva y eficiente, frente a las demandas profesionales que le impone la sociedad.
<i>Educación en valores</i>
• Se potencia una sólida formación en valores como la responsabilidad, perseverancia y comportamiento ético.
<i>Conexiones intra e interdisciplinares</i>
• Se fomenta la aplicación de las matemáticas para ayudar a responder a preguntas estadísticas que surgen en la vida diaria. • Se promueve el reconocimiento de las conexiones verticales de los temas estadísticos entre los niveles educativos. • Se promueve el reconocimiento de las conexiones horizontales con el currículo de matemáticas y otras áreas temáticas.

Fuente. Resultados de la investigación.

Reflexiones Finales

En este trabajo hemos abordado el problema de la valoración de planes de formación de profesores de matemática en didáctica de la estadística a través de la construcción de una *Guía de Valoración de Idoneidad Didáctica de procesos de Instrucción en Didáctica de la Estadística* (GVID-IDE), que sintetiza los principios curriculares que orientan dicho proceso, presentes en directrices de consenso en la comunidad educativa y elaboradas a partir de los principales resultados de investigaciones en este campo. En este punto, es importante destacar que, si bien los documentos consultados son específicos para Estados Unidos y Chile, pensamos que con el desglose presentado a lo largo de este artículo permitirá a otros investigadores consultar sus directrices y complementarlas con estos resultados.

De esta forma, podemos posicionar la GVID-IDE dentro de la familia de instrumentos de esta índole (p.e. Godino, 2013; Godino et al., 2013, 2012) cuyo manejo, como mencionamos en la sección 2.1, depende del actor educativo que la utilice. Si la aplicamos al profesor (o futuro profesor), la faceta epistémica abarca el conocimiento especializado del contenido respecto a sus estudiantes y en el caso del formador de profesores, las demás facetas le permitirán orientar, adaptar y desarrollar procesos de estudio de didáctica de la estadística.

Más aún, en el marco del *Modelo de Conocimientos y Competencias del profesor de matemáticas* (CCDM)(Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017) el futuro profesor de matemáticas (o formador) debe “adquirir competencia de análisis de la idoneidad didáctica de los procesos de estudio” (p. 12), de manera de utilizar este recurso para la reflexión global sobre la práctica didáctica, su valoración y mejora paulatina. Por esta razón, la construcción de la GVID-IDE y su posterior implementación puede considerarse un ejemplo de dicha competencia, que aporta con el proceso de reflexión meta-didáctica del proceso de formación de profesores en didáctica de la estadística.

Esperamos que esta guía sea un insumo valioso tanto para formadores de profesores como para quienes tengan la responsabilidad de diseñar o evaluar planes formativos para futuros docentes en el campo de educación estadística.

Referencias

- Ball, D. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51(3), 241-247.
- Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (2011). Overview: Challenges for Teaching Statistics in School Mathematics and Preparing Mathematics Teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics: Challenges for Teaching*

- and Teacher Education. *A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 407-418). New York: Springer.
- Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2017). Aplicación de indicadores de idoneidad afectiva en un proceso de enseñanza de probabilidad en educación secundaria. *Perspectiva Educacional*, 56(2), 92-116.
- Ben-Zvi, D. y Makar, K. (2016). International perspectives on the teaching and learning of statistics. En D. Ben-Zvi y K. Makar (Eds.), *The Teaching and Learning of Statistics: International Perspectives* (pp. 1-10). Cham: Springer.
- Breda, A., Font, V., Marina, V. y Lima, R. (2015). A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 8(2), 1-41.
- CCSSI. (2010). *Common core state standards for mathematics*. Washington: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.
- Franklin, C., Bargagliotti, A., Case, C., Kader, G., Scheaffer, R. y Spangler, D. (2015). *Statistical Education of Teachers (SET)*. American Statistical Association (ASA).
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report. A pre-K-12 curriculum framework*. Alexandria, Virginia: American Statistical Association (ASA).
- GAISE College Report, A. R. C. (2016). *Guidelines for Assessment and Instruction Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) College Report*. Recuperado a partir de <http://www.amstat.org/education/gaise>.
- Gal, I. (2002). Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-51.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en didáctica de la matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49-68). Jaén: SEIEM.
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 111-132.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *Revemat: revista eletrônica de educação matemática*, 8(1), 46-74.
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoraciones de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las Matemáticas. *Paradigma*, 27(2), 221-252.
- Godino, J. D., Contreras, Á. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(1), 39-88.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113.
- Godino, J. D., Ortiz, J., Roa, R. y Wilhelmi, M. (2011). Models for Statistical Pedagogical Knowledge. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics - Challenges for Teaching and Teacher Education A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 271-282). New York.

- Godino, J. D., Rivas, H. y Arteaga, P. (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Práxis Educativa (Brasil)*, 7(2), 331-354.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ª edición). México DF: McGraw-Hill.
- Hill, H., Ball, D. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: Teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.
- MINEDUC y CPEIP. (2012). *Estándares Orientadores para carreras de Pedagogía en Educación Media*. (CPEIP, Ed.), *Estándares Pedagógicos y Disciplinarios*. Santiago.
- Ministerio de Educación Chile. (2009). *CURRICULUM. Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la Educación Básica y Media*. Santiago: MINEDUC.
- Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, (3), 1-35.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.
- Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor. *Paradigma*, XXXVI(1), 87-109.
- Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Introducción

En el campo de investigación sobre Didáctica de la Estadística, la formación de profesores ha sido un tópico cada vez más reportado en libros especializados (Batanero, Burrill y Reading, 2011; Franklin et al., 2015; Ben-Zvi y Makar, 2016), handbooks (Ben-Zvi, Makar y Garfield, 2018) y actas de congresos sobre educación estadística (Batanero, Chernoff, Engel, Lee y Sánchez, 2016; Eichler y Zapata-Cardona, 2016), siendo destacado como un aspecto fundamental para promover mejoras en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la disciplina. Esta situación, se puede justificar principalmente debido a la creciente valorización con la que se ha resaltado el rol de la estadística en la sociedad de la información. En consecuencia, la enseñanza de la estadística ha sido promovida por diversos agentes educativos y políticos e instituciones internacionales, quienes destacan la necesidad de promover la implementación de políticas de desarrollo económico y cultural que permitan proporcionar a los ciudadanos las herramientas de análisis de la información y toma de decisiones para crear una sociedad más democrática (Gal, 2002; ONU, 2015; Ben-Zvi y Makar, 2016).

En consecuencia, un gran número de países se han sumado al movimiento reformista en torno a la educación estadística, estableciendo su enseñanza desde los niveles iniciales de educación primaria con contenidos básicos de la disciplina, hasta terminar la trayectoria escolar con elementos de inferencia estadística. Estos cambios, han incrementado las expectativas de aprendizaje de la estadística en la escuela y han establecido nuevas metas para la formación de profesores de matemática, quienes deben responder satisfactoriamente a las exigencias actuales de su campo de acción profesional. Sin embargo, debido a la complejidad que conlleva ser responsable de los procesos de enseñanza de la disciplina, es necesario prestar atención a la proposición de normas que orientan y regulan la formación de profesores en este tópico, ya que si bien no disponemos de un recetario que indique cómo enseñar, sería de utilidad para el formador o futuro profesor disponer de guías que faciliten operativamente el diseño instruccional y apoyen la reflexión sistémica acerca de su labor (Godino, Batanero, Rivas y Arteaga, 2013).

A través de esta investigación afrontamos el problema de evaluar el grado en que la programación de los procesos de formación sobre didáctica de la estadística para profesores de matemática, se ajusta a los requerimientos de consenso internacional que orientan esta etapa, clasificados según la gama de facetas que son parte de la Teoría de Idoneidad Didáctica

³ Ruz, F, Molina-Portillo, E. y Contreras, J.M. (2020). Idoneidad didáctica de procesos de instrucción programados sobre didáctica de la estadística. *PNA*, 14(2), 141-172.

(Godino, 2013). De esta forma, el objetivo de este trabajo es conocer el grado de idoneidad alcanzado por una colección de cuatro programas de formación sobre didáctica de la estadística pertenecientes a universidades chilenas.

A continuación, se describe a grandes rasgos la formación de profesores de matemática chilenos, destacando sus principales características y responsables, con la intención de contextualizar los resultados obtenidos. Luego, explicitamos el problema y marco teórico que respaldan el enfoque adoptado en esta investigación, destacando la noción de Idoneidad Didáctica, sus facetas y componentes. Posteriormente, se detalla la metodología empleada en el proceso de evaluación de una colección de programas de formación de profesores en didáctica de la estadística, para dar paso a la sección de resultados, donde identificamos el grado de idoneidad epistémica, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica alcanzado por cada uno de los programas analizados, detectando sus principales puntos de mejora. Finalmente, el trabajo concluye con algunas reflexiones finales y proyecciones de la investigación reportada.

La Formación de Profesores de Matemática en Chile. En Chile, desde el año 1998 se destinó un eje del marco curricular de matemática a la estadística y la probabilidad, pero fue en la actualización del año 2009 de este documento donde se consideró dentro del eje de *datos y probabilidades* (para niveles 1 al 6) o *probabilidad y estadística* (para niveles 7 al 12), la enseñanza de la estadística, las probabilidades y la inferencia, avanzando progresivamente durante todo el recorrido escolar (Ministerio de Educación de Chile, [MINEDUC], 2009; 2012; 2015). Esta actualización continúa en proceso de desarrollo curricular, habiéndose publicado hasta la fecha las bases de los niveles 1 al 10, sumando consigo nuevas exigencias a la labor profesional del responsable de su implementación.

A su vez, la formación de profesores de matemática chilenos es regulada por el Ministerio de Educación a través del Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (MINEDUC y CPEIP, 2012) y la colaboración de diversos Centros de investigación específicos del campo. No obstante, esta entidad otorga autonomía a las instituciones formadoras para que a través de sus institutos, escuelas o departamentos formulen programas de estudio específicos para cada uno, generando una variada gama de asignaturas que articulan el perfil profesional del profesor de matemática que promueven. Actualmente, un total de 30 universidades ofrecen el grado de profesor de matemática (CPEIP, 2018), ya sea en sí mismo o en conjunto a algún área afín, como física, computación o estadística, por lo que pueden proyectarse la variedad de posibilidades que entrega el país para formar estos profesionales.

En este contexto, el formador a cargo de impartir docencia es el responsable de diseñar y sistematizar el proceso de instrucción, mandatado por el contenido de los programas diseñados dentro de cada institución. Sin embargo, aunque maneje los principios disciplinares, pedagógicos y didácticos orientadores del diseño instruccional, su aplicación a temas específicos “deja demasiados grados de libertad, lo que torna insegura y excesivamente compleja la acción del docente” (Godino, 2013, p. 48). Por tanto, identificando que la clave para prosperar en la educación estadística comienza por los profesores en sí mismos, en este trabajo fijamos nuestra atención en analizar qué tan idóneo es este proceso respecto a las exigencias actuales.

Marco Teórico

Los sustentos teóricos que respaldan esta investigación se enmarcan en el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), que desde sus orígenes se ha presentado como un sistema teórico inclusivo, abierto y dinámico, en el que se aspira a incluir las herramientas necesarias y suficientes para investigar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática en todos los niveles educativos. Por tanto, para alcanzar los objetivos establecidos, tomamos del EOS la Teoría de Idoneidad Didáctica (Godino, 2013) y el instrumento GVID-IDE (Ruz et al., 2019), cuyos componentes aplicados a este estudio pasamos a exponer en lo que sigue.

Teoría de Idoneidad Didáctica. En el sistema teórico que configura el EOS se ha incluido la noción de idoneidad didáctica como criterio sistémico de optimización de un proceso de instrucción matemática. Se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno).

De esta forma, un proceso de instrucción logrará un alto grado de idoneidad didáctica si es capaz de articular de forma coherente y sistémica, los seis criterios parciales de idoneidad siguientes (Godino, 2013), referidos a cada una de las seis facetas implicadas en los procesos de instrucción matemática:

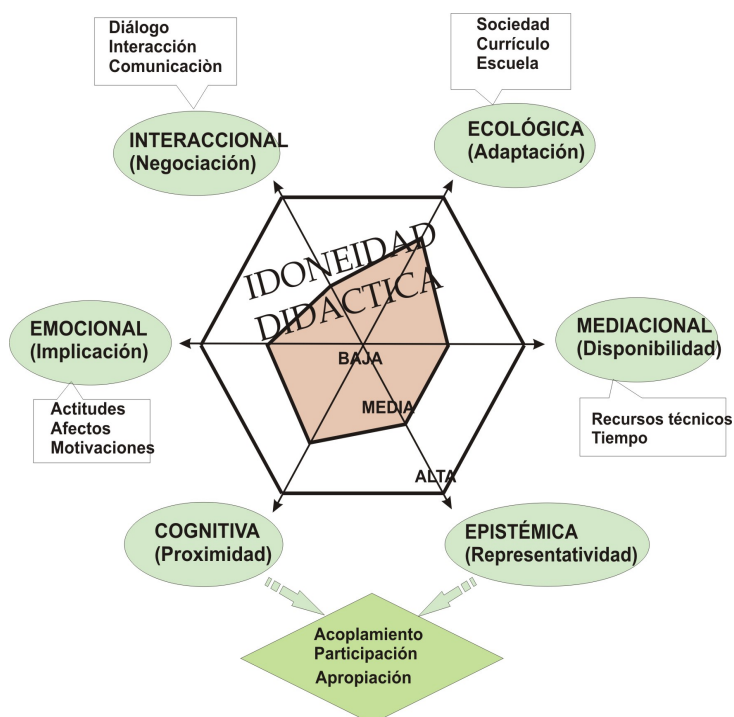
- Idoneidad epistémica: Grado de representatividad de los significados institucionales implementados o pretendidos, respecto a un significado de referencia.
- Idoneidad cognitiva: Grado en que los significados pretendidos/implementados son próximos a los significados personales logrados por los estudiantes.

- Idoneidad afectiva: Grado de implicación o compromiso del alumnado en el proceso de estudio, que puede verse influenciado por factores institucionales o personales.
- Idoneidad interaccional: Grado en que configuraciones y trayectorias didácticas permiten identificar y/o resolver conflictos semióticos potenciales durante el proceso de instrucción.
- Idoneidad mediacional: Grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.
- Idoneidad ecológica: Grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo institucional, la sociedad y al entorno en que se desarrolla.

A modo de resumen, en la Figura 1 se muestran las seis facetas descritas antes, representadas por un hexágono regular que alude a un proceso de estudio programado, donde a priori se supone un grado máximo de las idoneidades parciales. Además, el hexágono irregular interno correspondería a las idoneidades efectivamente logradas en la valoración de procesos de instrucción programados o en la reflexión meta-didáctica de un proceso de estudio implementado.

Figura 1

Facetas de Idoneidad Didáctica



Fuente. Godino (2013, p. 116)

Sobre la utilización de esta herramienta en la valoración de procesos de instrucción en didáctica de la matemática, Godino et al. (2013) distinguen dos perspectivas desde la cual abordarlo. Por un lado, dentro de la faceta epistémica, organizan en seis contenidos didáctico-matemáticos (disciplinares, cognitivos, afectivos, interaccionales, mediacionales y ecológicos) los conocimientos institucionales sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática que intervienen en la labor profesional del profesor en formación, respecto a sus estudiantes. Un segundo foco de análisis abarca las cinco facetas restantes, que involucran al formador con sus estudiantes, respecto al aprendizaje (faceta cognitiva), intereses y motivaciones (faceta afectiva), modos de interacción (faceta interaccional), uso de recursos (faceta mediacional) y conexiones intra e interdisciplinarias (faceta ecológica) en el proceso formativo.

En este contexto, los autores diseñan la “Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de instrucción en Didáctica de la Matemática” [GVID-IDM], que aplican en un programa de formación en didáctica de la matemática para profesores de educación primaria en Chile. Entre sus resultados dentro de la faceta epistémica, sobre el contenido matemático únicamente se hace alusión al uso de situaciones problema para aprender la disciplina; en cuanto al contenido cognitivo se promueve la metacognición, considerar las diferencias y evaluar los aprendizajes; no se refieren al contenido afectivo; sobre lo interaccional se mencionan distintas técnicas de trabajo grupal e individual; en lo mediacional se promueve el uso de recursos tecnológicos; y en el contenido ecológico se enfatiza únicamente en el estudio del currículo escolar. En la faceta cognitiva, se promueven diversos procedimientos de evaluación, diseño de experiencias de enseñanza, la apertura a la innovación didáctica y la práctica reflexiva. Además, dentro de este programa no se refieren a cómo motivar a los futuros profesores al estudio de los contenidos (faceta afectiva), a los recursos utilizables (faceta mediacional), relaciones entre los sujetos intervinientes (faceta interaccional), o a las conexiones de la didáctica de la matemática con otras áreas disciplinares (faceta ecológica).

En el caso de la estadística, Rivas (2014) diseña la “Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Formación Estadística” [GVID-PFE] y reporta los resultados de su aplicación en un programa sobre estadística para profesores de primaria chilenos. Concluye un grado de idoneidad adecuado en términos epistémicos, mientras que insuficiente para las demás cinco facetas, siendo la referida a aspectos interaccionales aquella más descendida. Por tanto, notamos que la noción de idoneidad didáctica y sus criterios además de ser una herramienta para orientar la reflexión meta-didáctica sobre la práctica docente (Breda, Pino-Fan y Font, 2017), proveen una guía para diseñar, implementar y evaluar procesos de formación de profesores, por lo que nos interesamos en extender los trabajos mencionados al caso de la formación en didáctica de la estadística, como expondremos en lo que sigue.

Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Instrucción en Didáctica de la Estadística. Debido a que las facetas y componentes de idoneidad didáctica no son observables directamente, es necesario inferirlos a partir de indicadores empíricos. De esta forma, Ruz, Molina-Portillo y Contreras (2019) proponen una “Guía para la Valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de Instrucción en Didáctica de la Estadística” (GVID-IDE), que condensa, a través de indicadores, el conocimiento necesario por el profesor de matemática para llevar a cabo la labor de enseñar estadística. Dichos indicadores, fueron inferidos a partir de normas contenidas en documentos de consenso internacional que orientan la formación estadística de profesores (Franklin et al., 2015) y específicos para la realidad chilena (MINEDUC y CPEIP, 2012), por medio de la técnica de análisis de contenido.

Este instrumento, permite evaluar procesos de instrucción programados o implementados, distinguiendo dos dimensiones de análisis que fueron adaptadas para el caso de la formación en didáctica de la estadística, a partir de los resultados de Godino et al. (2013). La primera, que se organiza dentro de la Faceta Epistémica, sintetiza los conocimientos institucionales sobre la enseñanza y aprendizaje de la estadística que intervienen en la labor profesional del profesor en formación respecto a sus futuros estudiantes, en términos: disciplinares, cognitivos, afectivos, interaccionales, mediacionales y ecológicos. La segunda dimensión, es contemplada en las facetas restantes, que involucran al formador con sus estudiantes (profesores en formación) en términos: (1) Cognitivos, referidos al aprendizaje del contenido didáctico-estadístico por los futuros profesores; (2) Afectivos, que considera las actitudes y motivaciones de los futuros profesores hacia el aprendizaje del contenido didáctico-estadístico; (3) Interaccionales, que abarca los modos de interacción y discurso en el proceso de formación de profesores; (4) Mediacionales, sobre el uso de recursos en el proceso formativo, y (5) Ecológicos, que contemplan el conocimiento del formador en cuanto al currículo, el uso de nuevas tecnologías basadas en la investigación y la conexiones con otras áreas disciplinares.

Metodología

Esta investigación se cataloga dentro del enfoque cualitativo con un alcance descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2014), que a través de la técnica de Análisis de contenido (Krippendorff, 1990) se identifica la presencia o ausencia de cada una de las características descritas en los indicadores que conforman la GVID-IDE en una colección de programas de estudio específicos o afines sobre didáctica de la estadística chilenos. Por tanto, en lo que sigue,

caracterizamos la muestra de documentos analizados, ejemplificamos la manera de implementar los indicadores y explicitamos el procedimiento utilizado para conocer el grado de idoneidad didáctica parcial o global alcanzado en cada caso.

La muestra. La formación de profesores de matemática chilenos, abarca diversos aspectos disciplinares, pedagógicos, didácticos y complementarios, que organizados en una colección de asignaturas conforman la denominada *mallla curricular*, encargada de regular y orientar dicha formación de manera específica para cada institución de educación superior (equivalentes a las directrices curriculares en el caso de la escuela). De esta forma, para cada una de las 30 instituciones que ofrecen el grado de profesor de matemáticas existe una malla curricular diferente, que como mencionamos en la sección inicial, permite formar a estos profesionales según una amplia gama de posibilidades. No obstante, una de las principales características curriculares que comparte esta variedad de perfiles, es que la formación disciplinar (matemática o estadística) se aborda de forma separada de la formación didáctica, destinando este último aspecto a asignaturas sobre *didáctica* o *enseñanza* del contenido en cuestión. Incluso usualmente cada una de ellas puede estar asignada a departamentos o facultades diferentes, lo que dificulta que su desarrollo esté idóneamente articulado entre sí.

En este contexto, dado que nuestro interés es analizar la formación de dichos profesores en el campo de la didáctica de la estadística, investigamos la totalidad de mallas curriculares vigentes para el curso 2018, detectando que únicamente en diez de las 30 instituciones se programa una asignatura acerca de la enseñanza o didáctica de la estadística. De esta forma, considerando la *población* de “Programas de asignaturas sobre enseñanza o didáctica de la estadística en Chile”, se selecciona una *muestra* no probabilística de cuatro documentos, equivalentes a un 40% del total posible, respetando la distribución geográfica de las instituciones a las que pertenecen, con la intención estimar la proporción de indicadores satisfechos en cada faceta de interés. Por tanto, contactamos de manera telemática con los responsables (jefes o coordinadores de carrera) de cada una de las cuatro universidades seleccionadas, con la intención de invitarlos a participar en este proceso valorativo, accediendo a ella y dándonos acceso a los documentos solicitados, detallados en la Tabla 1.

Tabla 1

Programas (P) de asignaturas analizados

Programa	Nombre de la asignatura	Zona geográfica
P1	“Didáctica de la Estadística y Probabilidades”	Norte
P2	“Didáctica de la Estadística”	Centro
P3	“Didáctica de la Estadística”	Centro
P4	“Matemáticas en la Enseñanza Media III”	Sur

Fuente. Elaboración propia

Implementación de la GVID-IDE. La GVID-IDE se compone por un total de 90 indicadores distribuidos de manera asimétrica según las distintas facetas implicadas en los procesos de instrucción, en el marco de la Teoría de idoneidad didáctica, como se muestra en la Tabla 2. En ella, es importante notar que, a pesar de superar en número a las demás, únicamente la primera dimensión (Faceta Epistémica) incluye un desglose sobre los contenidos específicos que el futuro profesor debe dominar respecto a sus estudiantes. Las demás facetas, son consideradas en conjunto como otra dimensión, pero sus indicadores son cuantificados independientes entre sí, puesto que cada uno considera algún aspecto distinto de las responsabilidades del formador con los docentes en formación.

Tabla 2

Número de indicadores de la GVID-IDE según facetas de análisis

Faceta	Número de Indicadores
Epistémica	
• Contenido Estadístico (23)	
• Contenido Cognitivo (8)	
• Contenido Afectivo (6)	60
• Contenido Interaccional (10)	
• Contenido Mediacional (5)	
• Contenido Ecológico (8)	
Cognitiva	11
Afectiva	3
Interaccional	5
Mediacional	2
Ecológica	9

Fuente. Elaboración propia

Además, debido a la extensión de la GVID-IDE, con la intención de contribuir en una adecuada comprensión de los resultados obtenidos, en la Tabla 3 ejemplificamos el proceso de implementación del instrumento respecto a algunos indicadores que fueron satisfechos por los cuatro programas, de los que se agregan fragmentos específicos del texto que permitieron evaluar el criterio como satisfactorio en cada caso. Dejamos para la sección siguiente la presentación de algunos indicadores deficientes por alguno de los documentos analizados, que complementamos sugiriendo ciertos aspectos que puedan aportar en su mejora.

Tabla 3

Ejemplos de indicadores satisfechos en todos los programas analizados

Indicador / Faceta	Fragmento del programa
Se promueve un estilo de instrucción interactivo, centrado en problemas reales y sensible al pensamiento del estudiante / <i>Faceta Epistémica – Contenido interaccional</i>	“Conduce el aprendizaje de prácticas básicas de la estadística, proporcionando criterios para una interpretación crítica de la información de los medios de comunicación” (P1, p. 132-133)
	“generar una actividad verdaderamente de interés, atingente y utilidad para los alumnos de estos futuros profesores. La situación problema enfrenta al estudiante con el desafío de promover el desarrollo del pensamiento estadístico y/o probabilístico en el alumno” (P2, 5)
	“Planificar clases de tópicos estadísticos considerando el Análisis Didáctico como herramienta fundamental.” (P3, p. 2)
	“Está capacitado para conducir el aprendizaje de prácticas básicas de la estadística [...] proporcionando criterios para una interpretación crítica de la información” (P4, p. 10)
El currículo para futuros profesores incorpora aspectos del contenido estadístico y del conocimiento especializado para la enseñanza / <i>Faceta Ecológica</i>	“Utiliza los conocimientos disciplinares de la estadística y las probabilidades para diseñar, planificar y evaluar las competencias que son promovidas por los contenidos...” (P1, p. 132)
	“En esta asignatura los estudiantes evidenciarán que conocen el saber disciplinar de la estadística y probabilidad para provocar los aprendizajes escolares” (P2, p. 4)
	“Comprender la articulación entre la estadística formal y la estadística escolar en términos de los contenidos del ámbito del eje de datos y probabilidades” (P3, p. 2)
	“Tratamiento didáctico de contenidos propiamente del eje de Datos y Azar” (P4, p. 10)

Fuente. Elaboración propia

Análisis de la Idoneidad Didáctica. Para conocer el grado de idoneidad didáctica alcanzado, analizamos el número de indicadores satisfactorios en cada faceta, que por ser distinto entre sí (Tabla 2), cuantificamos de manera relativa a la proporción (porcentaje) de indicadores satisfechos, para así elaborar una medida de idoneidad que nos permita comparar los resultados obtenidos. De esta forma, para expresar el grado de idoneidad *parcial* de cada programa de estudio analizado, utilizamos el criterio cualitativo de calificación de Rivas (2014, p. 135) categorizando en tres grupos los posibles resultados: (1) *Idoneidad baja*, si el porcentaje de indicadores alcanzados es menor a 40; (2) *Idoneidad media*, cuanto este valor es mayor o igual a 40, pero menor que 70; e (3) *Idoneidad alta*, si el porcentaje es mayor o igual a 70. Posteriormente, a partir de los porcentajes de idoneidad alcanzados por cada programa, estimamos de manera *global* qué tan idónea es actualmente esta formación en las instituciones analizadas, respecto cada una de las seis facetas analizadas.

Finalmente, si bien esta medida es útil para comparar los resultados con otras investigaciones de esta índole, no es lo fundamental de este estudio, ya que como mencionamos anteriormente, el aporte esencial de la noción de idoneidad didáctica es la identificación de aspectos que mejorar en los programas analizados. Por tanto, complementamos la presentación de resultados con la identificación de una serie de elementos que reforzar en esta arista a la formación del profesorado y que no son abarcados en los documentos analizados.

Resultados

En esta sección, describimos los resultados obtenidos tras la valoración de una muestra de programas de asignaturas sobre didáctica o enseñanza de la estadística por medio de la GVID-IDE, que organizamos en las dos dimensiones de análisis del instrumento. La primera, que comprende la Faceta Epistémica y la segunda, que compromete las Facetas Cognitiva, Afectiva, Interaccional, Mediacional y Ecológica. Además, en el Anexo presentamos la colección completa de indicadores analizados y su condición de satisfecho, o no, en cada programa de estudio. Finalmente, concluimos esta sección con una estimación del grado de idoneidad global alcanzado por los programas analizados, de manera de proyectar el estado actual de la formación pretendida en didáctica de la estadística por las instituciones que participan de este estudio.

Dimensión 1: Faceta Epistémica. Dentro de esta dimensión, analizamos seis contenidos didáctico-estadísticos que todo profesor, en ejercicio o formación, debe dominar respecto a sus estudiantes desde el punto de vista institucional y, por tanto, deberían ser

promovidos por los programas analizados para considerarlos epistémicamente idóneos. En este contexto, la Tabla 4 presenta el número de indicadores satisfechos por cada programa según la característica de análisis considerada, agregando entre paréntesis la proporción (porcentaje) de cumplimiento respecto al total de indicadores que abarca cada contenido, incluidos junto a su denominación en la primera columna de la Tabla 4. Por ejemplo, el resultado 14(60.9) del Programa 1 respecto al contenido estadístico indica que fueron 14 los indicadores satisfechos, que representan un 60.9% respecto al total posible ($n = 23$).

En cuanto a la categoría que abarca el *Contenido Estadístico*, esta agrupa un total de 23 indicadores que resumen la manera en que el profesor debe comprender la disciplina, destacando la resolución de problemas como una herramienta para dar sentido al contenido y articular sus componentes lingüísticos, procedimentales y argumentativos. De esta forma, en la Tabla 4 podemos observar que el Programa 2 es quien alcanza el mayor porcentaje con un 87% y quien ocupa el último puesto, con más de un tercio de diferencia, es el Programa 3 que alcanza solo un 26.1%. Esta situación refleja la escasa atención que se le otorga al contenido en el Programa 3, que podría justificarse en el hecho de la malla curricular a la que está adherido considera la formación estadística como parte de otras dos asignaturas. Sin embargo, cada una de las tres mallas curriculares a las que pertenecen los demás programas incluyen entre dos o tres asignaturas dedicadas a la formación estadística, y aun así se refieren al conocimiento disciplinar como una fuente fundamental para promover su enseñanza. Por tanto, destacamos el desafío pendiente que tiene esta institución por incorporar más aspectos del contenido estadístico en esta asignatura y no asumirlos como conocimientos previos, ya que la formación estadística de un futuro profesor no persigue los mismos objetivos que otro profesional y una asignatura destinada a su didáctica debería ser el lugar donde explicitar esas diferencias.

Tabla 4

Frecuencia (porcentaje) de indicadores de idoneidad epistémica satisfechos

Categorías de conocimiento	P1	P2	P3	P4
C. Estadístico ($n = 23$)	14 (60.9)	20 (87.0)	6 (26.1)	11 (47.8)
C. Cognitivo ($n = 8$)	4 (50.0)	4 (50.0)	7 (87.5)	5 (62.5)
C. Afectivo ($n = 6$)	3 (50.0)	2 (33.3)	2 (33.3)	3 (50.0)
C Interaccional ($n = 10$)	5 (50.0)	4 (40.0)	5 (50.0)	5 (50.0)
C. Mediacional ($n = 5$)	2 (40.0)	1 (20.0)	3 (60.0)	4 (80.0)
C. Ecológico ($n = 8$)	2 (25.0)	4 (50.0)	4 (50.0)	4 (50.0)
Total: Faceta Epistémica ($n=60$)	30 (50.0)	35 (58.3)	27 (45.0)	32 (53.3)

Fuente. Resultados de la investigación

Además, para contextualizar de mejor manera estos resultados, en la Tabla 5 se presentan algunos indicadores propuestos en Ruz et al. (2019), que fueron insatisfactorios por uno o más de los programas analizados, con los que se identifican aspectos específicos de mejora en cada caso. Lo anterior, se realiza con el interés de ejemplificar vías potenciales de mejora que ofrece la GVID-IDE, aunque se recomienda revisar el Anexo para una identificación completa del estado de cumplimiento de todos los indicadores que conforman esta categoría.

Por otro lado, una segunda categoría considera el *Contenido Cognitivo*, que a través de ocho indicadores sintetiza el conocimiento especializado del futuro profesor respecto al aprendizaje de sus estudiantes. En este sentido, a diferencia de la categoría anterior, es el Programa 3 quien supera a los demás con un 87.5% de indicadores satisfechos, dejando en último lugar a los Programas 1 y 2 con solo un 50.0%. No obstante, si bien ambos coinciden en promover el aprendizaje sobre las concepciones, dificultades y errores comunes de los estudiantes al aprender la disciplina, difieren en otros aspectos. Por ejemplo, el Programa 1 incluye orientaciones para adaptar el currículo según las diferencias individuales (estilos de aprendizaje, necesidades educativas especiales y la evaluación diferenciada) que el Programa 2 no considera, pero este último incluye sugerencias sobre cómo tratar los conocimientos previos para introducir la comprensión de tópicos de mayor dificultad, lo que establece distintos puntos de mejora en cada caso.

Tabla 5

Algunos indicadores de idoneidad epistémica (C. estadístico) no satisfechos

Componente	Indicador	Insatisfactorios
Situaciones Problema	“Se incluyen problemas significativos del mundo real que puedan ser desarrollados por medio del proceso de resolución de problemas estadísticos”	P4
Lenguajes	“Se proponen diversas representaciones para describir patrones de asociación de dos variables, ya sean categóricas (tablas de doble entrada) o cuantitativas (gráfico de dispersión)”	P1, P3
Reglas	“Se incluye diferenciar situaciones donde sea necesario un estudio observacional o un estudio comparativo”	P1, P2, P3, P4
Argumentos	“Se incluye evaluar y criticar la plausibilidad de conclusiones alternativas”	P1, P3, P4
Relaciones	“Se promueve relacionar la distribución de los datos y su variabilidad con modelos estadísticos sesgados y no sesgados”	P1, P3, P4

Fuente. Resultados de la investigación

Tabla 6*Algunos indicadores de idoneidad epistémica (C. afectivo) insatisfactorios*

Componente	Indicador	Insatisfactorios
Intereses y necesidades	“Se analizan situaciones reales para identificar modos de pensar, sentir y actuar de los estudiantes”	P1, P2, P4
Actitudes	“Se promueve una actitud positiva hacia la resolución de problemas estadísticos”	P3
Emociones	“Se promueve la seguridad física y afectiva de los estudiantes”	P1, P2, P3, P4

Fuente. Resultados de la investigación

La siguiente categoría se refiere al *Contenido Afectivo*, con un total de seis indicadores, que expresan el conocimiento acerca de los intereses, necesidades, actitudes y emociones de los estudiantes al aprender estadística. Al respecto, como se muestra en la Tabla 4, los Programas 1 y 4 son los de mayor porcentaje de cumplimiento coincidiendo en un 50.0% y, en segundo lugar, con el 33.3% concuerdan los Programas 2 y 3. Para interpretar de mejor forma estos resultados, en la Tabla 6 se presentan algunos indicadores insatisfactorios asociados a este contenido.

En este caso, se identifica una falencia común entre los cuatro programas, en cuanto a que omiten cualquier indicación respecto a las emociones que deberían promoverse en los estudiantes para aprender estadística. A su vez, los Programas 1 y 4 no solo coinciden en el porcentaje de cumplimiento (50.0%), sino que también en los indicadores satisfechos, dejando pendiente la promoción de tareas y actividades que involucren situaciones reales, donde se reconozcan modos de pensar, sentir y actuar de los estudiantes. Por otro lado, a pesar de la igualdad porcentual de los Programas 2 y 3 (33.3%), mientras que el primero promueve una actitud positiva hacia la resolución de problemas estadísticos, el Programa 3 omite sugerencias actitudinales, pero promueve mayor atención a las necesidades e intereses afectivos de los estudiantes (dos de tres indicadores).

La cuarta categoría de análisis considera el *Contenido Interaccional*, con un total de diez indicadores acerca de la manera de interactuar en el aula, de forma autónoma, entre pares y entre el profesor y los estudiantes. En este caso, los resultados obtenidos presentan una triple coincidencia en las proporciones de cumplimiento, ya que como se muestra en la Tabla 4, los Programas 1, 3 y 4 alcanzan el mayor porcentaje con un 50%, mientras que el Programa 2 cumple solo un 40% de ellos. En esta categoría, a pesar de la diferencia entre los resultados, se

presenta una situación especial ya que los cuatro programas analizados coinciden en carecer de sugerencias acerca de la manera en que el futuro profesor debiera promover el trabajo autónomo de los estudiantes y su interacción entre ellos. A su vez, los Programas 1, 3 y 4 coinciden en los indicadores que satisfacen, por lo que podrían reforzar los referido la *interacción profesor-estudiante* incentivando la participación de los estudiantes en la instrucción, y la *evaluación formativa* incluyendo nuevos métodos que enfaticen en el proceso de resolución de problemas, como preguntas de respuesta abierta o proyectos de investigación.

Una quinta categoría considera el *Contenido Mediacional*, que con un total de cinco indicadores resumen el conocimiento acerca de las posibilidades de usar recursos manipulativos e informáticos en la enseñanza de la disciplina, según el tiempo disponible. De esta forma, la Tabla 4 muestra que el Programa 4 es quien satisface una proporción mayor de indicadores y el Programa 2 la menor, con un 80% y un 20% respectivamente. En cuanto al Programa 4, a este solo le restó satisfacer un indicador respecto a las condiciones del aula para alcanzar el total, de manera que su mejora se proyecta en la medida que incorpore sugerencias para generar en el aula un espacio acogedor y estimulante para los estudiantes (ver Tabla 7).

Por otro lado, el Programa 2 incluye promover el uso de simulaciones computacionales para la enseñanza de las probabilidades e inferencia estadística, pero omite cualquier indicación respecto al uso de TIC's en la enseñanza de la estadística y el tiempo disponible, al igual que el Programa 1. Además, dentro del Programa 3 no se hacen referencias acerca de las condiciones del aula, por lo que deja como insatisfactorios ambos indicadores de este componente, que se establecen como el principal aspecto a mejorar.

Tabla 7

Algunos indicadores de idoneidad epistémica (C. mediacional) insatisfactorios

Componente	Indicador	Insatisfactorios
Recursos	“Se promueve el uso de recursos y TICs que potencien el desarrollo de la enseñanza de la estadística”	P1, P2
Condiciones del aula	“Se promueve generar en el aula y establecimiento educativo un espacio acogedor y estimulante para los estudiantes”	P2, P3, P4
Tiempo	“Se gestiona eficazmente el tiempo de la clase a favor del logro de los objetivos propuestos”	P1, P2

Fuente. Resultados de la investigación

La sexta y última categoría abarca el *Contenido Ecológico* con un total de ocho indicadores, referidos al conocimiento del futuro profesor acerca del currículo, sus adaptaciones socio-culturales y su posibilidad de incluir innovaciones didácticas para potenciar el proceso de enseñanza y aprendizaje. En esta oportunidad, se presenta una situación similar a la categoría sobre el contenido interaccional, ya que como se muestra en la Tabla 4 los Programas 2, 3 y 4 alcanzan el mayor porcentaje de indicadores satisfechos con un 50% y el Programa 1 satisface solo un 25% de ellos. Entre las coincidencias, es importante destacar que los cuatro programas no incluyen indicaciones acerca de las adaptaciones socio-culturales y profesionales que deben promoverse en el ámbito escolar. Además, los Programas 2, 3 y 4 no solo igualan en porcentaje, sino que también lo hacen en los mismos indicadores, dejando pendiente aspectos sobre educar en valores, conocer la normativa de integración y las interdependencias entre las distintas áreas curriculares. El Programa 1 también es deficiente en los aspectos mencionados anteriormente, pero además carece de sugerencias que promuevan la capacidad de adaptar el currículo y sus instrumentos para organizar la enseñanza, lo que establece otras metas para su mejora.

Finalmente, en la última fila de la Tabla 4 se incluye la suma de indicadores satisfechos por cada programa de estudio, según la gama de categorías que abarca la Faceta Epistémica. Por tanto, con porcentajes de cumplimiento que oscilan entre el 45 y 58.3%, catalogamos con un grado de idoneidad epistémica *media* a cada programa analizado.

Dimensión 2: Facetas Cognitiva, Afectiva, Interaccional, Mediacional y Ecológica.

Esta segunda dimensión, involucra al formador con los profesores en formación respecto a las cinco facetas restantes de la Teoría de Idoneidad Didáctica, a saber, las Facetas Cognitiva, Afectiva, Interaccional, Mediacional y Ecológica. En este sentido, la Tabla 8 presenta el número de indicadores satisfechos por cada programa según la faceta de análisis considerada, agregando entre paréntesis el porcentaje de cumplimiento respecto al total de indicadores que abarca cada una, incluidos junto a su denominación en la primera columna de la Tabla 8.

Tabla 8

Frecuencia (y porcentaje) de indicadores satisfechos en las facetas restantes

Faceta	P1	P2	P3	P4
Cognitiva (n = 11)	7 (63.6)	10 (90.9)	6 (54.5)	6 (54.5)
Afectiva (n = 3)	2 (66.7)	3 (100)	2 (66.7)	2 (66.7)
Interaccional (n = 5)	2 (40.0)	3 (60.0)	4 (80.0)	4 (80.0)
Mediacional (n = 2)	1 (50.0)	2 (100)	2 (100)	2 (100)
Ecológica (n = 9)	5 (55.6)	6 (66.7)	6 (66.7)	6 (66.7)

Fuente. Resultados de la investigación

La *Faceta Cognitiva*, con un total de 11 indicadores, abarca las expectativas de aprendizaje en didáctica de la estadística, donde el formador debe conocer las formas de razonar de los futuros profesores junto a sus estrategias, dificultades y errores en el aprendizaje de la enseñanza de la disciplina. En este caso, como se muestra en la Tabla 8, el Programa 2 es quien obtiene el mayor porcentaje con un 90.9% y quienes lo hacen en menor frecuencia son los Programas 3 y 4 con solo un 54.5%. Por tanto, siguiendo la metodología empleada, en la Tabla 9 se presentan algunos indicadores propuestos en Ruz et al. (2019) que fueron insatisfactorios, de manera de hacer más accesibles al lector los resultados obtenidos.

Al respecto, el Programa 1 es el único entre los cuatro que no promueve una comprensión progresiva de los conceptos estadísticos en el ámbito escolar, lo que a pesar de parecer un aspecto evidente, debería ser promocionado de manera explícita en esta asignatura. A su vez, en el Programa 2 únicamente uno de los indicadores fue insatisfecho, al no incluir indicaciones acerca del aprendizaje de las diferencias entre el pensamiento matemático (determinista) y estadístico (aleatorio). De esta forma, al igual que los demás programas, sus mejoras deberían encaminarse en su incorporación. Por otro lado, los Programas 3 y 4 satisfacen los mismos indicadores, dejando pendiente aquellos referidos a promover el aprendizaje conceptual de la estadística de forma similar a los estudiantes, el entendimiento de los modelos estadísticos y el aprendizaje de la inferencia estadística y el análisis de regresión lineal. En consecuencia, podemos catalogar con un grado de idoneidad cognitiva *media* a los Programas 1, 3 y 4, y con un grado *alto* al Programa 2.

La *Faceta Afectiva*, con un total de tres indicadores, se refiere a la actitud de los futuros profesores hacia la estadística y su enseñanza, que debe ser fomentada positivamente por el formador. En este contexto, como se muestra en la Tabla 8, el Programa 2 alcanza el máximo de indicadores satisfechos y los demás coinciden en el 66.7%.

Tabla 9

Algunos indicadores de idoneidad cognitiva no satisfechos

Componente	Indicador	Insatisfactorios
Conocimientos previos	“Se promueve la comprensión de que los conceptos estadísticos se construyen de forma progresiva en la escuela”	P1
Aprendizaje	“Se diferencia entre el pensamiento matemático del estadístico”	P1, P2, P3, P4

Fuente. Resultados de la investigación

No obstante, los Programas 1, 3 y 4 omiten indicaciones acerca de distintos indicadores: el Programa 1, no promueve una actitud de supervisión de los resultados en el proceso de resolución de problemas; el Programa 3, omite fomentar una actitud sanamente escéptica frente a información estadística en los medios; y el Programa 4, no aprecia la eficacia del ciclo de investigación empírica. Por tanto, cada caso establece diversos aspectos de mejora, que en síntesis nos permiten categorizar con un grado de idoneidad afectiva *alta* al Programa 2 y *media* a los Programas 1, 3 y 4.

La *Faceta Interaccional* agrupa un total de cinco indicadores acerca de las competencias comunicativas del futuro profesor con el formador y sus pares, sumado a su capacidad de trabajar autónomamente; además considera el uso de la evaluación formativa por parte del formador en su docencia. En este sentido, los resultados expuestos en la Tabla 8 ubican a los Programas 3 y 4 en la primera posición respecto al porcentaje de cumplimiento con un 80%, y al Programa 1 en la última con un solo 40% de indicadores satisfechos. Además, para contextualizar estos resultados, en la Tabla 10 se presentan algunos indicadores insatisfactorios con los que se identifican especificaciones de mejora en cada caso.

Al respecto, si bien a los Programas 3 y 4 les restó únicamente un indicador para alcanzar el porcentaje máximo, en ambos casos no se identifican las mismas debilidades. En el Programa 3, se exceptúan sugerencias para que el formador use medios de evaluación formativa apropiados a la disciplina (como proyectos estadísticos), y en el Programa 4, omiten indicaciones acerca de enfatizar en la comprensión conceptual sobre la aplicación de algoritmos al momento de evaluar formativamente a los futuros profesores, al igual que en el Programa 2. Por otro lado, en el Programa 1 además de excluir orientaciones sobre ambos aspectos descritos anteriormente, no incluyen referencias sobre la forma en que el formador debiese interactuar con sus estudiantes (futuros profesores), de manera que los aliente a esmerarse por mejorar continuamente su enseñanza (ver Tabla 10). Por tanto, clasificamos con un grado de idoneidad interaccional *media* a los Programas 1 y 2, y *alta* a los Programas 3 y 4.

Tabla 10

Algunos indicadores de idoneidad interaccional no satisfechos

Componente	Indicador	Insatisfactorios
Interacción formador – futuro profesor	“Se incluye que los formadores alienten a sus estudiantes a esforzarse por mejorar su enseñanza continuamente”	P1
Uso de la evaluación formativa	“Se promueve que la evaluación enfatice en la comprensión e interpretación conceptual por sobre la aplicación de fórmulas y algoritmos”	P1, P2, P4

Fuente. Resultados de la investigación

Una cuarta faceta de análisis es la *Mediacional*, que con solo dos indicadores resume la capacidad del formador para promover el uso de recursos materiales y tecnológicos en la práctica de la enseñanza y su análisis, según los tiempos asignados para ello. En este caso, como se expone en la Tabla 8, los Programas 2, 3 y 4 alcanzan el máximo porcentaje de cumplimiento posible, mientras que el Programa 1 obtiene solo un 50%. Por tanto, respecto a este último, se sugiere incorporar alguna indicación que promueva el uso de herramientas tecnológicas para ahondar en la enseñanza de la estadística y optimar el tiempo destinado a ella. De esta forma, catalogamos con un grado de idoneidad mediacional *alta* a los Programas 2, 3 y 4, y *media* para el Programa 1.

La siguiente faceta, se denomina *Ecológica* y a través de nueve indicadores abarca el conocimiento del formador respecto al perfil de egreso institucional de sus estudiantes, la posibilidad de innovar didácticamente en su docencia, la formación en valores y las conexiones interdisciplinarias. En este contexto, la Tabla 8 presenta los resultados de haber valorizado esta faceta en la muestra seleccionada, obteniendo que los Programas 2, 3 y 4 alcanzan el mayor porcentaje de cumplimiento con un 66.7%, y el Programa 1 el menor, con un 55.6%. Al respecto, en el desglose de estos resultados, se presentan en la Tabla 11 algunos indicadores insatisfactorios.

Destacamos dentro de las coincidencias que ninguno de los programas promueve una formación en valores como la responsabilidad y perseverancia, ni reconocen o establecen conexiones horizontales con el currículo de matemáticas y otras áreas afines, lo que establece dos puntos de mejora comunes entre ellos. A su vez, si bien los Programas 2, 3 y 4 obtienen un mismo porcentaje de cumplimiento, los indicadores insatisfactorios en cada caso no coinciden entre sí.

Tabla 11

Algunos indicadores de idoneidad ecológica no satisfechos

Componente	Indicador	Insatisfactorios
Adaptación curricular	“Se promueve la modelización de situaciones de la vida real”	P3
Adaptación socio-cultural	“Se promueve trabajar en formas propias de la disciplina para desenvolverse de manera efectiva y eficiente frente a las demandas profesionales que le impone la sociedad”	P1, P2, P4
Educación en valores	“Se potencia una sólida formación en valores como la responsabilidad, perseverancia y comportamiento ético”	P1, P2, P3, P4
Conexiones inter disciplinares	“Se promueve el reconocimiento de las conexiones horizontales con el currículo de matemáticas y otras áreas temáticas”	P1, P2, P3, P4

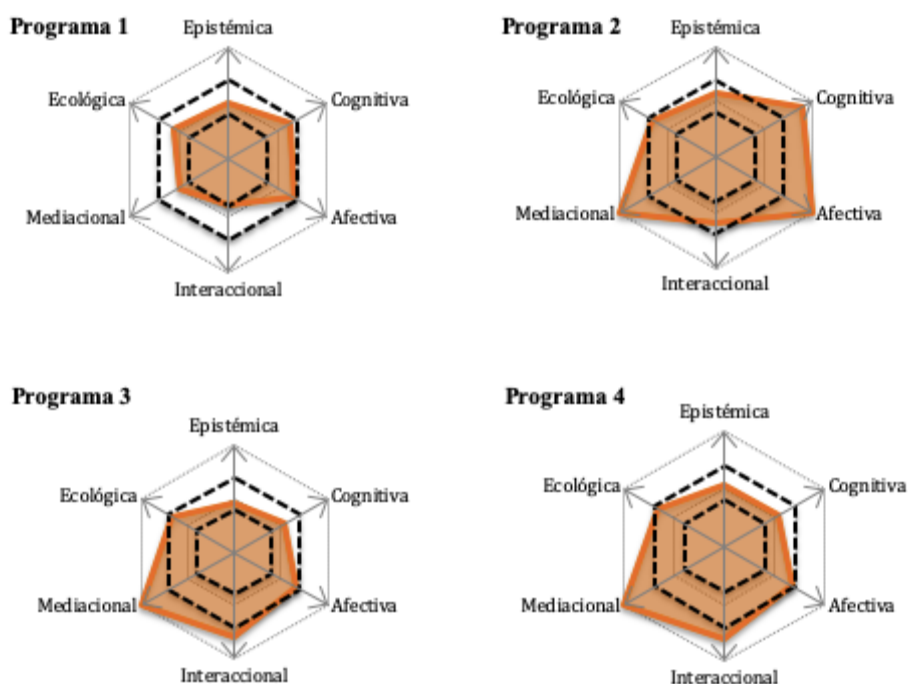
Fuente. Resultados de la investigación

En la componente sobre *adaptaciones al currículo*, los Programas 2 y 4 cumplen con los tres indicadores que la conforman, mientras que en el Programa 3 se omite promover la modelización de situaciones de la vida real; en la componente acerca de las *adaptaciones socio-culturales y profesionales*, el Programa 3 satisface el indicador que la compone, sin embargo, los Programas 2 y 4 excluyen el trabajo en formas propias de la disciplina, que permitan enfrentar las demandas profesionales que impone la sociedad. Por otro lado, el Programa 1 además de mostrarse insatisfactorio en los puntos mencionados anteriormente, omite el uso de software estadísticos para innovar didácticamente en la enseñanza de la disciplina, lo que suma otro aspecto a considerar en el futuro. De esta forma, asignamos un grado de idoneidad ecológica *media* a los cuatro programas analizados.

Finalmente, para sintetizar los resultados descritos anteriormente por dimensión, inspirados en el hexágono de la Figura 1, presentamos en la Figura 2 una colección de cuatro diagramas de radar (uno para cada programa analizado) que representan el porcentaje de indicadores satisfactorios en cada faceta de análisis. Además, con la intención de aportar en la correcta interpretación de la Figura 2, representamos con líneas punteadas negras los intervalos de clasificación de Rivas (2014), según un bajo, medio o alto grado de idoneidad alcanzada.

Figura 2

Diagramas de Radar sobre el grado de idoneidad alcanzado según programa



Fuente. Resultados de la investigación

Grado Idoneidad Didáctica global de los Procesos de Instrucción analizados. Por último, sin intención de generalizar los resultados obtenidos ya que el número de indicadores que conforma cada categoría o faceta de análisis es variable, pero valorando haber analizado un 40% de los programas de asignatura posibles, decidimos establecer una medida sobre el estado actual de la formación pretendida en didáctica de la estadística por las instituciones que participan de este estudio. Para esto, estimamos puntualmente la proporción de indicadores satisfechos en cada faceta de análisis promediando los porcentajes de los cuatro programas de estudio, obteniendo los resultados que se muestran en la Tabla 12.

En este caso, notamos que las facetas que han alcanzado un *alto* grado de idoneidad son las referidas a lo afectivo e instruccional (interaccional y mediacional), dejando en una condición de cumplimiento *medio* a las facetas epistémica, cognitiva y ecológica. Por tanto, con intención de contribuir en la mejora de esta situación, se sugiere prestar particular atención a promover el conocimiento especializado del contenido respecto a los seis contenidos didáctico-estadísticos agrupados dentro de la faceta epistémica, potenciar el cumplimiento efectivo de las expectativas de aprendizaje sobre didáctica de la estadística en la faceta cognitiva y promover la lectura y discusión de fuentes investigativas y el estudio de casos de buenas prácticas para mejorar en términos ecológicos. Por último, en la Figura 3 complementamos los resultados presentados en la Tabla 12 por medio de un Diagrama de radar, que representa simultáneamente los porcentajes de idoneidad alcanzados por cada Programa y el grado de idoneidad estimado a partir de ellos.

Tabla 12

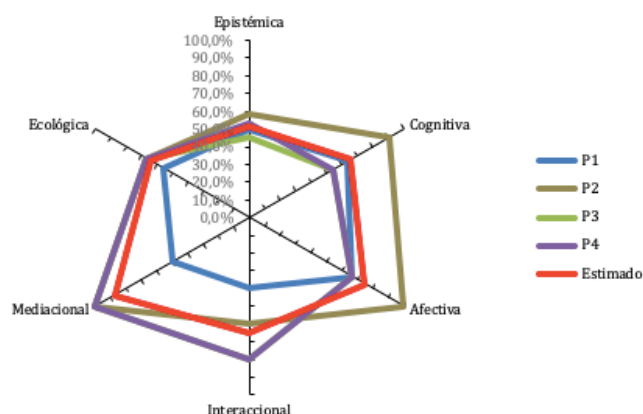
Grado de Idoneidad estimado según los programas analizados

Faceta	Proporción (%) estimada	Grado de Idoneidad
Epistémica	51.5	Media
Cognitiva	64.3	Media
Afectiva	70.3	Alta
Interaccional	71.0	Alta
Mediacional	91.8	Alta
Ecológica	60.3	Media

Fuente. Resultados de la investigación

Figura 3

Diagrama de Radar con el porcentaje alcanzado y estimado por los programas analizados



Fuente. Resultados de la investigación

Finalmente, a partir de la representación conjunta de los resultados presente en la Figura 3, podemos notar como el Programa 2 se distribuye mayoritariamente por el extremo exterior del gráfico (más cercano al 100%) salvo en la faceta interaccional, donde es superado por el Programa 4. De la misma forma, en términos simultáneos, podemos notar que el Programa 1 está en la situación opuesta al caso anterior, ya que sus resultados forman un hexágono que se distribuye principalmente por el extremo interior del gráfico (más cercano al 0%), exceptuando por pocos puntos porcentuales en las facetas epistémicas y cognitiva, donde obtiene un menor resultado el Programa 3.

Reflexiones finales

En este trabajo, afrontamos la problemática relativa a evaluar procesos formativos programados de profesores sobre didáctica de la estadística. Para ello, establecimos una medida con la cual conocer el grado de idoneidad didáctica parcial y global alcanzado por una colección de cuatro programas de formación en didáctica de la estadística chilenos. Además, reconociendo que el aporte esencial de la noción de idoneidad didáctica es identificar puntos de mejora en los programas analizados, complementamos las sugerencias realizadas puntualmente a cada programa con algunas indicaciones generales para incrementar el nivel de idoneidad estimado en las facetas menos satisfactorias.

Por otro lado, podemos notar que es la faceta epistémica en la que se satisface el menor número de indicadores por cada uno de los cuatro programas analizados y más aun, es en el contenido estadístico donde, a excepción del programa 2, se obtienen resultados más descendidos (ver Figura 2). Esta situación nos lleva a reflexionar que el enfoque fuerte a este tipo de contenido se encuentra en los programas de asignaturas sobre estadística y probabilidad,

por lo que una proyección interesante sería considerar un estudio paralelo de este contenido en dichos programas. No obstante, Rivas (2014) reporta los resultados de analizar la idoneidad de un programa sobre estadística para profesores de primaria chilenos y aunque es la faceta epistémica aquella con mejores resultados (11 de 24 indicadores satisfechos), estos siguen dándole una condición de *idoneidad media* al mencionado documento. Lo anterior resalta la necesidad de establecer un vínculo entre ambos aspectos de la formación del profesorado, lo que nos motiva a promover el estudio integrado de la estadística y su didáctica en estos profesionales, ya que el conocimiento del contenido sustenta las bases del conocimiento Didáctico-Matemático/Estadístico (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017), apoyando lo concluido por Godino et al. (2013) para el caso de la formación matemática.

Como mencionamos al comienzo, la formación de profesores ha sido un tópico de interés creciente en el campo de la didáctica de la estadística, reportando entre otras cosas que la tarea de dirigir procesos de enseñanza y aprendizaje escolar de la disciplina recae en manos de profesores de matemática, quienes se sienten incapaces de lograrlo con las herramientas adquiridas en su formación inicial. En Chile, esta situación no es diferente, ya que por un lado profesores en ejercicio han visto cómo con el paso de los años, el campo de acción de su labor profesional se ha actualizado (MINEDUC, 2009; 2012; 2015) más rápido de lo que su formación consideró y, por otro, los profesores en formación han experimentado ciertos cambios, pero cuyos resultados no se han valorizado o no han sido satisfactorios en esta realidad. Por ejemplo, el informe nacional del estudio internacional ([IEA TEDS-M], Avalos y Matus, 2010) y el informe de los Resultados Nacionales de la Evaluación Nacional Diagnóstica (END) de la Formación Inicial Docente 2017 (CPEIP, 2018). Por tanto, es fundamental reflexionar y proponer herramientas innovadoras que permitan evaluar la calidad o idoneidad de las acciones formativas actuales, de manera en que puedan detectarse puntos de mejora en ellas y así, en un futuro no muy lejano, alcanzar índices óptimos en este tópico de la formación.

De esta forma, cuestionar la calidad de los procesos de instrucción programados/implementados es una interrogante natural en este campo, por lo que reforzando lo propuesto por Godino et al. (2013) para el campo de la matemática en general, motivamos el estudio integrado de la estadística y su didáctica en la formación de profesores de matemática. Por tanto, sobre esta base, buscamos posicionar a la GVID-IDE como un instrumento que nos permita responder a la pregunta *¿Qué tan idóneos son actualmente los procesos de instrucción en didáctica de la estadística para futuros profesores de matemática?* y proponemos que no sea resuelta únicamente para la realidad chilena, sino que pueda extenderse a otras latitudes e imbricarse con sus exigencias locales, dejando abierta la

posibilidad de proyectar este instrumento como un insumo valioso tanto para formadores de profesores como para quienes tengan la responsabilidad de diseñar o evaluar planes formativos para futuros docentes en el campo de educación estadística.

Agradecimientos: Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación B-SEJ-063-UGR18, el Grupo de investigación PAIDI 622 (Junta de Andalucía, España) y la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) del gobierno de Chile a través de una beca de doctorado en el extranjero (Folio 72170025)

Referencias

- Avalos, B. y Matus, C. (2010). *La formación inicial docente en Chile desde una óptica internacional. Evidencia Nacional del Estudio Internacional IEA TEDS-M*. Santiago, Chile: Ministerio de Educación.
- Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H. y Sánchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability. ICME-13 Topical Surveys*. Cham, Switzerland: Spriger.
- Batanero, C., Burrill, G., y Reading, C. (2011). Overview: Challenges for Teaching Statistics in School Mathematics, and Preparing Mathematics Teachers. En. C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE Study*. London: Springer, 407-418.
- Ben-Zvi, D., Makar, K. y Garfield, J. (Eds.) (2018). *International Handbook of Research in Statistics Education*. Cham, Switzerland: Springer.
- Ben-Zvi, D. y Makar, K. (2016). International Perspectives on the Teaching and Learning of Statistics. En D. Ben-Zvi y K. Makar (Eds.), *The Teaching and Learning of Statistics*. Publishing Suiza: Springer Open, 1-19.
- Breda, A., Pino-Fan, L. y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for the Reflection and Assessment on Teaching Practice. *EURASIA Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 13(6), 1893-1918.
- Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (2018). Resultados Nacionales Evaluación Nacional Diagnóstica (END) de la Formación Inicial Docente 2017. CPEIP, Santiago: Chile. Recuperado de: <https://www.cpeip.cl/wp-content/uploads/2018/07/Informe-Nacional-END-2017.pdf>
- Eichler, A. y Zapata-Cardona, L. (2016). *Empirical Research in Statistics Education. ICME-13 Topical Surveys*. Cham, Switzerland: Spriger.
- Franklin, C., Bargagliotti, A., Case, C., Kader, G., Scheaffer, R. y Spangler, D. (2015). *Statistical Education of Teachers (SET)*. VA: American Statistical Association. Recuperado de <http://www.amstat.org/education/SET/SET.pdf>
- Gal, I. (2002). Adult's Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25.
- Godino, J.D. (2013). Indicadores de la Idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 111-132.
- Godino, J.D., Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de la matemática. *Revemat: revista electrónica de educação matemática*, 8(1), 46-74.
- Godino, J.D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.

- Godino, J.D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Boletim de educação matemática BOLEMA*, 31(57), 90-113.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la Investigación*, 6ta edición. México: McGraw Hill Education.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: Teoría y práctica*. Barcelona, España: Paidós.
- Ministerio de Educación de Chile (2009). *Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Enseñanza básica y media*. MINEDUC, Santiago: Chile.
- Ministerio de Educación de Chile (2012). *Bases Curriculares Primero a Sexto básico*. MINEDUC, Santiago: Chile.
- Ministerio de Educación de Chile (2015). *Bases Curriculares, 7° básico a 2° medio*. MINEDUC, Santiago: Chile.
- Ministerio de Educación de Chile y Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas (2012). *Estándares Orientadores para carreras de pedagogía en educación media*. MINEDUC y CPEIP, Santiago: Chile. Recuperado de <http://portales.mineduc.cl/usuarios/cpeip/File/librostandaresvale/libromediafinal.pdf>
- Organización de las Naciones Unidas (2015). *Transformar nuestro mundo: la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible*. Asamblea General: ONU.
- Rivas, H. (2014). *Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada: España.
- Ruz, F., Molina-Portillo, E. y Contreras, J.M. (2019). Guía de valoración de la idoneidad didáctica de procesos de instrucción en didáctica de la estadística. *Boletim de educação matemática BOLEMA*, 33(63), 135-154.

Anexo

Indicadores GVID-IDE y condición de satisfechos en los programas analizados

Faceta: Contenido. Indicador(es)	Satisfecho en			
	P1	P2	P3	P4
<u>Faceta Epistémica: Contenido Estadístico</u>				
Se incluyen problemas significativos del mundo real que puedan ser desarrollados por medio del proceso de resolución de problemas estadísticos (PPDAC), enfatizando en la omnipresente variabilidad.	X	X	X	
Se promueve el uso de problemas históricos que originaron el cálculo de probabilidades.	X			
Se incluyen distintas representaciones para explorar, resumir y describir patrones de variabilidad en datos univariados categóricos y cuantitativos (tablas, gráficos, resúmenes numéricos).		X		X
Se proponen diversas representaciones para describir patrones de asociación de dos variables, ya sean categóricas (tablas de doble entrada) o cuantitativas (gráfico de dispersión).		X		X
Se propone el uso de tablas de doble entrada, diagramas de árbol y otras representaciones para la enseñanza de las probabilidades.		X		
Se promueve el uso del lenguaje escrito u oral para comunicar resultados de forma clara y precisa con el lenguaje estadístico.	X	X	X	X
Se promueve el trabajo con modelos estadísticos que describan la variabilidad de los datos (datos = estructura + variabilidad).	X	X	X	
Se propone transformar las preguntas de investigación en preguntas estadísticas (que puedan ser resueltas por medio de datos en el ciclo PPDAC).		X		X
Se propone identificar y distinguir los distintos tipos de variables y datos al abordar una pregunta estadística.	X	X		
Se incluyen los conceptos, procedimientos y propiedades fundamentales de la estadística descriptiva.	X	X		X
Se incluyen los principales conceptos, procedimientos y propiedades de las probabilidades y las variables aleatorias.	X	X		X

Se promueven los conceptos y procedimientos primordiales para modelar la asociación entre variables por medio del análisis de regresión.		X		
Se promueven los principales conceptos, procedimientos, técnicas y propiedades de la inferencia estadística paramétrica.	X	X		X
Se incluye diferenciar situaciones donde sea necesario un estudio observacional o un estudio comparativo.				
Se promueve la construcción de argumentos viables, claros y precisos que comuniquen la utilidad y poder del pensamiento estadístico.	X	X	X	X
Se incluye evaluar y criticar la plausibilidad de conclusiones alternativas.		X		
Se promueve la distinción entre el razonamiento estadístico correcto del defectuoso.	X			
Se promueve establecer conexiones entre el diseño del estudio y la interpretación de resultados.	X	X	X	X
Se promueve interpretar los resultados de un estudio estadístico considerando aspectos como el sesgo y el alcance de inferencias.	X	X		
Se promueve relacionar la distribución de los datos y su variabilidad con modelos estadísticos sesgados y no sesgados.		X		
Se incluye conectar la simulación con procedimientos inferenciales.		X	X	X
Se promueve valorar el contexto y la variabilidad en todo el proceso de resolución de problemas estadístico.	X	X		X
Se promueve valorar el rol de los datos y la necesidad de producirlos considerando la variabilidad.	X	X		
<u>Faceta Epistémica: Contenido Cognitivo</u>		X	X	X
Se propone trabajar desde el razonamiento informal para introducir la comprensión de tópicos de mayor dificultad para los estudiantes				
Se promueve desarrollar no sólo el conocimiento del contenido disciplinar, sino que también su progresión y conexión entre los distintos niveles escolares.		X	X	
Se incluye identificar estilos de aprendizaje, necesidades educativas especiales y talentos específicos de los estudiantes.			X	X
Se promueve el uso pertinente de la evaluación diferenciada.				
Se promueve la inclusión de todos los estudiantes con sus respectivas diferencias sociales, sexuales, étnicas, de apariencia física y desarrollo académico.	X		X	
Se promueve estar familiarizados con las concepciones, dificultades y errores comunes de los estudiantes al aprender estadística, probabilidad e inferencia.	X	X	X	X
Se incentiva centrar el foco de atención en los estudiantes del sistema escolar, sus características y modos de aprendizaje.	X	X	X	X
Se promueve el uso de estrategias de enseñanza y evaluación para promover el aprendizaje.	X		X	X
<u>Faceta Epistémica: Contenido Afectivo</u>				
Se consideran los intereses y motivaciones de los estudiantes en la propuesta de problemas y tareas estadísticas	X	X	X	X
Se promueven tareas y actividades que reconozcan la importancia de la disciplina	X			X
Se analizan situaciones reales para identificar modos de pensar, sentir y actuar de los estudiantes			X	
Se promueve una actitud positiva hacia la resolución de problemas estadísticos	X	X		X
Se promueven actitudes como la perseverancia y crecimiento tanto intelectual como moral de los estudiantes				
Se promueve la seguridad física y afectiva de los estudiantes				
<u>Faceta Epistémica: Contenido Interaccional</u>				
Se promueven estrategias que valoren el proceso de investigación estadística	X	X	X	
Se promueve un estilo de instrucción interactivo, centrado en problemas reales	X	X	X	X
Se promueve el logro de objetivos por medio de tareas, recursos y evaluaciones efectivas y coherentes	X	X	X	X
Se incluye incentivar, acoger y potenciar la participación de los estudiantes				X
Se promueven instancias para compartir y comunicar razonamientos				
Se promueve el trabajo autónomo de los estudiantes en la resolución de problemas				
La evaluación enfatiza en la comprensión e interpretación conceptual por sobre lo procedimental y algorítmico	X		X	X
Se incluyen diversos métodos de evaluación como preguntas de respuesta abierta y proyectos de investigación				
Se integra la evaluación como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje	X			X
Se promueve el uso sistémico y efectivo de la evaluación formativa		X	X	
<u>Faceta Epistémica: Contenido Mediacional</u>				

Se promueve el uso de recursos y TICs que potencien el desarrollo de la enseñanza de la estadística		X	X	
Se promueve el uso de simulaciones computacionales y con material concreto para la enseñanza y aprendizaje de las probabilidades e inferencia estadística		X	X	X
Se promueve el uso adecuado del espacio, equipamiento y recursos del aula				X
Se promueve generar en aula un espacio acogedor y estimulante para estudiantes	X			
Se gestiona eficazmente el tiempo de la clase a favor del logro de los objetivos			X	X
<u>Faceta Epistémica: Contenido Ecológico</u>				
Se promueve conocer los enfoques pedagógicos y disciplinares del currículo y sus instrumentos para organizar la enseñanza		X	X	X
Se considera la normativa de integración de la discapacidad en el sistema escolar				
Se promueve el uso de herramientas tecnológicas	X	X	X	X
Se promueve la generación de una cultura de respeto, seguridad y confianza en la escuela				
Se promueve la formación ciudadana de los estudiantes		X		X
Se incluye el desarrollo de valores, actitud crítica e inclusión de los estudiantes			X	
Se promueve el trabajo colegiado entre diversos docentes o especialistas	X	X		X
Se promueven oportunidades para integrar y potenciar los aprendizajes de las distintas áreas curriculares y sus interdependencias			X	
<u>Faceta Cognitiva</u>				
Se promueve la comprensión de que los conceptos estadísticos que construyen de forma progresiva en la escuela		X	X	X
Se promueve experimentar el aprendizaje conceptual de las estadísticas a enseñar de forma similar a sus estudiantes	X	X		
Se promueve el compromiso de los profesores en la resolución de problemas estadísticos	X	X	X	X
Se diferencia entre el pensamiento matemático del estadístico				
Se promueve el correcto entendimiento de los modelos estadísticos, que se juzgan según su utilidad y descripción de los datos	X	X	X	X
Se promueve la comprensión del razonamiento estadístico desde la perspectiva de los datos y/o la simulación, destacando la variación presente y el contexto	X	X	X	X
Se promueve el aprendizaje de la probabilidad, las variables aleatorias y sus componentes como base para identificar patrones de variabilidad	X	X	X	X
Se promueve el aprendizaje de la inferencia estadística, su finalidad, componentes y principales procedimientos de estimación	X	X		
Se promueve la comprensión del razonamiento inferencial a través de la aleatorización y simulación		X		
Se considera el aprendizaje del análisis de regresión lineal		X		
Se incluye la preparación para conducir el aprendizaje de los tópicos de análisis de datos, probabilidades e inferencia estadística presentes en el currículo escolar.	X		X	X
<u>Faceta Afectiva</u>				
Se fomenta una actitud sanamente escéptica frente a la información estadística presente en los medios	X	X		X
Se promueve una actitud de supervisión durante el proceso de resolución de problemas, evaluando continuamente la razonabilidad de los resultados parciales		X	X	X
Se aprecia la eficacia del ciclo de investigación en la resolución de problemas	X	X	X	
<u>Faceta Interaccional</u>				
Se incluye que los formadores alienten a sus estudiantes a esforzarse por mejorar su enseñanza continuamente		X	X	X
Se promueve la autonomía y perseverancia en la resolución de problemas	X	X	X	X
Se potencia y valoriza la evaluación formativa	X	X	X	X
Se promueve que la evaluación enfatice en la comprensión e interpretación conceptual por sobre la aplicación de fórmulas y algoritmos			X	
Se fomenta que los formadores utilicen medios de evaluación apropiados a la disciplina, que sean un ejemplo para sus prácticas futuras				X
<u>Faceta Mediacional</u>				
Se promueve el uso de herramientas tecnológicas para profundizar en la enseñanza de la disciplina y optimizar el tiempo destinado a ella		X	X	X
Se consideran al menos dos cursos destinados al estudio de la estadística y uno a su enseñanza	X	X	X	X
<u>Faceta Ecológica</u>				
Se promueve la modelización de situaciones de la vida real	X	X		X
El currículo para futuros profesores incorpora aspectos del contenido estadístico y del conocimiento especializado para la enseñanza	X	X	X	X

Los cursos de profesores se alinean con los principales hallazgos de investigación y dan oportunidades idóneas de enseñanza	X	X	X	X
Se incluye el uso de software estadísticos que promuevan múltiples experiencias para analizar situaciones reales		X	X	X
Se promueve trabajar en formas propias de la estadística			X	
Se potencia una sólida formación en valores como perseverancia y responsabilidad				
Se fomenta la aplicación de las matemáticas para responder preguntas estadísticas	X	X	X	X
Se promueve el reconocimiento de las conexiones verticales de los temas estadísticos entre los distintos niveles educativos	X	X	X	X
Se promueve el reconocimiento de las conexiones horizontales con el currículo de matemática y otras áreas temáticas				

Fuente. Indicadores obtenidos de Ruz et al. (2019).

Introducción

Durante los últimos 30 años, el rol de la estocástica ha sido crecientemente valorado como un conocimiento necesario para que todo ciudadano educado pueda desenvolverse eficazmente en la sociedad de la información (Batanero y Borovcnik, 2016; Ben-Zvi y Makar, 2016). En consecuencia, muchos países como España, Estados Unidos y Chile, se han unido al movimiento reformista en torno a la enseñanza de la estocástica en la escuela, promoviendo su aprendizaje dentro del currículo de matemáticas durante toda la trayectoria escolar. De esta forma, se han establecido nuevas exigencias y desafíos para el profesorado responsable de esta tarea. Sin embargo, algunas investigaciones han reportado que los profesores no son lo suficientemente competentes, ni se sienten bien preparados para abordar esta temática en el aula de clase, lo que plantea una problemática vigente con la formación estocástica de estos profesionales (Batanero, Burrill y Reading, 2011; Groth y Meletiou-Mavrotheris, 2018).

El profesor de matemáticas tiene que conocer las estocásticas escolares del nivel educativo donde imparte docencia, pero también debe poder articular esos conocimientos con los correspondientes a algunos niveles posteriores, es decir, manejar el conocimiento del contenido *per se* (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017). En este sentido, si bien los resultados de la investigación han demostrado que los conocimientos puramente matemáticos/estocásticos no son suficientes para que el profesor organice, implemente y evalúe los procesos de enseñanza y aprendizaje, su formación debe tener en cuenta el conocimiento estocástico *per se*, ya que los conocimientos didácticos involucran al contenido disciplinar. Por tanto, nos interesamos en abordar el problema de evaluar el conocimiento sobre aspectos relevantes del contenido de estocástica en futuros profesores de matemáticas. Sin embargo, dada la extensión máxima permitida y las distintas etapas desarrolladas, en este trabajo profundizamos en lo referido a la estadística descriptiva.

Si bien la denominación “estadística descriptiva” se utiliza principalmente para organizar la difusión de los resultados de esta investigación, es también usada con frecuencia para diferenciar la etapa de exploración de los datos de aquella con fines inferenciales. En nuestro caso, al referirnos al *Contenido de Estadística Descriptiva* consideramos aquellos conceptos que emergen del proceso de análisis de datos donde se busca describir, organizar, representar y razonar sobre el centro, la dispersión y la distribución de los datos (Chan, Ismail

⁴Ruz, F, Molina-Portillo, E. y Contreras, J.M. (2020). Evaluación de conocimientos sobre el contenido de estadística descriptiva en futuros profesores de matemáticas. *Avances de Investigación en Educación matemática*, 18, 55-71.

y Sumintono, 2015) sin interés de generalizar o estimar alguna característica a un conjunto más grande o población.

De acuerdo con las consideraciones anteriores, en este artículo, nos proponemos el objetivo de describir el proceso de construcción y validación de un instrumento que evalúe el conocimiento del contenido de estadística descriptiva de futuros profesores de matemática. Con ello, buscamos describir el conocimiento declarado por una muestra piloto de 126 futuros docentes españoles y chilenos, destacando las principales diferencias obtenidas entre ellos.

Marco Teórico

Para evaluar el conocimiento de futuros profesores de matemáticas, es necesario establecer las bases teóricas que respaldan la perspectiva adoptada en la investigación. Tomamos un sistema teórico denominado Enfoque Onto-Semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), cuyo eje central es la modelización del conocimiento matemático/estocástico en su doble faceta epistémica (institucional) y cognitiva (personal), basada en una aproximación antropológica/pragmatista y ontosemiótica. En lo que sigue detallamos herramientas de interés para este estudio, entre ellas la noción de Configuración Ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos matemáticos y el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor (CCDM).

Sistema de prácticas y configuración de objetos y procesos matemáticos/estocásticos. Para el EOS, la actividad matemática es entendida como un sistema de prácticas (acciones de las personas ante cierto tipo de tareas o situaciones problemáticas) donde emergen e intervienen entidades u objetos matemático/estocásticos (Godino y Batanero, 1994). Además, dichas prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona y nos referiremos a su significado personal; o compartidas en el seno de una institución, cuando hablaremos del significado institucional.

La distinción entre significado personal e institucional permite describir las diferencias que se podrían identificar entre el significado asignado por un estudiante a los objetos estocásticos y el acordado en la institución. Una institución (educativa o no) dirá que un sujeto entiende el significado de un objeto o que ha comprendido el significado de un concepto, si es capaz de llevar a cabo las diferentes prácticas que conforman el significado institucional del objeto. Así, el entendimiento personal de un objeto estocástico es deducido del análisis de las prácticas realizadas por la persona en la resolución de tareas problemáticas que son

características de ese objeto, por lo que la selección de los ítems para diseñar un instrumento de evaluación es primordial.

Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) del profesor de matemáticas. Con herramientas del EOS, se establece un modelo para la formación de profesores de matemáticas, denominado Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) (Godino, 2009; Godino et al., 2017), sobre la base de modelos clásicos para la formación del profesorado, como el Modelo de Conocimiento del Contenido Pedagógico (PCK) de Shulman, el Modelo de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT) de Ball y colaboradores, y la Teoría de competencia en la enseñanza de la matemática de Schoenfeld y Kilpatrick.

En el modelo CCDM, el conocimiento didáctico-matemático/estocástico del profesor se cimienta sobre el conocimiento del contenido *per se*, constituido por el conocimiento común (compartido con los estudiantes del nivel educativo donde el profesor enseña) y ampliado (compartido con los estudiantes de etapas educativas posteriores). Y este conocimiento Didáctico-Matemático se articula y relaciona en torno a seis facetas: (1) Epistémica que abarca los conocimientos didáctico-matemáticos sobre el propio contenido; (2) Cognitiva que considera el conocimiento de cómo los estudiantes aprenden y entienden las matemáticas; (3) Afectiva referida al conocimiento sobre las emociones, actitudes y creencias de los estudiantes sobre las matemáticas y los procesos de enseñanza; (4) Interaccional donde se incluye el conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, organización de tareas e interacciones del aula; (5) Mediacional que abarca el conocimiento sobre los recursos y tiempos apropiados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes; y (6) Ecológica referida al conocimiento sobre las relaciones de las matemáticas con otras disciplinas y los factores socio-profesionales, políticos y económicos que condicionan los procesos de instrucción.

Metodología

Para evaluar la comprensión sobre los contenidos de estadística descriptiva en una muestra de futuros profesores de matemática, usamos herramientas y fundamentos del EOS, como el sistema de prácticas y la configuración de objetos y procesos, para describirlo semánticamente en términos de comportamientos observables o especificaciones entre él y la conducta (Batanero y Díaz, 2005). Estas especificaciones podrán describirse como Campos de Problemas representativos de las exigencias institucionales que caracterizan la comprensión sobre los contenidos de estocástica.

Instrumento. Con la finalidad de determinar una definición semántica del constructo de interés, comenzamos revisando las principales investigaciones relacionadas con la comprensión de los conceptos de estadística descriptiva en el nivel universitario, con mayor interés en aquellos centrados en la formación de profesores. Además, recopilamos los ítems usados en las mismas para la conformación de un banco de preguntas que sirvió de base para la construcción del instrumento en cuestión. En este sentido, en Ruz, Díaz-Levicoy, Molina-Portillo y Ruiz-Reyes (2018) realizamos una revisión sobre aquellos aspectos a considerar para desarrollar la alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico en estos profesionales, donde identificamos que en términos del conocimiento del contenido se debe desarrollar la comprensión de conceptos estocásticos clave como variabilidad, distribución, representación y asociación, que tienen una estrecha relación con la estadística descriptiva. Sobre dichas nociones, destacamos los trabajos de Batanero et al. (2011), Ben-Zvi y Makar (2016) y Ben-Zvi, Makar y Garfield (2018) por organizar en algunos de sus capítulos los principales resultados de la investigación sobre el conocimiento de estos temas en futuros profesores. En consecuencia, podemos notar que la investigación se ha centrado en la comprensión de objetos específicos de la estadística descriptiva (promedio, gráficos, desviación estándar, etc.), como se refleja también en la revisión de Chan et al. (2015), lo que motivó a diseñar un instrumento que considerara varios tópicos de la estocástica y sus posibles interacciones, al estilo de los instrumentos Statistical Reasoning Assessment (SRA) (Garfield, 2003), Comprehensive of Assessment of Outcomes in a First Statistical Course (CAOS4) (DelMas, Garfield, Ooms y Chance, 2007) y Levels of Conceptual Understanding in Statistics (LOCUS)(Jacobbe, Case, Whitaker y Foti, 2014), pero dirigido específicamente a futuros profesores de matemáticas.

Dado que el foco de atención en que se enmarca este estudio se particulariza en la realidad chilena, hemos realizado un análisis de contenido (Krippendorff, 1990) de las bases curriculares que orientan la formación matemática de estudiantes chilenos de los niveles 7 al 12 (entre 12 y 18 años), donde se incluyen aspectos de estocástica en el eje “Probabilidad y Estadística” (Ministerio de Educación Chile, 2009, 2015) que determinan el conocimiento común del futuro profesor con respecto a este contenido en la escuela. Además, por medio de la misma técnica se han analizado los principales documentos que orientan la formación estadística de profesores, determinando por medio de una colección de indicadores la Guía de Valorización de la Idoneidad Didáctica de procesos de Instrucción en Didáctica de la Estadística (GVID-IDE) (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2019). Dicha guía, en su dimensión Epistémica incluye la faceta Contenido Estadístico, donde se detallan aspectos sobre el conocimiento de estocástica que la comunidad de educadores estadísticos y el Ministerio de

Educación chileno considera pertinentes para que el futuro profesor comprenda la disciplina (Ruz, Contreras, Molina-Portillo y Godino, 2018).

De esta forma, aunque limitadamente, nos acercamos al significado institucional de referencia sobre lo que un futuro profesor de matemática debiese dominar tras culminar su proceso formativo en esta materia, es decir, luego de haber superado su etapa escolar y aquellas asignaturas disciplinares que fueron parte de su plan de estudio. La Tabla 1 presenta especificaciones referidas a la comprensión del contenido de estadística descriptiva, donde diferenciamos si cada componente puede ser resuelto por medio de conocimiento común o ampliado del contenido, según el modelo CCDM.

Tras la planificación del contenido del instrumento, se retomó la revisión de la literatura para robustecer el banco de ítems y así abarcar aquellas especificaciones que no hubiesen sido cubiertas. Recopilamos preguntas de respuesta abierta y cerrada, sin embargo, según lo mencionado por Davies y Marriott (2010) dadas las restricciones del tiempo para responder, la longitud total del cuestionario y la amplia gama de ideas a evaluar, la mejor opción es utilizar preguntas cerradas. Así, para las preguntas abiertas se establecieron opciones de respuesta a partir de los resultados obtenidos en la investigación donde fueron utilizadas previamente y para las de respuesta cerrada se ajustó el número de opciones a cuatro. Por tanto, respecto a las especificaciones referidas a la comprensión de la estadística descriptiva (Tabla 1) comenzamos con un conjunto inicial de tres ítems por contenido, es decir, 18 en total.

Tabla 1

Especificaciones sobre el contenido de estadística descriptiva del cuestionario

Contenido (C)	Conocimiento*
C1. Relación entre distintas representaciones para explorar, resumir y describir patrones en datos unidimensionales.	Común
C2. Relación entre distintas representaciones para describir patrones de asociación entre dos variables.	Ampliado
C3. Comparación de la variabilidad existente entre grupos mediante el análisis exploratorio de datos.	Común
C4. Cuantificación de la dispersión de los datos por medio de indicadores estadísticos.	Ampliado
C5. Deducción del comportamiento de una distribución de datos a partir de indicadores estadísticos.	Común
C6. Interpretación de los coeficientes de asociación y de regresión lineal.	Ampliado

Nota. *Categoría de conocimiento del contenido *per se* del modelo CCDM. *Fuente.* Elaboración propia

Posteriormente, Osterlind (1998) recomienda analizar el grado en que la medición efectivamente represente la variable que se pretende medir (validez de contenido). Para ello, convocamos un panel de expertos con la intención de establecer un consenso acerca de la congruencia entre un ítem con el dominio de contenido que se pretende evaluar con él y además

conocer cuál entre los ítems propuestos escogería cada uno para evaluar el contenido consultado. Seleccionamos un total de 10 investigadores iberoamericanos (incluidos España y Portugal) en educación estadística, todos doctores y cada uno con más de siete años de experiencia en investigación sobre los temas de estocástica y su enseñanza. Como resultado de este proceso, se estableció una primera versión del cuestionario con aquellos ítems con mayor puntuación media y menor dispersión entre las respuestas de los expertos. En este sentido, para cuantificar el grado de concordancia entre las puntuaciones otorgadas por los evaluadores, calculamos el índice Kappa de Fleiss que resultó de 0.6049, pudiendo concluir que la fuerza de acuerdo de esta evaluación es *considerable* (Landis y Koch, 1977, p. 165).

En la Tabla 2 se caracterizan los seis ítems, incluidos en el Anexo, seleccionados para evaluar el conocimiento sobre estadística descriptiva, detallando el contenido que evalúa cada uno según la Tabla 1, la referencia del ítem original, los conceptos estadísticos que emergen en su resolución, el lenguaje en que se presentan los datos (tabular, gráfico o natural) y la categoría de conocimiento del contenido necesario para resolverlo según el modelo CCDM.

Tabla 2

Características de los ítems sobre la comprensión de la estadística descriptiva

Ítem-Contenido	Referencia	Conceptos	Lenguaje	Conocimiento
Ítem 1-C1	DelMas et al. (2007)	Medidas de centro Asimetría y sesgo Distribución y simetría	Natural- gráfico	Común
Ítem 2-C2	Allen (2006)	Correlación	Gráfico	Ampliado
Ítem 3-C3	DelMas et al. (2007)	Promedio Distribución y simetría	Gráfico	Común
Ítem 4-C4	DelMas et al. (2007)	Medidas de dispersión (desviación estándar) Histogramas	Gráfico	Ampliado
Ítem 5-C5	Elaboración propia	Medidas de posición (percentiles)	Natural	Común
Ítem 6-C6	Garfield (2003)	Correlación Causalidad	Natural	Ampliado

Fuente. Elaboración propia

Muestra. Una vez finalizada esta versión del cuestionario, estuvimos en condiciones de realizar una aplicación piloto con el interés de comprobar empíricamente su utilidad para satisfacer los objetivos pretendidos y así identificar aspectos que puedan ser mejorados. Estas pruebas se llevaron a cabo en una muestra no probabilística o intencional, de 126 futuros profesores de matemática, organizados en dos grupos según el país de residencia de los participantes, entre españoles y chilenos. Con ello, nos interesamos en seleccionar dos realidades con modelos de formación diferentes, el consecutivo como en el caso de España y el concurrente en el de Chile (Muñiz-Rodríguez, Alonso, Rodríguez-Muñiz y Valcke, 2016).

La principal diferencia entre ellos es que en el primero a la formación disciplinar le sucede en el tiempo la didáctica y pedagógica, y en el segundo estas convergen de manera simultánea en un mismo proceso. De esta forma, nos preguntamos si existen disparidades entre ambas aproximaciones respecto al conocimiento del contenido, aun cuando en la literatura se ha reportado que no existen diferencias significativas en la aplicación de ambos modelos de formación (Valle, Jesús y Ayuso, 2011).

El primer grupo (G1) estuvo conformado por 84 estudiantes (35 mujeres y 49 hombres, con edades entre 21 y 50 años) del máster universitario de enseñanza secundaria obligatoria y bachillerato de una universidad española, pertenecientes a la especialidad de matemáticas o alguna doble titulación que considerase también matemáticas, a comienzos del curso académico 2018-2019. En cuanto a la formación estocástica previa de estos participantes, Muñiz-Rodríguez et al. (2016) destacan que en España esta es notablemente distinta según la universidad donde se haya estudiado, por lo que decidimos sintetizarla según el número de asignaturas cursadas y aprobadas durante el grado de ingreso al máster, como se muestra en la Tabla 3. El segundo grupo (G2) estuvo compuesto por 42 estudiantes (21 mujeres y 21 hombres, de entre 19 y 38 años) de pedagogía en matemática de una universidad chilena, que durante el segundo semestre de 2019 cursaban el cuarto de nueve semestres que considera su plan de estudios. Al tratarse de un programa concurrente, la formación disciplinar de estos participantes corresponde a dos asignaturas, una sobre probabilidad (Estadística 1) y otra sobre inferencia estadística (Estadística 2), cuyas tasas de aprobación se detallan en Tabla 4.

Tabla 3

Número (%) de asignaturas aprobadas en la formación inicial por el Grupo 1

Nº asignaturas aprobadas	Nº (%) de participantes
1	31 (37.0)
2	8 (9.5)
3	9 (10.7)
4	10 (11.9)
5	6 (7.1)
No responde	20 (23.8)

Fuente. Elaboración propia

Tabla 4

Número (%) de asignaturas aprobadas en la formación inicial por el Grupo 2

Asignatura	Nº (%) participantes
Estadística 1	6 (14.3)
Estadística 2	36 (85.7)

Fuente. Elaboración propia

Así aseguramos que los participantes de esta etapa de la investigación hayan cursado todas las asignaturas sobre el contenido de estocástica consideradas en su formación inicial. Además, acerca de la aplicación, todos los participantes recibieron y completaron el cuestionario voluntaria e individualmente, dentro de una sesión planificada exclusivamente para este fin a mediados del segundo semestre de 2018.

Resultados y Discusión

Comenzamos analizando algunas características psicométricas de los reactivos presentados, como el grado de dificultad y discriminación, para luego referirnos a la consistencia interna del cuestionario completo. Posteriormente, agrupamos los ítems según la categoría del conocimiento del contenido que evalúan, entre común o ampliado, donde exponemos las frecuencias obtenidas para cada opción de respuesta y evaluamos si existen diferencias entre los grupos que conforman la muestra. Además, analizamos conjuntamente los ítems que conforman cada categoría para comprobar si existen diferencias entre las puntuaciones obtenidas en cada caso.

Algunas Características Psicométricas. Presentamos algunos indicadores sobre las propiedades psicométricas de los ítems analizados en este artículo y de los resultados globales del cuestionario. Calculamos el *índice de dificultad* de cada ítem, definido como la proporción de participantes que responde correctamente a un ítem particular (mientras menor, más difícil) y también su *índice de discriminación*, que describe la relación entre la dificultad de un ítem y las habilidades cognitivas de los participantes (Osterlind, 1998). Asignamos el valor 1 a aquellos ítems bien contestados y 0 a los equivocados, para así determinar el coeficiente de correlación biserial puntual entre la puntuación total del cuestionario y la obtenida en cada ítem. Escogimos este coeficiente por las condiciones del instrumento de evaluación, ya que cuando el ítem es inherentemente dicotómico y la puntuación total del cuestionario es una variable continua, el coeficiente de correlación del punto biserial es la estadística más útil para analizar el rendimiento relativo de un elemento entre dos grupos, los de alto y bajo rendimiento (Osterlind, 1998). Los resultados se recogen en la Tabla 5, acompañados del p-valor de haber contrastado la hipótesis nula de que las correlaciones obtenidas son iguales a 0.

En cuanto al índice de dificultad, podemos apreciar que su valor oscila entre 0.25 (ítem 6) y 0.68 (ítems 3 y 5), lo que nos permite concluir que los ítems cuentan con un grado de dificultad moderada, es decir, ningún ítem es demasiado difícil (índice menor a 0.25), ni tampoco muy fácil (índice mayor a 0.75). Por otro lado, sobre los resultados de la capacidad

de discriminación de los ítems, podemos notar que en los seis casos el p-valor es menor a 0.05, por lo que podemos rechazar la hipótesis nula y concluir que la correlación entre la puntuación total y la de cada ítem es significativa, es decir, distinta de cero.

Además, según la clasificación propuesta por (Ebel y Frisbie, 1991, p. 232), los ítems 2, 3, 4 y 5 tienen una fuerza de discriminación *excelente*, por tener un índice mayor a 0.40, mientras que el ítem 1 es *adecuado* por estar entre 0.30-0.39 y el ítem 6 es *regular* por pertenecer al rango 0.20-0.29, sugiriendo una revisión del contenido de este último.

Tabla 5

Índices de dificultad y discriminación de los ítems analizados

Ítem	Índice de Dificultad	Índice de Discriminación	p-valor
1	0.41	0.374	0.000*
2	0.39	0.410	0.000*
3	0.68	0.596	0.000*
4	0.37	0.483	0.000*
5	0.68	0.437	0.000*
6	0.25	0.202	0.001*

Nota. *Resultados estadísticamente significativos a un nivel de 0.05

Ahora bien, dado que la fuerza de discriminación de un ítem se relaciona con su grado de dificultad en función del conocimiento sobre el contenido evaluado que es declarado por los examinados, es interesante analizar estos índices en conjunto, al menos para los casos conflictivos como el ítem 6. Este reactivo es aquel que cuenta con el menor índice de dificultad y discriminación de la Tabla 3, es decir, la mayoría de los participantes responden incorrectamente y quienes lo hacen bien, no se corresponden con aquellos con mejor rendimiento en el cuestionario completo. Sin embargo, al observar el contenido que se busca evaluar, notamos que corresponde al sesgo de confundir una alta correlación entre dos variables con una relación de causalidad, aspecto que ha sido reportado en la literatura (Estepa y Gea, 2011) lo que explica este comportamiento. Entonces lo consideramos un ítem valioso para identificar la presencia de este sesgo en futuros profesores, por lo que decidimos mantenerlo en su estado actual.

Por otro lado, con el interés de dar información sobre la fiabilidad o consistencia interna del cuestionario, calculamos el alfa de Cronbach, que representa el grado en que covarían las puntuaciones de cada ítem particular con el resto de los ítems que componen el cuestionario. Obtuvimos un alfa de 0.564, que, si bien no alcanza niveles ideales, Santiesteban (2009) reconoce como suficientes valores de alfa superiores a 0.5 en cuestionarios de conocimiento

específico como en este caso. Además, Pedhazur y Pedhazur (1991) analizan el comportamiento del alfa de Cronbach para distintos tipos de cuestionarios, concluyendo que en aquellos casos donde la puntuación de los ítems es dicotómica, este valor se reduce considerablemente, estableciendo como aceptables valores entre 0.5 y 0.7, respaldando lo propuesto por Nunnally (1967). Por tanto, podemos afirmar que el instrumento cuenta con una consistencia interna adecuada para ser utilizado en futuros profesores de matemática, dado que la estimación de alfa obtenida con nuestros resultados pertenece a ese rango de valores.

Evaluación del conocimiento común del contenido de estadística descriptiva. En esta sección, presentamos los resultados para los tres ítems que buscan evaluar el conocimiento sobre la estadística descriptiva escolar (significado institucional) que debería ser compartido entre el profesor de matemáticas y sus estudiantes (del nivel educativo donde se enseñe). Estos ítems evalúan los contenidos C1, C3 y C5 de la Tabla 1 respectivamente, de los que en la Tabla 6 mostramos las frecuencias (y porcentajes) de respuestas para cada alternativa, diferenciando entre los grupos que conforman la muestra y destacando con negrita la opción correcta en cada caso.

Tabla 6

Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítems sobre el Conocimiento Común

Opción	Ítem 1 (C1)		Ítem 3 (C3)		Ítem 5 (C5)	
	G1	G2	G1	G2	G1	G2
A	18 (21.4)	7 (16.7)	2 (2.4)	1 (2.4)	3 (3.6)	1 (2.4)
B	35 (41.7)	17 (40.5)	57 (67.9)	28 (66.7)	3 (3.6)	3 (7.1)
C	9 (10.7)	1 (2.4)	4 (4.8)	1 (2.4)	4 (4.8)	7 (16.7)
D	11 (13.1)	8 (19.0)	10 (11.9)	7 (16.6)	64 (76.2)	21 (50.0)
No responde	11 (13.1)	9 (21.4)	11 (13.1)	5 (11.9)	10 (11.9)	10 (23.8)
Total	84	42	84	42	84	42

Fuente. Resultados de la investigación

En general, podemos notar que en los tres ítems que conforman esta categoría las mayores frecuencias se obtienen en las opciones correctas, las que son bastante cercanas en términos relativos salvo en el ítem 6, donde un 76.2% de participantes del G1 responde bien, mientras que solo un 50% lo hace de la misma forma en el G2.

El *ítem 1* fue construido por DelMas et al. (2007) para evaluar la capacidad de relacionar las medidas de tendencia central con la representación gráfica de un conjunto de datos en estudiantes universitarios estadounidenses. La versión original de este ítem consideraba solo tres opciones de respuesta (por lo que fue adaptado levemente para ajustarle

una cuarta alternativa, opción D) y en sus resultados, de un total de 730 respuestas obtenidas, un 41.5% de ellas es correcta. En consecuencia, podemos notar que nuestros resultados coinciden con los reportados, ya que un 41% de nuestra muestra es capaz de relacionar distintas representaciones para identificar patrones en los datos (C1).

El ítem 3 corresponde a la fusión de las preguntas 11, 12 y 13 del test CAOS 4 (DelMas et al., 2007), que comparten un enunciado común y proponen distintas afirmaciones que deben ser catalogadas como válidas o no, para evaluar la capacidad de (1) comparar dos grupos considerando donde está la mayoría de los datos y centrándose en la distribución como entidades individuales; (2) comparar grupos mediante la comparación de las diferencias en promedio y (3) entender que para comparar dos grupos no es necesario que los tamaños muestrales sean iguales, respectivamente. En este caso, tomamos la situación propuesta y adaptamos que cada una de las opciones de respuesta evalúe alguno de los aspectos considerados inicialmente. En cuanto a nuestros resultados, estos son más bajos, ya que entre un 66.7% (G2) y un 67.9% (G1) responde correctamente, es decir son capaces de comparar la variabilidad existente entre grupos mediante un análisis exploratorio de datos (C3), mientras que en DelMas et al. (2007) de 753 respuestas válidas un 85.3% de ellas es correcta.

Finalmente, el ítem 5 fue propuesto por los autores para evaluar la capacidad de deducir el comportamiento de una distribución de datos a partir de indicadores estadísticos (C5). En este caso, si bien la mayoría de los participantes se inclinan por la alternativa correcta (opción D), un 76.2% de los estudiantes del G1 y un 50.0% del G2 responden bien, lo que al menos en términos relativos, presume posibles diferencias entre ambos, situación que pasaremos a estudiar a continuación.

Con el interés de analizar conjuntamente los ítems que conforman esta categoría, asignamos 1 punto a aquellas respuestas correctas y 0 puntos a las incorrectas, y definimos la variable *Conocimiento Común sobre Estadística Descriptiva* (CCED) como la suma de las puntuaciones obtenidas en los ítems anteriores. De esta forma, dicha variable tomará el valor 0 cuando un estudiante responda incorrectamente los tres ítems o 3 cuando lo haga correctamente en los tres casos. En la Tabla 7 presentamos algunos estadísticos de resumen y contrastamos si la distribución de la variable CCED es la misma en ambos grupos, que, dados sus tamaños muestrales, se realiza por medio de la Prueba no paramétrica U de Mann-Whitney (M-W) para muestras independientes.

Tabla 7*Estadísticos de resumen de la variable CCED*

Variable	Cuartil 1		Cuartil 2		Cuartil 3		Prueba U M-W	
	G1	G2	G1	G2	G1	G2	Hip. Nula	p-valor
CCED	1	1	2	2	3	2	Igual distribución en G1 y G2	0.083

Fuente. Resultados de la investigación

En consecuencia, con una significación de $0.083 > 0.05$ no rechazamos la hipótesis nula, es decir, no existe evidencia muestral para asegurar que la distribución de la variable CCED es distinta en G1 y G2. Una de las razones de este resultado puede deberse a que el conocimiento que se evalúa en este caso es el compartido con estudiantes que han terminado su etapa escolar (pre-universitaria) que, aunque fue desarrollada en países distintos, estos comparten, salvo excepciones menores, los mismos requerimientos curriculares para este período educativo.

Evaluación del conocimiento ampliado del contenido de estadística descriptiva.

Ahora presentamos los resultados de los tres ítems que buscan evaluar el conocimiento del contenido que es compartido con los estudiantes de etapas educativas posteriores a la escolar, sobre estadística descriptiva. Estos evalúan los contenidos C2, C4 y C6 de la Tabla 1 respectivamente. En la Tabla 8 organizamos las frecuencias (y porcentajes) de respuestas para cada opción, donde diferenciamos entre los grupos que conforman la muestra y destacamos con negrita la alternativa correcta en cada caso.

Tabla 8*Frecuencia (y porcentaje) de respuestas en ítems sobre el Conocimiento Ampliado*

Opción	Ítem 2 (C2)		Ítem 4 (C4)		Ítem 6 (C6)	
	G1	G2	G1	G2	G1	G2
A	0 (0)	1 (2.4)	36 (42.9)	10 (23.8)	10 (11.9)	11 (26.2)
B	24 (28.6)	12 (28.6)	3 (3.6)	7 (16.7)	7 (8.3)	3 (7.1)
C	36 (42.9)	14 (33.3)	9 (10.7)	4 (9.5)	29 (34.5)	3 (7.1)
D	9 (10.7)	4 (9.5)	28 (33.3)	16 (38.1)	23 (27.4)	18 (42.9)
No responde	15 (17.9)	11 (26.2)	8 (9.5)	5 (11.9)	15 (17.9)	7 (16.7)
Total	84	42	84	42	84	42

Fuente. Resultados de la investigación

En general, podemos notar que, a diferencia del caso anterior, en los tres ítems que conforman esta categoría no se observan resultados similares en ambos grupos, ya que mientras el G1 acierta mayormente a las opciones correctas (salvo en el Ítem 2), el G2 tiene un

comportamiento totalmente opuesto, obteniendo más respuestas inclinadas hacia los distractores que a las opciones correctas en los tres casos.

En términos específicos, el *ítem 2* fue propuesto por Allen (2006) para evaluar la capacidad de relacionar el valor numérico del coeficiente de correlación entre dos variables X e Y a partir de su representación en un gráfico de dispersión en estudiantes universitarios. La versión original de este ítem consideraba cinco opciones de respuesta, por lo que fue adaptado levemente eliminando la opción que proponía un valor de -0.3, por considerarla poca atractiva para ser elegida (la nube de puntos tiene una clara tendencia al alza, lo que justifica que haya sido la menos seleccionada en su aplicación inicial). Entre los resultados originales, de un total de 305 respuestas obtenidas, un 53% de ellas es correcta, mientras que en nuestro caso los resultados son más bajos, ya que solo con un 28.6% de los participantes del G1 y G2 logran acertar a la mejor opción para relacionar distintas representaciones para describir patrones de asociación entre dos variables (C2).

El *ítem 4* fue construido por DelMas et al. (2007) para evaluar la capacidad para estimar correctamente y comparar las desviaciones estándar para diferentes histogramas, es decir, comprender que la más baja desviación estándar podría ser para un gráfico con la menor dispersión (típicamente), en estudiantes universitarios estadounidenses. La versión original de este ítem también consideraba cinco opciones de respuesta, por lo que fue adaptado eliminando la opción con menor frecuencia de elección en su implementación original. Entre sus resultados, de un total de 746 respuestas, un 34.3% de ellas es correcta, mientras que en nuestro caso el G1 supera este valor con un 42.9% y el G2 es menor con un 23.8% de los resultados obtenidos.

El *ítem 6* fue propuesto por Garfield (2003) para analizar la capacidad de distinguir entre correlación y causalidad, es decir, evalúa el conocimiento de que una fuerte correlación entre dos variables no significa que una cause la otra. Con la intención de comparar la aplicación del instrumento SRA (de donde es parte este ítem) entre varias muestras, Tempelaar (2004) estandariza los resultados según porcentaje de respuestas correctas de cada ítem, obteniendo que este ítem es abordado correctamente por un 52% de 245 estudiantes universitarios americanos y un 65% de 267 estudiantes universitarios taiwaneses. En nuestro caso los resultados son más desalentadores ya que por un lado el G1 alcanza un 34.5% de respuestas correctas, el G2 logra un 7.1%, inclinándose mayormente por el distractor D (42.9%) que es el error de confundir una alta correlación entre dos variables con una relación de causalidad. Todo lo anterior parece suponer que existen diferencias entre G1 y G2 respecto al conocimiento ampliado, aspecto que abordaremos ahora.

Al igual que en el apartado previo, con la intención de analizar conjuntamente los ítems que conforman esta categoría, definimos la variable *Conocimiento Ampliado sobre Estadística Descriptiva* (CAED) como la suma de las puntuaciones obtenidas en los ítems previos. De esta forma, en la Tabla 9 presentamos algunos estadísticos de resumen y contrastamos si la distribución de la variable CAED es la misma en ambos grupos, por medio de la Prueba U de M-W para muestras independientes.

Tabla 9

Estadísticos de resumen de la variable CAED

Variable	Cuartil 1		Cuartil 2		Cuartil 3		Prueba U M-W	
	G1	G2	G1	G2	G1	G2	Hip. Nula	p-valor
CAED	0.25	0	1	0	2	1	Igual distribución en G1 y G2	0.000*

Nota. * $p < 0.05$. *Fuente.* Resultados de la investigación

En consecuencia, con una significación de $0.000 < 0.05$ rechazamos la hipótesis nula, es decir, existe evidencia muestral para asegurar que la distribución de la variable CAED es distinta en G1 y G2. Este resultado debe interpretarse según el contexto de los participantes, ya que la formación universitaria de los estudiantes que conforman el G1 (España) no es la misma que en el G2 (Chile), mientras que los primeros han finalizado algún grado antes de la realización del máster que los habilita para hacer clases de matemática en secundaria y bachillerato, los segundos están cursando la especialización de profesor de matemáticas como parte del mismo grado.

Evaluación del conocimiento del contenido per se sobre estadística descriptiva.

Finalmente, a modo de síntesis, analizamos globalmente estos seis ítems para comprobar si existen diferencias entre la puntuación obtenida según ambas categorías de conocimiento. Para ello, contrastamos si las medianas de las diferencias entre CCED y CAED calculadas en toda la muestra ($n = 126$) son iguales a 0, por medio de la Prueba de rangos de Wilcoxon para muestras relacionadas. Sus resultados, junto a algunos estadísticos de resumen se presentan en la Tabla 10.

Tabla 10

Estadísticos de resumen de las diferencias entre el CCED y el CAED

Variable	Cuartil 1	Cuartil 2	Cuartil 3	Prueba de Wilcoxon	
				Hip. Nula	p-valor
CCED-CAED	0	1	1	La mediana de las diferencias es 0	0.000*

Nota. * $p < 0.05$. *Fuente.* Resultados de la investigación

Por tanto, con un p-valor de $0.000 < 0.05$ rechazamos la hipótesis nula, es decir, existen diferencias significativas entre el conocimiento común y ampliado declarado por los participantes. Más aun, podemos notar que aparentemente se obtiene mejor resultado en el CCED, ya que desde el cuartil 2 (mediana) la diferencia CCED-CAED es 1, es decir mayor a cero, reflejando una mayor deficiencia en el conocimiento ampliado del contenido.

Proyecciones

En este trabajo, hemos reportado el proceso de construcción e implementación piloto de un instrumento para evaluar aspectos sobre el conocimiento del contenido de estocástica para futuros profesores de matemática, en lo referido a la Estadística Descriptiva. En este sentido, motivados por la problemática vigente de que la formación estadística de profesores se ha mostrado deficiente, hemos elaborado una herramienta para evaluar el conocimiento del contenido en estos profesionales, con el cual esperamos recoger información sobre el estado de esta etapa formativa. Además, posterior a su construcción, lo hemos implementado en una muestra piloto de estudiantes para profesor de matemática provenientes de España y Chile, cuyos resultados para aquellos ítems que evalúan el conocimiento sobre estadística descriptiva se detallaron a lo largo de este trabajo.

En cuanto a las características psicométricas del instrumento y los ítems reportados, pudimos concluir un nivel de dificultad medio y una fuerza de discriminación adecuada para cada reactivo, lo mismo para garantizar como aceptable la consistencia interna del cuestionario completo. Al agrupar aquellos ítems que evalúan el conocimiento común y los que hacen lo mismo respecto al conocimiento ampliado, observamos que existen diferencias significativas entre los resultados obtenidos por ambos grupos para el segundo de ellos, lo que puede deberse a las diferencias en la formación recibida previamente por los participantes de cada grupo. Aunque nuestro interés es simplemente describir el conocimiento declarado por los participantes y no hacer ningún tipo de generalización, estos resultados son opuestos a aquellos donde se asegura la inexistencia de diferencias significativas entre los modelos concurrente y recurrente para la formación del profesorado (Valle et al., 2011). Además, al comparar las respuestas obtenidas en toda la muestra piloto, obtuvimos que las puntuaciones de los ítems que evalúan ambas categorías del conocimiento del contenido *per se* son estadísticamente distintas, mostrando mayor deficiencia en lo referido al conocimiento del contenido ampliado. Esto establece un desafío de mejora en la formación disciplinar del profesorado, ya que el conocimiento ampliado es el desarrollado durante la estadía de estos sujetos en la universidad.

De esta forma, proyectamos una nueva implementación del instrumento en una muestra de futuros profesores de matemática chilenos, con la cual esperamos contar con información sobre este aspecto de la formación del profesorado. Lo anterior se vuelve de particular interés en esta población, ya que desde el año 2017 las autoridades chilenas organizan anualmente la dominada Evaluación Nacional Diagnóstica (END) dirigida a todos los estudiantes para profesor que se encuentren en los doce meses anteriores al egreso, con el objetivo de diagnosticar la formación de los nuevos docentes y generar información útil para los programas académicos (Centro de Perfeccionamiento Experimentación e Investigaciones Pedagógicas, 2018). Sin embargo, en los últimos resultados de la END, de 612 estudiantes para profesor de matemática que rindieron la prueba de Conocimientos Disciplinarios y Didácticos, los temas de geometría y datos y azar (estocástica) son lo más deficientes. Por tanto, consideramos que, en la próxima aplicación del instrumento, este nos entregará información específica sobre los conocimientos del contenido de estocástica con que cuentan actualmente estos profesionales de la educación matemática. Y con ella, se espera identificar aquellos tópicos más descendidos, de manera que en un futuro no muy lejano puedan desarrollarse mejoras a la formación específica del profesorado, que les permita responder satisfactoriamente a las exigencias de su campo profesional.

Agradecimientos: Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación B-SEJ-063-UGR18, el Grupo de investigación PAIDI 622 (Junta de Andalucía, España) y la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) de Chile a través de una beca de doctorado en el extranjero (Folio 72170025)

Referencias

- Allen, K. (2006). *The statistics concept inventory: Development and analysis of a cognitive assessment instrument in statistics*. University of Oklahoma.
- Batanero, C. y Borovenik, M. (2016). *Statistics and Probability in High School*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (Eds.) (2011). *Teaching Statistics in school mathematics: Challenges for Teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study*. New York: Springer.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2005). Análisis del Proceso de Construcción de un Cuestionario sobre Probabilidad Condicional. Reflexiones desde el Marco de la TFS. En D. Ordoñez, C. Batanero y A. Contreras (Eds.), *Investigación en Didáctica de las matemáticas. I Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas* (pp. 13-36). Jaén: Universidad de Jaén.
- Ben-Zvi, D. y Makar, K. (Eds.) (2016). *The teaching and Learning of Statistics. International Perspectives*. Cham: Springer.
- Ben-Zvi, D., Makar, K. y Garfield, J. (Eds.) (2018). *International Handbook of Research in Statistics Education*. Cham: Springer.

- Centro de Perfeccionamiento Experimentación e Investigaciones Pedagógicas. (2018). *Resultados Nacionales Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente 2017*. Santiago: CPEIP.
- Chan, S. W., Ismail, Z. y Sumintono, B. (2015). Assessing Statistical Reasoning in Descriptive Statistics: A Qualitative Meta-analysis. *Jurnal Teknologi*, 72(2), 1-6.
- Davies, N. y Marriott, J. (2010). Assessment and Feedback in Statistics. En P. Bidgood, N. Hunt y J. Flavia (Eds.), *Assessment Methods in Statistical Education: An International Perspective* (pp. 3-19). Londres: John Wiley y Sons.
- DelMas, R., Garfield, J., Ooms, A. y Chance, B. (2007). Assessing Students' Conceptual Understanding after a First Course in Statistics. *Statistics Education Research Journal*, 6(2), 28-58.
- Ebel, R. y Frisbie, D. (1991). *Essentials of Educational Measurement* (5th ed.). New Jersey: Prentice-Hall.
- Estepa, A. y Gea, M. M. (2011). Conocimiento para la enseñanza de la asociación estadística. En J. Ortiz (Ed.), *Investigaciones actuales en educación estadística y formación de profesores* (pp. 23-40). Granada: Departamento de didáctica de la matemática.
- Garfield, J. (2003). Assessing Statistical Reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 2(1), 22-38.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113.
- Groth, R. y Meletiou-Mavrotheris, M. (2018). Research on Statistics Teachers' Cognitive and Affective Characteristics. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 327-355). Cham: Springer.
- Jacobbe, T., Case, C., Whitaker, D. y Foti, S. (2014). Establish the validity of the LOCUS assessments through an evidenced-centered design approach. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics*. Flagstaff: IASE.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: Teoría y práctica*. Barcelona: Paidós.
- Landis, J. R. y Koch, G. G. (1977). The Measurement of Observer Agreement for Categorical Data. *Biometrics*, 33(1), 159-174. <https://doi.org/10.2307/2529310>
- Ministerio de Educación Chile. (2009). *CURRICULUM. Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la Educación Básica y Media*. Santiago: MINEDUC.
- Ministerio de Educación Chile. (2015). *Bases curriculares 7° a 2° medio*. Santiago: MINEDUC.
- Muñoz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñoz, L. y Valcke, M. (2016). ¿Hay un vacío en la formación inicial del profesorado de matemáticas de secundaria en España respecto a otros países? *Revista de Educación*, 372, 111-140.
- Nunnally, J. (1967). *Psychometric Theory*. New York: McGraw-Hill.
- Osterlind, S. (1998). *Constructing test items: Multiple-Choice, Constructed-Response, Performance, and Other Formats*. Dordrecht: Kluwer.
- Pedhazur, E. y Pedhazur, L. (1991). *Measurement, Design, and Analysis*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

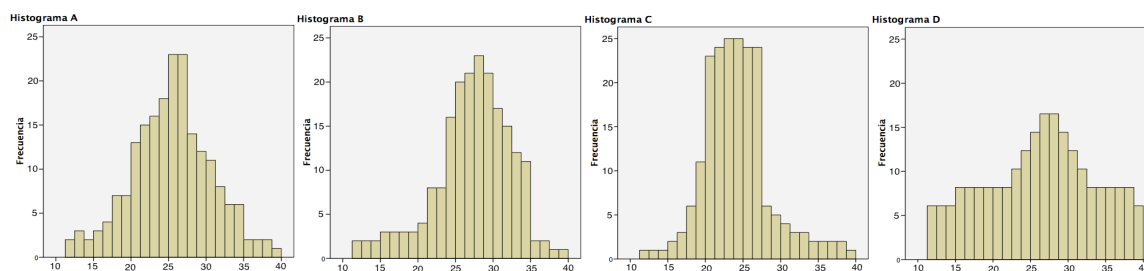
- Ruz, F., Contreras, J. M., Molina-Portillo, E. y Godino, J. D. (2018). Idoneidad epistémica de programas formativos sobre didáctica de la estadística. En L. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, Á. Aguilar-González, P. Alonso, F. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 515-524). Gijón: SEIEM.
- Ruz, F., Díaz-Levicoy, D., Molina-Portillo, E. y Ruiz-Reyes, K. (2018). Ways to strengthen the statistical literacy, reasoning and thinking in the mathematics teachers training. En M. Sorto, A. White y L. Guyot (Eds.), *Proceedings 10th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 10)*. Kyoto, Japón: ISI/IASE.
- Ruz, F., Molina-Portillo, E. y Contreras, J. M. (2019). Guía de Valorización de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Instrucción en Didáctica de la Estadística. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(63), 135-154.
- Santesteban, C. (2009). *Principios de Psicometría*. Madrid: Síntesis.
- Tempelaar, D. (2004). Statistical reasoning assessment: An Analysis of the SRA instrument. En *Proceedings of the ARTIST Roundtable Conference* (pp. 1-29). Appleton, WI: University of Lawrence.
- Valle, J. M., Jesús, L. y Ayuso, M. (2011). La nueva formación inicial del profesorado de Educación Secundaria: modelo para la selección de buenos centros de prácticas. *Revista de Educación*, 354, 267-290.

Anexo

Ítems sobre el contenido de estadística descriptiva

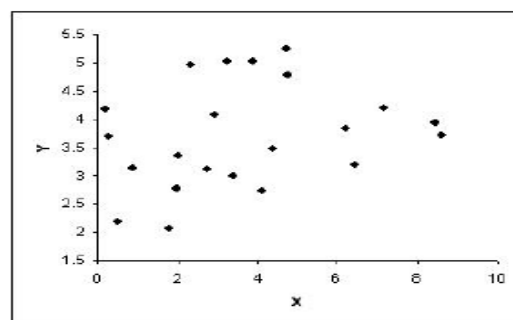
1) Un estudio examinó la longitud de una cierta especie de pez en un lago. El plan era tomar 200 peces y examinar los resultados. En la siguiente tabla se muestran algunos estadísticos de resumen sobre la longitud de los peces, en milímetros (mm). ¿Cuál de los siguientes histogramas corresponde a los datos mostrados?

Promedio	Mediana	Desv. Estándar	Mínimo	Máximo
27,3 mm	28,6 mm	5,1 mm	12,1 mm	38,0 mm



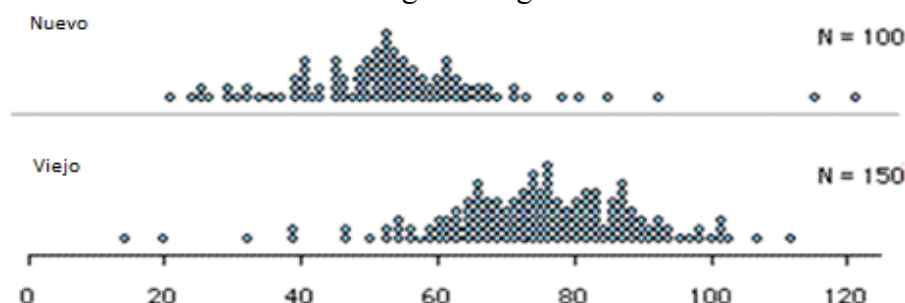
A. Histograma A ***B. Histograma B** C. Histograma C D. Histograma D

2) El siguiente gráfico de dispersión muestra la relación entre las puntuaciones de una escala de ansiedad (X) y las calificaciones de un examen de ciencias (Y). En base al gráfico, deduzca el coeficiente de correlación entre X e Y.



A. 0
***B. 0,3**
 C. 0,7
 D. 1,3

3) Una compañía de telefonía desarrolló una nueva fórmula de fibra óptica para mejorar la velocidad de navegación en internet de sus usuarios. Para probar la efectividad de esta nueva fórmula, se desarrolló un análisis exploratorio de datos en un pueblo de 250 habitantes. Entre ellos, 100 recibieron esta nueva conexión, mientras que los otros 150 permanecieron con conexión por cable. Posteriormente, se le solicitó a cada participante visitar una página de prueba, registrándose el tiempo (en segundos) de demora en tener acceso a ella. Los resultados de este procedimiento se muestran en los siguientes gráficos:



Las próximas declaraciones fueron realizadas por estudiantes de estadística diferentes. ¿Cuál de ellas es correcta?

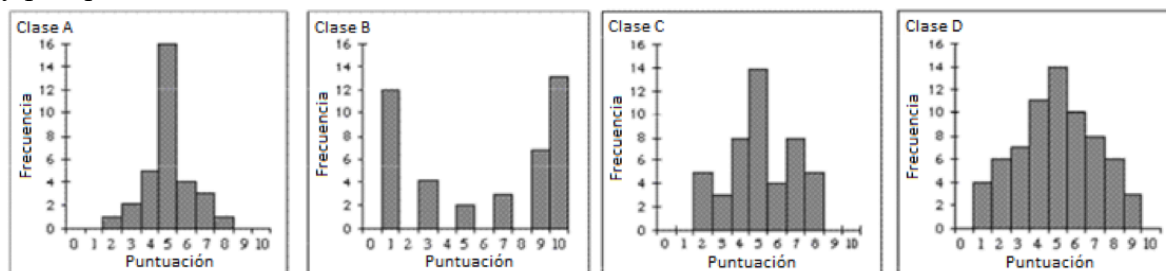
A. La antigua conexión funciona mejor. Dos personas tuvieron acceso en menos de 20 segundos. Además, la mayor demora - dos minutos - fue con la nueva fórmula.
***B. La nueva conexión funciona mejor. El tiempo promedio de la nueva fórmula de acceso a**

internet es menor que el de la antigua conexión, tarda unos 20 segundos menos.

C. Ambas conexiones alcanzan igual velocidad de navegación, ya que la diferencia entre los resultados obtenidos no es estadísticamente significativa.

D. No concluiría nada de estos datos. El número de habitantes en los dos grupos no es lo mismo, así que no hay una manera justa de comparar las dos fórmulas.

4) A continuación se presentan los resultados de una prueba, en escala de 0 a 10 puntos, para cinco clases de estadística diferentes. ¿En cuál de ellas esperarías tener la dispersión más baja, y por qué?



*A. Clase A, porque tiene la mayoría de los valores cercanos a la media.

B. Clase B, porque tiene el menor número de puntuaciones distintas.

C. Clase C, es de las con menor rango y puntuaciones más homogéneas.

D. Clase D, porque se la forma de su distribución se asemeja más a la curva normal.

5) La puntuación obtenida por Ana en un examen corresponde al percentil 35 respecto a sus compañeros de clase, mientras que el resultado de Elena en la misma prueba corresponde al percentil 70. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A. Ana obtuvo mejor o igual puntuación que 35 compañeros de su clase.

B. Ana responde bien aproximadamente una tercera parte del examen.

C. Elena obtiene el doble de puntuación que Ana en el examen.

*D. El 30% de los compañeros de su clase obtuvieron mejor o igual puntuación que Elena.

6) En tu vecindario, mediante un análisis exploratorio de datos se determinó un coeficiente de correlación de 0,9 entre el nivel de ingresos y la cantidad de plástico reciclado en una semana. ¿Qué indica este valor?

A. En este vecindario ganar más dinero provoca que las personas reciclen más.

B. Los vecinos que menos reciclan son los que ganan más dinero.

*C. Aunque los vecinos que menos dinero ganan son los que menos reciclan, esto no necesariamente significa que ganar menos sea la causa de reciclar menos plástico.

D. Las personas que más ganan son las que más plástico reciclan.

Introducción

Hoy en día, el conocimiento estadístico se ha consolidado como un aspecto necesario para que todo ciudadano pueda afrontar eficazmente los desafíos del siglo XXI (Batanero y Borovcnik, 2016; Ben-Zvi, Makar y Garfield, 2018; Organización de las Naciones Unidas, 2015). Esta situación, ha motivado a un gran número de países a incorporar dentro del currículo de matemática aspectos sobre estadística y las probabilidades. En este contexto, podemos observar que países como España (Ministerio de Educación Cultura y Deporte, 2014, 2015), Chile (Ministerio de Educación Chile, 2009, 2012, 2015) y EEUU (Common Core State Standards Initiative, 2020; Franklin et al., 2007; National Council of Teachers of Mathematics, 2000) organizan su enseñanza a partir de edades tempranas con elementos de la estadística descriptiva, evolucionando progresivamente hasta culminar la etapa escolar con una introducción a la inferencia estadística, conectando ambos bloques temáticos por medio de las probabilidades. Este nuevo panorama ha renovado las exigencias y desafíos para el profesorado responsable de esta tarea. Sin embargo, la investigación ha sido persistente en informar que los profesores no son competentes ni se sienten bien preparados para abordar esta labor, lo que refleja una problemática vigente con estos profesionales (Batanero, Burrill y Reading, 2011; Groth y Meletiou-Mavrotheris, 2018).

Nos interesamos en obtener información diagnóstica sobre el estado actual de la formación estadística de estos profesionales, profundizando en su conocimiento sobre la materia. Tradicionalmente, en la educación superior, esta etapa formativa se ha caracterizado por seguir una cronología similar a la planificada dentro de los currículos escolares, iniciando con aspectos de estadística descriptiva, para luego introducir las probabilidades y finalizar con elementos de inferencia estadística (Garfield y Ahlgren, 1988). En el caso de los futuros profesores no es distinto, quienes usualmente experimentan entre una o dos de asignaturas destinadas al contenido de estocástica, donde profundizan, en mayor o menor medida, en los temas de los bloques mencionados. Sin embargo, aunque se reconocen algunos esfuerzos de reforma (Franklin et al., 2015), los profesores tanto en ejercicio como en formación, cuentan con un conocimiento insuficiente sobre estos contenidos (Eichler y Zapata-Cardona, 2016; Groth y Meletiou-Mavrotheris, 2018).

En consecuencia, consideramos valioso disponer de herramientas que nos den información detallada sobre aspectos afectivos hacia el contenido y su enseñanza, de uno de

⁵Ruz, F, Molina-Portillo, E. y Contreras, J.M. (2020). Actitudes hacia la estadística descriptiva y su enseñanza en futuros profesores. *Cadernos de Pesquisa*, 50(178), 964-980.

los bloques temáticos mencionados anteriormente, a saber, la estadística descriptiva. De esta manera, esperamos aportar con información que complemente la panorámica de investigación cubierta hasta la fecha. Además, consideramos importante valorar y reforzar la componente afectiva durante la formación del profesorado, pues si un profesor no valora un tema, le parece que no está preparado para impartirlo o le disgusta, no logrará un aprendizaje efectivo por parte de los alumnos (Estrada y Batanero, 2015). Entonces debe ser un tema de interés que los formadores identifiquen las actitudes de los futuros profesores con respecto a los temas que deben enseñar, de manera que utilicen este conocimiento para promover su mejora durante la etapa formativa (Veloo y Chairhany, 2013).

Por tanto, el objetivo de este trabajo es analizar y explorar las actitudes hacia la estadística descriptiva y su enseñanza en una muestra de 126 futuros profesores de matemática españoles y chilenos. Lo anterior con el propósito de dar respuesta a las siguientes preguntas de investigación: (1) ¿Cuáles son las actitudes de los futuros profesores de matemática hacia los contenidos de estadística descriptiva y su enseñanza?, (2) ¿Existen diferencias en las actitudes declaradas según el país de residencia de los participantes (España y Chile)? Para ello, comenzamos exponiendo el marco de referencia considerado y la metodología empleada para lograr el objetivo planteado. Posteriormente, detallamos los resultados y concluimos con la discusión y proyección de los hallazgos.

Marco de Referencia

La investigación sobre aspectos afectivos relativos a la estadística se ha establecido principalmente sobre la base de los resultados en el campo de las matemáticas (Groth y Meletiou-Mavrotheris, 2018), donde no se ha podido establecer una definición clara de afecto o dominio afectivo (Gómez-Chacón, 2000), sino que depende de la perspectiva teórica con la cual se analice. Por ejemplo, (Goldin et al., 2016) presentan una revisión global sobre diversos conceptos considerados dentro de este dominio (como actitudes, ansiedad, creencias, autoeficacia, entre otras), destacando que, aun usando una misma terminología, no se estudian dentro de él los mismos fenómenos, por lo que es fundamental definir claramente la perspectiva adoptada en cada caso.

En esta investigación, nos posicionamos desde la mirada de McLeod sobre el dominio afectivo, quien afirma que “se refiere a un amplio rango de creencias, sentimientos y estados de ánimo, que generalmente se consideran como algo más que el puro dominio de la cognición” (McLeod, 1992, p. 576). Así, usamos el término afecto en forma general y consideramos a las emociones, creencias y actitudes como sus principales descriptores, aunque nuestro foco de

interés son las últimas. Un estudiante reacciona positiva o negativamente frente a una situación de aprendizaje matemático, dependiendo de sus creencias acerca de sí mismo y el contenido. Si la situación se reitera varias veces, produciéndose el mismo tipo de reacción afectiva, ésta puede convertirse en actitud. Estas actitudes y emociones influyen en las creencias y contribuyen a su formación (Gómez-Chacón, 2000).

Actitudes. En el campo de la educación estadística, Estrada (2002) justifica que la falta de consenso en la definición de actitud se produce porque dicho constructo no es observable directamente, sino que debe ser inferido a partir de comportamientos externos (usualmente verbales) condicionados por la construcción teórica en que se enmarquen. En este sentido, podemos identificar diversas aproximaciones a su definición: “Son respuestas afectivas que consideran sentimientos positivos y negativos de moderada intensidad y razonable estabilidad” (McLeod, 1992, p. 581); “Son aspectos no directamente observables sino que inferidos, compuestos tanto por las creencias como por los sentimientos y las predisposiciones comportamentales hacia el objeto al que se dirigen” (Auzmendi, 1992, p. 17); “Son predisposiciones evaluativas, positivas o negativas, que determinan las intenciones personales e influyen en el comportamiento” (Gómez-Chacón, 2000, p. 23); “Son una suma de emociones y sentimientos que se experimentan durante el período de aprendizaje de la materia objeto de estudio” (Estrada, 2002, p. 56); “Son maneras de actuar, sentir o pensar que muestran la disposición u opinión de un sujeto. Cambian más lentamente que las emociones, pero más rápidamente que las creencias” (Philipp, 2007, p. 259).

A raíz de estas definiciones, podemos notar que en esencia con el término actitud se consideran sentimientos y predisposiciones hacia el objeto de interés, cuya estabilidad en el tiempo es mayor que las emociones, pero menor que las creencias. Por ello, en este estudio adoptamos la definición propuesta por Philipp (2007), que hacemos operativa desde la perspectiva de Batanero, para quien las actitudes “se consideran un constructo mental, no directamente observable, sino que ha de ser inferido a partir de la valoración en una escala de actitudes o de la observación del comportamiento de los sujetos” (Batanero, 2009, p. 6).

Actitudes hacia la estadística. Promover actitudes positivas hacia la estadística se ha consolidado como un objetivo de la reforma educacional en torno a su enseñanza (Tishkovskaya y Lancaster, 2012). En este sentido, se destacan por influir en el proceso de enseñanza y aprendizaje; en el uso de la estadística fuera del contexto escolar; y en la decisión de continuar estudios futuros sobre el tema (Gal, Ginsburg y Schau, 1997). Como resultado, existe gran número de investigaciones relacionadas con evaluar las actitudes de los estudiantes

por medio de instrumentos de valoración (Carmona, 2004; Nolan, Beran y Hecker, 2012). Entre ellas, se destacan como más usadas:

- La escala *Statistics Attitude Survey* (SAS) de Roberts y Bilderback (1980), diseñada para predecir el rendimiento en estadística a partir de las actitudes hacia la materia de sus estudiantes.
- La escala *Attitudes Toward Statistics* (ATS) de Wise (1985), elaborada para medir el cambio actitudinal en estudiantes universitarios al comienzo y término de un curso de introducción a la estadística, con el interés de evaluar una estructura bidimensional de la escala: Actitudes hacia la *asignatura* y hacia el *uso* de la estadística en lo profesional.
- La *Escala de Actitudes hacia la Estadística* (EAE) de Auzmendi (1992), destacada como precursora de este tipo de estudios en lengua castellana, quien propone una estructura multidimensional de cinco componentes: (1) *Utilidad subjetiva* sobre el conocimiento estadístico desde una perspectiva afectiva y comportamental; (2) *Ansiedad* manifestada ante la materia; (3) *Confianza* para enfrentarse con la estadística; (4) *Agrado* que produce el trabajo estadístico; y (5) *Motivación* hacia el estudio y utilización de la estadística.
- La *Survey of Attitudes Toward Statistics* (SATS-28) de Schau, Stevens, Dauphinee y Del Vecchio (1995), diseñada para valorar actitudes hacia la estadística en asignaturas de introducción a la estadística en el nivel universitario. Estos autores, proponen una estructura multidimensional de cuatro componentes: (1) *Afectivo*: sentimientos positivos o negativos hacia la estadística; (2) *Competencia Cognitiva*: acerca del conocimiento y habilidades intelectuales aplicadas a la estadística; (3) *Valor*: utilidad, relevancia y valor de la estadística en la vida personal y profesional; y (4) *Dificultad* percibida hacia la estadística como asignatura.
- La *Survey of Attitudes Toward Statistics* (SATS-36) de Schau (2003), quien propone una nueva versión de la SATS-28 donde incorpora dos nuevos componentes, sobre el *Interés* (nivel de atracción personal de los estudiantes hacia la estadística, con cuatro ítems) y *Esfuerzo* (cantidad de trabajo que los estudiantes gastan en aprender estadística, con cuatro ítems), que se suman a los cuatro anteriores.

Actitudes hacia la estadística y su enseñanza. La literatura sobre el estudio de las actitudes de los profesores, tanto en ejercicio como formación, es escasa (Estrada, Batanero y Lancaster, 2011; Groth y Meletiou-Mavrotheris, 2018) y entre la disponible, la tendencia ha sido usar alguno de los instrumentos mencionados anteriormente o proponer uno nuevo (muchas veces adaptado de los anteriores) que además considere actitudes hacia la enseñanza

de la materia. Entre los primeros, destacamos los resultados de aplicar la escala ATS (Onwuegbuzie, 1998), SATS-28 (Estrada, 2002; Nasser, 2004) y SATS-36 (Hannigan, Gill y Leavy, 2013; Zientek, Carter, Taylor y Capraro, 2011). Sobre los segundos, por un lado, resaltamos los resultados de usar la Escala de Actitudes hacia la Estadística y su Enseñanza (EAEE) para profesores (Estrada, 2002) en España (Estrada, Batanero y Fortuny, 2004), Portugal (Martins, Estrada, Nascimento y Comas, 2015) y Perú (Aparicio y Bazán, 2006). Y, por otro lado, las investigaciones que han utilizado una evolución de la EAEE aplicada al campo de las probabilidades, denominada Escala de Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza para profesores (EAPE) (Estrada y Batanero, 2015; Estrada, Batanero y Díaz, 2018) en Chile (Alvarado, Andaur y Estrada, 2018; Ruz, Molina-Portillo, Vásquez y Contreras, 2020; Vásquez, Alvarado y Ruz, 2019) y España (Estrada y Batanero, 2020).

Onwuegbuzie (1998) aplica la escala ATS para obtener datos normativos sobre las actitudes de 222 profesores estadounidenses y concluye que este grupo de profesionales tiene actitudes relativamente menos positivas que otros reportados hasta ese momento. Nasser (2004) analiza la asociación existente entre el rendimiento en estadística y las actitudes hacia la estadística con la escala SATS-28, en 162 futuros profesores de Israel. Entre sus resultados, la autora reporta actitudes positivas (sobre la puntuación de indiferencia) hacia los componentes afectivos, de competencia cognitiva y de valor, pero negativas (bajo la indiferencia) hacia el componente de dificultad. Estrada (2002), aplica una traducción al español de la escala SATS-28 en 367 futuros profesores de primaria españoles, reportando puntuaciones medias superiores al valor teórico de indiferencia, es decir positivas, tanto globalmente como en cada uno de los cuatro componentes de actitudes considerados en la SATS-28.

Entre quienes han usado la escala SATS-36 para evaluar este aspecto del dominio afectivo, Zientek et al. (2011) evalúan el efecto de las actitudes en el rendimiento de 95 futuros profesores de primaria estadounidenses. Entre sus resultados sobre actitudes, los participantes declaran una disposición positiva hacia la estadística en las componentes de valor, competencia cognitiva y esfuerzo, pero negativa en lo referido a los componentes afectivo, de interés y dificultad. Hannigan et al. (2013), quienes analizan la relación entre las actitudes y la comprensión conceptual de la estadística en 134 futuros profesores de matemática para secundaria irlandeses. Los autores informan que sus participantes declaran actitudes positivas en cada uno de los seis componentes considerados en la SATS-36, aunque estas se acercan más a la posición neutral en la dificultad percibida hacia el curso de estadística.

Por otro lado, entre quienes proponen nuevas vías de acercamiento a aspectos afectivos en estos profesionales, Begg y Edwards (1999) analizan las actitudes y creencias sobre la

enseñanza de la estadística en 34 futuros profesores de primaria a través de entrevistas, escalas de medición y mapas conceptuales. Entre sus resultados, la mayoría de los maestros en formación expresan actitudes negativas hacia la estadística. Estrada (2002), en su primer estudio, desarrolla un instrumento para evaluar específicamente este aspecto en profesores (EAEE) conformado por 25 ítems que consideran la interacción de seis componentes organizados según: (1) *Aspectos Antropológicos*, abarcando componentes de tipo *Social* (percepción del valor de la estadística en la sociedad), *Educativo* (interés en aprender y enseñar estadística); e *Instrumental* (percepción de la utilidad de la estadística en otras áreas); y (2) *Aspectos Pedagógicos*, que consideran tres componentes clásicos sobre cuestiones *Afectivas* (sentimientos personales hacia la estadística), *Cognitivas* (concepciones acerca de la estadística) y *Comportamentales* (tendencia a usar la estadística).

En este contexto, Estrada et al. (2004) reportan los resultados de aplicar la EAEE en 140 profesores de primaria (66 en ejercicio y 74 en formación) españoles, indicando que en general se observa una actitud positiva hacia la estadística en los seis componentes de la EAEE, aunque menos positiva en el grupo de futuros profesores. Posteriormente, Aparicio y Bazán (2006) usan la EAEE para analizar la relación entre actitud y rendimiento en estadística de 87 profesores en ejercicio peruanos. Sus resultados sobre actitudes fueron también positivos, tanto globalmente como en cada uno de los componentes de actitudes considerados. Martins et al. (2015) analizan las actitudes en 1.098 profesores del 1º y 2º ciclo de enseñanza portugueses, quienes reportan actitudes levemente positivas en ambos grupos, aunque más bajas en profesores del primer ciclo.

Por otro lado, Estrada y Batanero (2015) proponen la EAPE aplicada al campo de las probabilidades, donde se consideran siete componentes, agrupados en tres dimensiones: (1) *Actitudes hacia la probabilidad* y sus componentes Afectivo, de Competencia Cognitiva y Comportamental; (2) *Actitudes hacia la enseñanza de la probabilidad*, con componentes Afectivos, de Competencia Didáctica y Comportamentales; y (3) La valoración de la materia y su enseñanza, con el componente de *Valor hacia la probabilidad y su enseñanza*. Alvarado et al. (2018) aplicaron la EAPE en 122 profesores de matemática chilenos (70 en ejercicio y 51 en formación) reportando actitudes mayormente positivas en todos los componentes considerados y globalmente, aunque estas fueron menos positivas en el grupo de profesores en formación. Vásquez et al. (2019) usaron la EAPE para explorar diferencias actitudinales hacia la estadística y la probabilidad y su enseñanza en una muestra de 124 futuras maestras de educación infantil chilenas. Las autoras reportaron resultados mayormente positivos hacia ambos tópicos, aunque estos fueron más bajos al considerar los contenidos de probabilidad. Por otro lado, Ruz et al. (2020) aplicaron la EAPE en 126 futuros profesores de matemática

chilenos y españoles, comunicando actitudes principalmente positivas hacia la probabilidad y su enseñanza. A su vez, Estrada y Batanero (2020) aplicaron la EAPE en 416 futuros profesores de primaria españoles, reportando actitudes positivas en los siete componentes considerados en la escala.

En consecuencia, para alcanzar nuestro objetivo de evaluar las actitudes hacia el contenido y la enseñanza de la estadística descriptiva, seguimos la recomendación de Groth y Meletiou-Mavrotheris (2018) sobre usar instrumentos que establezcan una distinción clara entre las “actitudes de los profesores hacia la estadística” o “actitudes hacia la enseñanza de la estadística”, por lo que comenzamos desde un instrumento específico para estos profesionales y lo adaptamos al contenido en cuestión.

Actitudes hacia la estadística descriptiva y su enseñanza en esta investigación.

Establecemos nuestra base teórica desde la perspectiva adoptada en la Escala de Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza para profesores (Estrada y Batanero, 2015; Estrada et al., 2018). A partir de ella, hemos adaptado la EAPE a los contenidos de estadística descriptiva, definiendo cada uno de los componentes mencionados como:

1. *Actitudes hacia los contenidos de Estadística Descriptiva*, desglosadas en tres componentes.
 - 1.1. *Componente Afectivo*: Sentimientos del sujeto, positivos o negativos, hacia los contenidos de estadística descriptiva.
 - 1.2. *Competencia Cognitiva*: Autopercepción de la capacidad intelectual hacia los contenidos de estadística descriptiva.
 - 1.3. *Componente Comportamental*: Tendencia a usar herramientas de la estadística descriptiva cuando sea conveniente.
2. *Actitudes hacia la enseñanza de los contenidos de Estadística Descriptiva*, que se articulan en tres componentes.
 - 2.1. *Componente Afectivo*: Considera sentimientos personales, positivos o negativos, hacia la enseñanza de los contenidos de estadística descriptiva.
 - 2.2. *Competencia Didáctica*: Percepción del profesor sobre su propia capacidad para enseñar los contenidos de estadística descriptiva.
 - 2.3. *Componente Comportamental*: Valora la tendencia a la acción didáctica en la enseñanza de los contenidos de estadística descriptiva.
3. *Valoración del contenido y su enseñanza*.
 - 3.1. *Componente de Valor* hacia los contenidos de Estadística descriptiva y su enseñanza: Considera el valor, utilidad y relevancia que el profesor concede sobre los contenidos de estadística descriptiva en la vida personal y profesional.

De esta forma, hemos establecido una primera versión de la Escala de Actitudes hacia el Contenido de Estadística Descriptiva y su Enseñanza (EAEDE), presente en el Anexo, de la

que expondremos a continuación su implementación en una muestra de futuros profesores de matemáticas.

Método

Esta investigación se cataloga dentro del enfoque cuantitativo y se considera de tipo exploratorio y descriptivo (Hernández, Fernández y Baptista, 2014). En este contexto, en lo que sigue exponemos la muestra analizada, el instrumento junto a las variables consideradas y una breve síntesis de los procedimientos de análisis realizados para responder a las preguntas de investigación pretendidas.

Participantes. La muestra es no probabilística y se compone de 126 futuros profesores de matemática españoles y chilenos. Entre ellos, los provenientes de España corresponden a 84 estudiantes (35 mujeres y 49 hombres, con edades entre 21 y 50 años) de un máster universitario de enseñanza secundaria obligatoria y bachillerato, pertenecientes a la especialidad de matemáticas a comienzos del curso académico 2018-2019. Los demás sujetos, corresponden a 42 estudiantes (21 mujeres y 21 hombres, con edades entre 19 y 38 años) de pedagogía en matemática de una universidad chilena, que cursaban el cuarto de los nueve semestres que considera de su plan de estudios. En ambos casos, los participantes habían cursado previamente todas las asignaturas sobre estadística consideradas en su formación inicial. Además, acerca del contexto de la aplicación, todos los participantes recibieron y completaron el cuestionario voluntaria e individualmente dentro de una sesión planificada exclusivamente para este fin, a mediados del segundo semestre de 2018.

Instrumento y variables. Usamos la Escala de la Actitudes hacia la Estadística Descriptiva y su Enseñanza [EAEDE] para profesores, que corresponde a una adaptación de la EAPE aplicada al contenido de interés. Para contestar, se les solicita a los participantes que valoricen cuatro reactivos para cada uno de los siete componentes en que se estructura el instrumento (28 en total), cuyas respuestas están ofrecidas en escala Likert de cinco pasos desde Muy en desacuerdo (1) a Muy de acuerdo (5), cuyo punto medio corresponde a la Indiferencia (3). Además, dado que la mitad de los reactivos fueron redactados en sentido negativo y los demás en afirmativo (ver ítems con * en el Anexo), las puntuaciones obtenidas en ellos fueron invertidas para homogeneizar los análisis. De esta forma, definimos una serie de variables, como resultado de la suma entre los distintos reactivos de cada componente y la puntuación total, que se resumen en la Tabla 1

Tabla 1

Variables analizadas según las componentes de la EAEDE

Componente	Suma ítems:	Rango
Afectivo hacia la Estadística Descriptiva (AED)	1, 5, 16, 27	4 – 20
Comp. Cognitivo hacia la Estadística Descriptiva (CCED)	6, 8, 17, 22	4 – 20
Comportamental hacia la Estadística. Descriptiva (CED)	2, 7, 15, 18	4 – 20
Afectivo hacia la Enseñanza de la Estadística Descriptiva (AEED)	9, 21, 26, 28	4 – 20
Comp. Didáctico hacia la Enseñanza de la Est. Des. (CDEED)	3, 10, 14, 23	4 – 20
Comportamental hacia la Enseñanza de la Est. Des. (CEED)	11, 20, 24, 25	4 – 20
Valor hacia la Estadística Descriptiva y su enseñanza (VEDE)	4, 12, 13, 19	4 – 20
Actitudes hacia la Estadística Descriptiva y su Enseñanza (AEDE)	Todos	28 – 140

Fuente. Elaboración propia

Análisis. En cuanto a los procedimientos realizados, dada la naturaleza cuantitativa de las variables anteriores, comenzamos analizando la puntuación global (variable AEDE) en toda la muestra, con la que detallamos información sobre la consistencia interna del instrumento (confiabilidad) y la validez de constructo, como consecuencia de un Análisis Factorial. Sobre la primera, usamos el coeficiente Alfa de Cronbach como indicador de que la escala produzca los mismos resultados cada vez que sea administrada a la misma persona, en iguales condiciones, concluyendo que, en la medida en que dicho valor sea más cercano a 1, mayor será su consistencia interna. En cuando al Análisis Factorial, en este caso es de tipo exploratorio [AFE] (Lloret-Segura, Ferreres-Traver, Hernández-Baeza y Tomás-Marco, 2014), ya que, a pesar de tener información previa sobre la aplicación de la EAPE en profesores, al haber variado el contenido a la Estadística Descriptiva, no contamos con evidencia específica al respecto para plantear una alternativa confirmatoria.

Posteriormente, nos ajustamos a la perspectiva teórica considerada y exploramos las actitudes declaradas por los participantes según los distintos componentes considerados, identificando si en ellas los resultados se inclinan hacia un sentido positivo o negativo respecto a la posición neutral (indiferencia). Finalizamos con el estudio de los resultados según el país de procedencia de los participantes, entre España y Chile, en búsqueda de posibles diferencias entre la disposición declarada hacia los distintos componentes de actitudes considerados.

Resultados

Análisis global. Las puntuaciones medias por ítem variaron entre 2,73 (ítem 21) y 4,63 (ítem 12) puntos, cuyo detalle se presenta en el Anexo, y en todos los casos se superó el 97,4% de respuestas. Sin embargo, para analizar la puntuación total (AEDE), consideramos únicamente aquellos casos donde no se omitió respuesta, que corresponden a 105 del total.

La distribución de la variable AEDE se representa en la Figura 1, donde agregamos una línea vertical a los 84 puntos como referencia a la posición de indiferencia (por haber contestado en todos los ítems la opción 3).

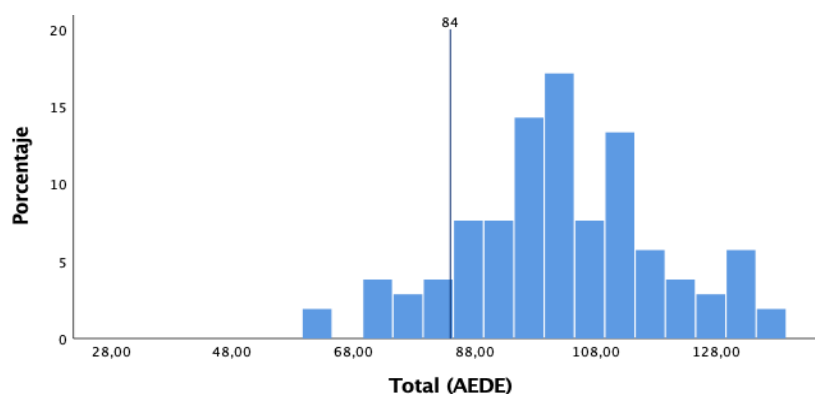
Estos resultados oscilaron entre 62 y 139 puntos, con una media de 102,55 y una desviación estándar de 16,19 puntos. Además, podemos notar en la Figura 1 que la mayoría de los participantes declara puntuaciones totales superiores al valor teórico de indiferencia, lo que refleja, en general, una actitud positiva hacia la estadística descriptiva y su enseñanza.

Respecto a la confiabilidad del instrumento, obtuvimos un alfa de Cronbach de 0,899, lo que se considera como más que aceptable en esta etapa de exploración. El valor de alfa para cada una de las variables consideradas fue menor (AED = 0,65, CCED = 0,63, CED = 0,66, AEED = 0,64, CDEED = 0,72, CEED = 0,66, VEDE = 0,63), aunque esta situación es de esperar debido a que dentro de cada componente se consideran solo cuatro ítems, su magnitud oscila entre rangos usuales para este tipo de estudios (Carmona, 2004; Nolan et al., 2012).

Posteriormente, tras rechazar la hipótesis de que la matriz de correlaciones es la identidad por medio del contraste de esfericidad de Bartlett (Chi-cuadrado aproximado 1.373,67; p-valor 0,000), concluimos que las preguntas de la escala están correlacionadas entre sí. De esta forma, calculamos la medida de adecuación muestral de Kaiser, Meyer y Olkin (KMO) para determinar el grado de relación conjunta entre los ítems, obteniendo un valor de 0,762, respaldando que la idea de hacer un Análisis Factorial es adecuada.

Figura 1

Distribución de la puntuación total (AEDE) en la EAED



Fuente. Resultados de la investigación

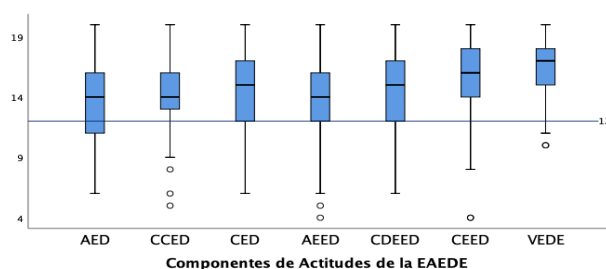
Llevamos adelante un análisis factorial exploratorio, mediante el método de Mínimos Cuadrados no Ponderados ya que los ítems no siguen una distribución normal, obteniendo un total de ocho valores propios mayores que 1. Sin embargo, el porcentaje de varianza explicada por los ocho factores es de 68,57% y con siete es de un 65%, cuyo aporte del octavo factor es muy pequeño. En situaciones como esta, Lloret-Segura et al. (2014) contrastan los procedimientos clásicos con nuevas aportaciones en el marco de la psicometría y sugieren que es mejor escoger aquella estructura que presente mejor interpretación, lo que nos hace orientarnos hacia el modelo de siete factores, establecidos a partir de la perspectiva teórica adoptada. De esta forma, en la siguiente sección organizamos los resultados según las siete componentes de actitudes hacia la estadística descriptiva y su enseñanza considerados.

Actitudes según los componentes teóricos considerados. Tras agrupar los resultados por ítem, según describimos en la Tabla 1 en la Figura 2, exploramos la distribución de las puntuaciones obtenidas en cada componente considerado. Además, incluimos una línea horizontal a los 12 puntos que representan el valor teórico de indiferencia (de haber respondido 3 a los cuatro ítems de cada componente).

En la Figura 2 podemos notar que las puntuaciones medianas superan el valor de indiferencia, y más aún, exceptuando a la componente afectiva hacia la estadística descriptiva, en los demás componentes el primer cuartil está situado en la posición neutral, o por encima de ella. Es decir, nuestros resultados nuevamente sugieren que tanto global como específicamente (por componente) los participantes declaran actitudes principalmente positivas hacia la estadística descriptiva y su enseñanza. Adicionalmente, en la Tabla 2 presentamos el número de respuestas válidas y algunas estadísticas de resumen sobre las puntuaciones en cada componente, sumados los resultados de contrastar formalmente si la puntuación mediana en cada caso es igual a la posición de indiferencia (12 puntos por componentes y 84 en total), por medio de la prueba de rangos de Wilcoxon.

Figura 2

Distribución de las puntuaciones en los diferentes componentes de actitudes



Fuente. Resultados de la investigación

De esta forma, con un nivel de significación de 0,05, rechazamos la hipótesis de que la puntuación mediana en cada caso corresponde a la indiferencia. Más aún, al observar los percentiles calculados, notamos que más del 70% de los participantes asignan puntuaciones superiores o iguales a 12 puntos para todas los componentes y por encima de 95 puntos para la variable AEDE (total). Otro aspecto interesante es que el componente de Valor (VEDE) es aquel con mayor puntuación media y mediana, ambas cercanas a 17 puntos (de un total de 20 puntos posibles), y con menor dispersión, como se observa en la Figura 2. En síntesis, verificamos que las actitudes declaradas por los participantes son positivas, tanto globalmente como hacia los distintos componentes de actitudes consideradas.

Finalmente, en la siguiente sección profundizamos en identificar posibles diferencias actitudinales hacia la estadística descriptiva y su enseñanza según el país de procedencia de los participantes de este estudio, entre España y Chile.

Actitudes según el país de procedencia de los participantes. En esta sección, nos interesamos en comparar los resultados obtenidos según el país de residencia de los participantes. Para ello, dividimos la muestra entre participantes españoles y chilenos, cuyos resultados comenzamos a explorar en la Figura 3, donde presentamos la distribución de las puntuaciones obtenidas en cada componente y total de la EAED, diferenciando entre los grupos establecidos.

Tabla 2

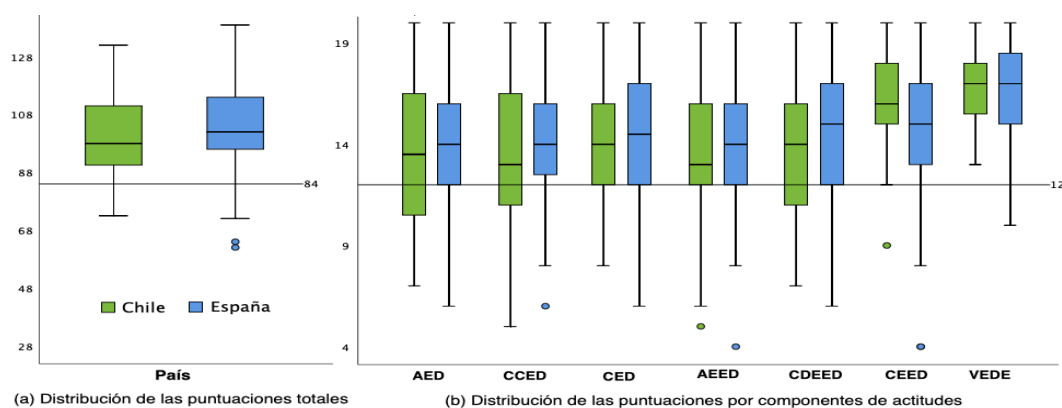
Estadísticas de resumen e las variables analizadas y resultados del test de Wilcoxon

Variable	n	Media	D.E.	Per. 30	Mediana	p-valor
AED	123	13,66	3,24	12	14	0,000*
CCED	119	14,00	3,19	13	14	0,000*
CED	124	14,15	3,31	13	14	0,000*
AEED	123	13,81	3,22	12	14	0,000*
CDEED	123	14,23	3,27	12	15	0,000*
CEED	122	15,33	3,04	14	16	0,000*
VEDE	122	16,55	2,49	15	17	0,000*
AEDE (Total)	105	102,55	16,19	95	102	0,000*

Nota. * representa resultados significativos al 0,05. *Fuente.* Resultados de la investigación

Figura 3

Distribución de las puntuaciones totales (a) y por componente (b) según país



Fuente. Resultados de la investigación

En términos globales (Figura 3a), podemos notar que las puntuaciones medianas, además de superar la posición neutral, son bastante cercanas entre ambos grupos. Sin embargo, al observar los resultados según los distintos componentes de actitudes (Figura 3b) notamos algunas diferencias según el país de los participantes. Por tanto, en la Tabla 3 presentamos algunas estadísticas de resumen de las variables analizadas según país y el p-valor resultante tras contrastar posibles diferencias en la distribución de las puntuaciones obtenidas en la EAEDE para cada grupo por medio de la prueba U de Mann-Whitney. Nuevamente optamos por una opción no paramétrica dados los tamaños muestrales.

A partir de los resultados de la Tabla 3, podemos notar que la diferencia entre la distribución de las puntuaciones declaradas hacia cada variable según país es significativa únicamente para el componente Comportamental hacia la Enseñanza de la Estadística Descriptiva (CEED). Este caso es el único donde la puntuación de los futuros profesores chilenos fue mayor en todos los percentiles reportados (ver Figura 3b), reflejando una disposición más positiva hacia la acción didáctica para enseñar este contenido, en comparación a los participantes españoles.

En los demás casos, no existe evidencia suficiente que respalde diferencias significativas, aun cuando podemos observar que la mayoría de las puntuaciones declaradas por los participantes españoles fueron mayores en la posición de los percentiles presentados en la Tabla 3 (salvo en el Percentil 75 de los componentes AED y CCED donde la situación es mayor en los participantes de Chile).

Tabla 3*Estadísticas de resumen de las variables analizadas y resultados del test U*

Variable	n		Percentil 25		Mediana		Percentil 75		p-valor
	Chile	España	Chile	España	Chile	España	Chile	España	
AED	40	83	10,25	12,00	13,50	14,00	16,75	16,00	0,797
CCED	39	80	11,00	12,25	13,00	14,00	17,00	16,00	0,444
CED	42	82	12,00	12,00	14,00	14,50	16,00	17,00	0,643
AEED	41	82	12,00	12,00	13,00	14,00	16,00	16,00	0,171
CDEED	42	81	10,75	12,00	14,00	15,00	16,00	17,00	0,081
CEED	41	81	15,00	13,00	16,00	15,00	18,00	17,00	0,001*
VEDE	39	83	15,00	15,00	17,00	17,00	18,00	19,00	0,575
AEDE (Total)	35	70	89,00	95,75	98,00	102,00	112,00	114,00	0,262

Nota. * representa resultados significativos al 0,05. *Fuente.* Resultados de la investigación.

Discusión y Reflexiones Finales

En este trabajo hemos expuesto la exploración de las actitudes hacia la estadística descriptiva y su enseñanza en una muestra de 126 futuros profesores de matemática chilenos y españoles, tras la adaptación de la Escala de Actitudes hacia la Estadística Descriptiva y su Enseñanza (EAEDE).

En cuanto a nuestros resultados, respecto a la primera pregunta de investigación *¿Cuáles son las actitudes de los futuros profesores de matemática hacia los contenidos de estadística descriptiva y su enseñanza?*, observamos que en general los participantes declaran tener una actitud positiva en los siete componentes considerados en la escala y en la puntuación total. Esta situación coincide con trabajos previos, donde se reportan actitudes leve o moderadamente positivas (Alvarado et al., 2018; Estrada, 2002; Estrada y Batanero, 2020; Estrada et al., 2018, 2004; Hannigan et al., 2013; Martins et al., 2015; Ruz et al., 2020; Vásquez et al., 2019; Zientek et al., 2011), mientras que son opuestos a aquellos que informan actitudes mayormente negativas (Begg y Edwards, 1999; Onwuegbuzie, 1998). En términos específicos es interesante observar que el ítem 21 (“Me preocupa saber responder preguntas de estadística descriptiva de mis alumnos”) es aquel con menor media y el Ítem 12 (“La estadística descriptiva no sirve para nada”) con mayor. Sin embargo, en ambos casos los ítems están expresados en sentido negativo, por lo que su puntuación fue invertida dentro de los análisis realizados y deben ser interpretados de manera opuesta. De esta forma, en el ítem 21 nuestros participantes sienten preocupación por responder adecuadamente a las preguntas sobre estadística descriptiva que les planteen sus futuros estudiantes. Lo mismo en el caso del ítem 12, donde nuestros futuros profesores se muestran contrarios a la idea de que la estadística descriptiva es inútil. Estos ejemplos refuerzan el claro patrón de los participantes por declarar actitudes positivas hacia la estadística descriptiva y su enseñanza.

En cuanto instrumento utilizado, nuestros resultados suman evidencia de las buenas propiedades psicométricas de la Escala de Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza (EAPE) (Estrada y Batanero, 2020; Estrada et al., 2018) que en este caso fue adaptada para el contenido de estadística descriptiva. Al respecto, la consistencia interna de la nueva versión es adecuada (alfa de Cronbach = 0,899), al igual que la estructura teórica de siete componentes que explican un 65% de la varianza total del modelo factorial propuesto.

Por otro lado, al ubicar nuestros resultados con los reportados por otras investigaciones que han usado la Escala de Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza (EAPE) o alguna adaptación de ella, notamos algunas diferencias. Nuestros participantes declararon actitudes globales hacia la estadística descriptiva levemente menos positivas que otros grupos de profesores de matemática en formación (Alvarado et al., 2018; Ruz et al., 2020) y ejercicio (Alvarado et al., 2018), aunque estos se interesan en el contenido de probabilidad. Mientras que, al cambiar el grupo de participantes, la tendencia ha sido reportar actitudes menos positivas hacia la probabilidad respecto a nuestro caso (hacia la estadística descriptiva), tanto en futuros profesores de primaria españoles (Estrada y Batanero, 2020) como en futuras maestras de educación infantil chilenas (Vásquez et al., 2019). Estas últimas, además, pudieron diferenciar entre dos ejes de contenido, la estadística y la probabilidad, inclinándose más positivamente hacia el caso de la estadística. De esta forma, proyectamos el interrogante de si estas diferencias observadas puntualmente son o no significativas al variar el contenido de estocástica considerado.

En cuanto a la segunda pregunta que orientó esta investigación: *¿Existen diferencias en las actitudes declaradas según el país de residencia de los participantes (España y Chile)?*, pudimos observar que existen diferencias significativas entre ambos grupos de participantes únicamente en el componente comportamental hacia la enseñanza de la estadística descriptiva. Sin embargo, es importante destacar la diferencia entre los tamaños muestrales de ambos grupos, que en el caso de participantes chilenos (42) corresponde a la mitad de los españoles (84), lo que podría dificultar la detección de diferencias significativas, si existieran. En este sentido, respondemos a esta pregunta de investigación desde una perspectiva exploratoria y descriptiva del grupo de sujetos considerados en este estudio. En otras palabras, los participantes chilenos valoran más positivamente la tendencia a la acción didáctica en la enseñanza de los contenidos de descriptiva en comparación al grupo de futuros profesores que residen en España. Además, aun cuando en los demás componentes las diferencias no fueron significativas, las puntuaciones declaradas por los participantes españoles tendieron a ser más positivas (Tabla 3).

Por último, sabiendo que en la práctica los profesores viven mucho más alejados del dominio afectivo en la enseñanza, que de la comprensión de conceptos y procesos y del desarrollo de destrezas en el dominio cognoscitivo (Estrada, 2002), consideramos que el proceso formativo es donde se deben desarrollar y promover aspectos afectivos, idealmente positivos, de manera que no sean un obstáculo futuro para responder satisfactoriamente a las exigencias de su labor profesional. Por tanto, reconocemos que la EAEDE es un instrumento con el cual es posible obtener información sobre este aspecto del dominio afectivo, permitiendo entre otras cosas monitorear la evolución de las actitudes antes y después de la instrucción o su relación con otras variables, como el conocimiento del contenido que, al menos para el caso de la estadística descriptiva, se ha mostrado deficiente en estos profesionales (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020).

Agradecimientos: Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) de Chile mediante una beca de doctorado en el extranjero (Folio 72170025). Proyecto B-SEJ-063-UGR18 del Programa Operativo del Fondo Europeo de Desarrollo Regional (FEDER).

Referencias

- Alvarado, H., Andaur, G. y Estrada, A. (2018). Actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza: un estudio exploratorio con profesores de matemática en formación y en ejercicio de Chile. *Revista Paradigma*, XXXIX(2), 36-64.
- Aparicio, A. y Bazán, J. (2006). Actitud y rendimiento en Estadística en profesores peruanos. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 644-650). México DF: CLAME.
- Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática/estadística en las enseñanzas medias y universitaria. Características y medición*. Bilbao: Mensajero.
- Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de profesores. En *II Encontro de Probabilidade e Estatística na Scola* (pp. 1-23). Braga: Universidade do Minho.
- Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and Probability in High School*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (Eds.). (2011). *Teaching Statistics in school mathematics: Challenges for Teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study*. New York: Springer.
- Begg, A. y Edwards, R. (1999). Teachers' Ideas About Teaching Statistics. En *Proceedings of the 1999 combined Conference of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education*. Melbourne: AARE/NZARE.
- Ben-Zvi, D., Makar, K. y Garfield, J. (Eds.). (2018). *International Handbook of Research in Statistics Education*. Cham: Springer.
- Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística. *Statistics Education Research Journal*, 3(1), 5-28.
- Common Core State Standards Initiative. (2020). *Common Core State Standards for Mathematics*. CCSSI. Recuperado a partir de <http://www.corestandards.org/Math/>

- Eichler, A. y Zapata-Cardona, L. (2016). *Empirical Research in Statistics Education*. Switzerland: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-38968-4_1
- Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado* (Tesis doctoral). Universitat Autònoma de Barcelona.
- Estrada, A. y Batanero, C. (2015). Construcción de una escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza para profesores. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 239-247). Alicante: SEIEM.
- Estrada, A. y Batanero, C. (2020). Prospective Primary School Teachers' Attitudes towards Probability and its Teaching. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(1), 1-14.
- Estrada, A., Batanero, C. y Díaz, C. (2018). Exploring Teachers' Attitudes Towards Probability and Its Teaching. En C. Batanero y E. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics, ICME-13 Monographs* (pp. 313-332). Cham: Springer.
- Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las ciencias*, 22(2), 263-274.
- Estrada, A., Batanero, C. y Lancaster, S. (2011). Teachers' attitudes towards statistics. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 163-174). New York: Springer.
- Franklin, C., Bargagliotti, A., Case, C., Kader, G., Scheaffer, R. y Spangler, D. (2015). *Statistical Education of Teachers (SET)*. American Statistical Association (ASA).
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report. A pre-K-12 curriculum framework*. Alexandria, Virginia: American Statistical Association (ASA).
- Gal, I., Ginsburg, L. y Schau, C. (1997). Monitoring Attitudes and Beliefs in Statistics Education. En I. Gal y J. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37-51). Amsterdam: IOS Press y The ISI.
- Garfield, J. y Ahlgren, A. (1988). Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 44-63.
- Goldin, G. A., Hannula, M., Heyd-Metzuyanim, E., Jansen, A., Kaasila, R., Lutovac, S., ... Zhang, Q. (2016). *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education*. (G. Kaiser, Ed.) (ICME-13). Switzerland: Springer.
- Gómez-Chacón, I. (2000). *Matemática Emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones.
- Groth, R. y Meletiou-Mavrotheris, M. (2018). Research on Statistics Teachers' Cognitive and Affective Characteristics. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 327-355). Cham: Springer.
- Hannigan, A., Gill, O. y Leavy, A. (2013). An investigation of prospective secondary mathematics teachers' conceptual knowledge of and attitudes towards statistics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(6), 427-449.
- Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ª edición). México DF: McGraw-Hill.
- Lloret-Segura, S., Ferreres-Traver, A., Hernández-Baeza, A. y Tomás-Marco, I. (2014). El análisis factorial exploratorio de los ítems: una guía práctica, revisada y actualizada. *Anales de psicología*, 30, 1151-1169.
- Martins, J. A., Estrada, A., Nascimento, M. M. y Comas, C. (2015). Actitudes hacia la Estadística de los Profesores: Un camino a recorrer. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina-Portillo, ... M. López-Marín (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria 2* (pp. 101-107). Granada:

Universidad de Granada.

- Martins, J. A., Nascimento, M. M. y Estrada, A. (2012). Looking back over their shoulders: A qualitative analysis of Portuguese teachers' attitudes towards statistics. *Statistics Education Research Journal*, 11(2), 26-44.
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). Reston, Virginia: NCTM.
- Ministerio de Educación Chile. (2009). *CURRICULUM. Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la Educación Básica y Media*. Santiago: MINEDUC.
- Ministerio de Educación Chile. (2012). *Bases Curriculares Educación Básica*. Santiago: MINEDUC.
- Ministerio de Educación Chile. (2015). *Bases curriculares 7° a 2° medio*. Santiago: MINEDUC.
- Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, (52), 19349-19420.
- Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, (3), 1-35.
- Nasser, F. (2004). Structural Model of the Effects of Cognitive and Affective Factors on the Achievement of Arabic-Speaking Pre-service Teachers in Introductory Statistics. *Journal of Statistics Education*, 12(1).
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.
- Nolan, M. M., Beran, T. y Hecker, K. G. (2012). Surveys assessing students' attitudes toward statistics: A systematic review of validity and reliability. *Statistics Education Research Journal*, 11(2), 103-123.
- Onwuegbuzie, A. J. (1998). Teachers Attitudes toward statistics. *Psychological Reports*, 83, 1008-1010.
- ONU. (2015). *Transformar nuestro mundo: la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible*.
- Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' Beliefs and Affect. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Chalotte, NC: NCTM y Information Age Publishing.
- Roberts, D. M. y Bilderback, E. W. (1980). Reliability and validity of a Statistics Attitude Survey. *Educational and Psychological Measurement*, 40, 235-238.
- Ruz, F., Molina-Portillo, E. y Contreras, J. M. (2020). Evaluación de conocimientos sobre el contenido de estadística descriptiva en futuros profesores de matemáticas. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 18, 55-71.
- Ruz, F., Molina-Portillo, E., Vásquez, C. y Contreras, J. M. (2020). Attitudes towards Probability and its Teaching in prospective mathematics teachers from Chile and Spain. *Acta Scientiae*, 22(2), 48-66.
- Schau, C. (2003). Survey of Attitudes Toward Statistics (SATS-36). Recuperado el 29 de abril de 2019, a partir de <https://www.evaluationandstatistics.com/>
- Schau, C., Stevens, J., Dauphinee, T. y Del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the survey of attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 55(5), 868-875.
- Tishkovskaya, S. y Lancaster, G. A. (2012). Statistical Education in the 21st Century: a Review of Challenges, Teaching Innovations and Strategies for Reform. *Journal of Statistics Education*, 20(2), 1-24.
- Vásquez, C., Alvarado, H. y Ruz, F. (2019). Actitudes de futuras maestras de educación infantil hacia la estadística, la probabilidad y su enseñanza. *Educación Matemática*, 31(3), 177-202.

- Veloo, A. y Chairhany, S. (2013). Fostering students' attitudes and achievement in probability using teams-games-tournaments. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 93, 59-64.
- Wise, S. L. (1985). The development and validation of a scale measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 45, 401-405.
- Zientek, L. R., Carter, T. A., Taylor, J. M. y Capraro, R. M. (2011). Preparing Prospective Teachers: An Examination of Attitudes Toward Statistics. *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education*, 5(1), 25-38.

Anexo

Escala de Actitudes hacia el contenido de Estadística Descriptiva y su enseñanza (EAEDE) para profesores, con resultados del estudio piloto.

Ítem (*ítems invertidos)	n (% del total)	Media	D.E.
1) Me divierto en las clases en las que se explican los contenidos de estadística descriptiva	126 (100)	3.25	1.10
2) Utilizo información sobre estadística descriptiva a la hora de tomar decisiones.	126 (100)	3.34	1.21
*3) Será difícil para mi enseñar los temas de estadística descriptiva.	125 (99.2)	3.62	1.14
4) Los contenidos de estadística descriptiva ayudan a entender el mundo de hoy.	124 (98.4)	3.98	0.89
5) Me gusta la estadística descriptiva, es un tema que siempre me ha interesado.	126 (100)	3.00	1.18
6) Los contenidos sobre estadística descriptiva son fáciles.	125 (99.2)	3.38	1.09
*7) Nunca he usado la estadística descriptiva fuera de un contexto científico.	126 (100)	3.55	1.29
8) Domino los principales contenidos de estadística descriptiva.	123 (97.6)	3.39	1.16
9) Estoy seguro que me gustará enseñar los contenidos de estadística descriptiva en la escuela.	125 (99.2)	3.46	1.10
10) Creo que sabré detectar y corregir errores y dificultades de los alumnos con los temas de estadística descriptiva.	125 (99.2)	3.70	1.02
*11) Solo enseñaré los contenidos de estadística descriptiva si me queda tiempo después de los otros temas.	125 (99.2)	3.78	1.21
*12) La estadística descriptiva no sirve para nada.	126 (100)	4.63	0.74
*13) La estadística descriptiva no tiene tanto valor como otras ramas de la matemática.	125 (99.2)	4.06	1.04
14) Me resultará fácil diseñar actividades de evaluación de la estadística descriptiva.	125 (99.2)	3.18	1.16
15) Uso la estadística descriptiva en la vida cotidiana.	125 (99.2)	3.21	1.12
*16) Me siento intimidado ante datos sobre estadística descriptiva.	124 (98.4)	3.70	1.10
*17) La estadística descriptiva es entendida solo por la gente del área científica.	123 (97.6)	3.81	1.18
*18) Evito leer informaciones donde aparecen términos de estadística descriptiva.	125 (99.2)	4.10	1.06
19) Los conocimientos sobre estadística descriptiva ayudan a los alumnos a razonar críticamente.	125 (99.2)	3.90	0.91
20) Se debería dedicar más tiempo a enseñar estadística descriptiva en los primeros niveles de educación.	126 (100)	3.65	1.11
*21) Me preocupa saber responder preguntas de estadística descriptiva de mis alumnos.	124 (98.4)	2.73	1.34
*22) No me siento preparado para resolver cualquier problema de estadística descriptiva.	125 (99.2)	3.34	1.28

*23) Pienso que no seré capaz de preparar recursos didácticos apropiados para las clases sobre el contenido de estadística descriptiva.	126 (100)	3.70	1.13
24) Cuando sea pertinente, utilizaré la estadística descriptiva en los otros ejes del currículo de matemática que enseñe.	124 (98.4)	3.81	0.91
*25) Si pudiera eliminar alguna materia del currículo de matemática sería la estadística descriptiva.	125 (99.2)	4.07	1.09
*26) No tengo mucho interés en enseñar los temas de estadística descriptiva, aunque aparezcan en el currículo.	126 (100)	3.99	1.16
*27) No me agrada resolver problemas de estadística descriptiva.	125 (99.2)	3.68	1.26
28) Como futuro profesor, creo que me sentiré cómodo al enseñar los contenidos de estadística descriptiva.	126 (100)	3.61	1.02

Introduction

Currently, statistics and probability are considered to be a fundamental knowledge to face effectively the challenges of the 21st century (Batanero & Borovcnik, 2016; Ben-Zvi, Makar, & Garfield, 2018; United Nations, 2015). In effect, the requirements of today's society have reinforced the need for critical educated citizens, or data consumers, to actively participate in debates using arguments based on numerical evidence, promoting the development of a more democratic society (Ben-Zvi & Makar, 2016). The accredited role for probability in the development of critical thinking (Everitt, 1999) and its applicability in different fields of knowledge, has promoted the incorporation of probability into all school grades of mathematics curriculum in many countries (Scheaffer, Watkins, & Landwehr, 1998). Its study from an early age "provides an excellent opportunity to show students how to mathematize, and how to apply mathematics to solve real problems" (Godino, Batanero, & Cañizares, 1997, p.12). As a result, it has required new demands and challenges for teachers in charge of this task. Those requirements involve diverse knowledge, not only at a didactic and disciplinary level, but also in their disposition and interest in the teaching of these topics (Batanero, 2013). However, literature has shown the lack of qualification of teachers and their non-readiness to tackle this work, reflecting a current problem to these professionals (Batanero, Burrill, & Reading, 2011; Groth & Meletiou-Mavrotheris, 2018).

In this context, it is necessary to investigate the possible causes of this situation from an affective perspective, and the present study could contribute to broadening the knowledge on this subject. To this effect, the affective domain is assumed from McLeod's perspective like a "wide range of beliefs, feelings and moods, which are generally considered as more than the pure domain of cognition" (McLeod, 1992, p. 576). The term "affects" is used in a general sense, and emotions, beliefs and attitudes as their main descriptors. In addition, because of the absence of consensus in the field to define attitude (Philipp, 2007), we took the Batanero's perspective in which that notion is considered "a mental construction, no directly observable, it must be inferred from the assessment on a scale of attitudes or the observation of the subjects' behavior" (Batanero, 2009, p. 6).

On the other hand, if a teacher does not value a statistics and probability topic, he feels that he is not prepared to teach it or dislike it, he will not achieve effective teaching to his students (Estrada & Batanero, 2015). For this reason, it is important to give value and reinforce

⁶Ruz, F, Molina-Portillo, E., Vásquez, C. y Contreras, J.M. (2020). Attitudes towards Probability and its Teaching in prospective mathematics teachers from Chile and Spain. *Acta Scientiae*, 22(2), 48-66.

the affective component since teachers' training. This faces a challenge to identify the attitudes of prospective teachers in relation to the topics that should teach, so that, teacher trainers could use this knowledge to promote its improvement during their initial teacher training (Veloo & Chairhany, 2013). In consequence, we examined validity and structure of Attitudes' Scale towards Probability and its Teaching (ASPT) given by Estrada, Batanero, and Díaz (2018) in a sample of 126 prospective Spanish and Chilean mathematics teachers. In what follows, we stated the theoretical background and the methodology used to achieve this goal. Afterwards, we detailed the results obtained, and concluded with the discussion and findings.

Theoretical Background

The framework that supports this study is established on the basis of previous research on attitudes towards statistics, and towards statistics and its teaching; and attitudes towards probability and its teaching.

Previous research on attitudes towards statistics, and towards its teaching.

Attitudes towards statistics have been a topic of growing interest among researchers and statistical educators for more than 70 years (Bendig & Hughes, 1954). This field of research has become a target of educational reform regarding its teaching (Tishkovskaya & Lancaster, 2012). Consequently, a large number of studies emerged that assessed students' attitudes in relation to academic performance and attitudinal changes generated before and after instruction (Carmona, 2004; Nolan, Beran, & Hecker, 2012.)

Among the most common instruments used are: (1) One-dimensional scale, Statistics Attitude Survey (SAS) from Roberts and Bilderback (1980), (2) Two-dimensional scale Attitudes Toward Statistics (ATS) from Wise (1985), (3) The multidimensional scale Attitudes Toward Statistics (EAE, in its Spanish acronym) from Auzmendi (1992), and (4) The Surveys of Attitudes Toward Statistics (SATS-28; Schau, Stevens, Dauphinee, & DeVecchio, 1995; and SATS-36: Schau, 2003) which have an initial structure of four factors (SATS-28), and six at the end (SATS-36). These scales over time have been combined with each other as they share some aspects such as feelings towards the subject, their professional utility and personal value, as well as cognitive competence, self-confidence, and perceived difficulty towards statistics.

Despite the lack of research on the attitudes of teachers (both pre-service and in-service teachers) towards statistics and its teaching (Estrada, Batanero, & Lancaster, 2011; Groth & Meletiou-Mavrotheris, 2018), two main trends can be identified: (1) The use of an instrument

mentioned above (as ATS in Onwuegbuzie, 1998; SATS-28 in Estrada, 2002; Nasser, 2004; SATS-36 in Hannigan, Gill, & Leavy, 2013; Zientek, Carter, Taylor, & Capraro, 2011), or (2) to propose a new one which also considers the attitudes toward teaching of the subject, such as the scale called Attitudes Toward Statistics and its teaching (EAEE in its Spanish acronym) from Estrada (2002). The EAEE scale has been used in many countries like Spain (Estrada, Batanero, & Fortuny, 2004), Portugal (Martins, Estrada, Nascimento, & Comas, 2015), and Perú (Aparicio & Bazán, 2006). Years later, Estrada et al. (2018) propose an evolution of the EAEE scale applied to probability, called Attitudes' Scale towards Probability and its Teaching (ASPT). However, in the next section this scale will be explored, since it was the main theoretical support of the instrument used in this study.

Onwuegbuzie (1998) applied ATS scale on 222 American teachers. The findings reported relatively less positive attitudes than others researches carried up to that point. Nasser's (2004) work, which applied SATS-28 on 162 prospective teachers from Israel, reported weak correlations (from 0.11 to 0.28) between performance and scores according to each component of the scale. Estrada (2002), applied a Spanish translated version of SATS-28 scale on 367 prospective Spanish teachers. The results showed a generally positive attitude but low correlations (0.09 - 0.26) between the scores in the scale and some questions of the Statistical Reasoning Assessment test of Garfield (2003). Zientek et al. (2011) evaluated the effect of attitudes on the performance of 95 prospective American primary school teachers through SATS-36 scale. Their study showed correlations between moderate (0.492 in the affective component) and low (0.142 in the difficulty component). Making use of the same instrument (SATS-36), Hannigan et al. (2013) analyzed the relationship between attitudes and conceptual statistics understanding in 104 future Irish secondary school mathematics teachers. Low correlations (-0.02 - 0.19) were found among the score obtained in the Comprehensive Assessment of Outcomes in Statistics test (DelMas, Garfield, Oms, & Chance, 2007) and the scale.

Several authors propose new approaches to study teachers' affective aspect in statistics education. Begg and Edwards (1999) analyzed the attitudes and beliefs about statistics teaching in 34 primary school prospective teachers through personal interviews, measurement scales and concept maps. Their findings revealed negative attitudes of the participants toward statistics, who preferred teaching old topics, which they considered to be safe, rather than the new ones proposed by the program, such as probability and the use of technology. Estrada (2002) developed the EAEE scale for teachers. This scale includes 25 items considering the interaction between six components. These components are organized according to (1) anthropological and (2) pedagogical aspects. The anthropological aspects are related to the

usefulness of statistics, its training and multidisciplinary. It includes components such as: (1.1) social (perception of the value of statistic in society); (1.2) educational (the interest in learning and teaching statistics), and (1.3) instrumental (the perception of the usefulness of the statistics in other areas). The pedagogical aspects comprise three traditional components as: (2.1) affective (personal feelings about statistics); (2.2) cognitive (conceptions and beliefs about learning statistics), and (2.3) behavioral (tendency to use statistics).

In this context, Estrada et al. (2004) applied the EAEE scale in 140 Spanish teachers (66 in-service and 74 pre-service). Their work indicated a positive global attitude, as same as in the other components of the scale. Aparicio and Bazán (2006) used the EAEE scale to assess the relationship between attitude and performance of 87 Peruvian teachers at the beginning and end of a professional development program. The authors highlight that the course increased teachers' attitudes, and a positive correlation (from 0.07 at the beginning and up to 0.22 at the end) was found between the score in the scale and the performance in the program. Martins, Estrada, Nascimento and Comas's (2015) analysis of the attitudes of 1098 Portuguese teachers from 1st and 2nd stage in primary school revealed a slightly positive general attitude.

Previous studies related to attitudes towards Probability and its teaching. To promote a positive attitude among teachers is a shared challenge for the teaching of statistics today (Tishkovskaya & Lancaster, 2012). Because students' attitude is one of the main factors to learn about a subject, teachers' trainers need to identify the prospective teachers' attitudes in relation to the subject they will teach. They also need to use that knowledge to promote the improvement of those attitudes (Veloo & Chairhany, 2013). Consequently, we are interested in obtaining information about the attitudes towards probability and its teaching, through the ASPT scale (Estrada & Batanero, 2015; Estrada et al. 2018). This scale considers seven components, grouped into three dimensions:

1. Components towards Probability: Appreciation, cognitive perception, and tendency to action towards probability. It considers three components:
 - 1.1 Affective component towards Probability (AP): Subject's feelings, positive or negative, towards probability content.
 - 1.2 Cognitive Competence towards Probability (CCP): Self-perception of the intellectual capacity towards probability content.
 - 1.3 Behavioral component towards Probability (BP): Tendency to use probability tools when appropriate.

2. Components towards didactic aspects of Probability: Appreciation, perception of didactic capacity and tendency to action towards the teaching of probability. It considers three components:
 - 2.1 Affective component towards Teaching probability (AT): Personal feelings, positive or negative, towards the teaching of probability content.
 - 2.2 Didactic Competence towards Teaching probability (CT): Prospective teachers' perception of their own ability to teach the probability content.
 - 2.3 Behavioral component towards Teaching probability (BT): Asses tendency to didactic action in the teaching of probability content.
3. Appreciate the content and its teaching component: Appreciation towards the content and teaching of probability, which considers one component:
 - 3.1 Value towards Probability and its Teaching (VPT): The value, usefulness and relevance that the teacher gives about probability content in personal and professional life.

This scale was applied by Estrada et al. (2018) on 232 Spanish primary school prospective teachers. An average score of 102.6 points out of a possible range between 28 and 140 points was obtained, thus indicating a mostly positive attitude. Also, they provided evidence of adequate reliability (Cronbach's alpha of 0.892) and a structure of seven factors that explained 67.99% of the variance of the model. In the same way, Alvarado, Andaur, and Estrada (2018) explored the attitudes of 70 in-service and 51 pre-service Chilean mathematics teachers towards probability and its teaching. They concluded a positive attitude in both groups, although slightly better with in-service teachers than pre-service teachers. Meanwhile, Vásquez, Alvarado, and Ruz (2019) analyzed the attitudes of 124 prospective Chilean elementary teachers towards statistics and probability, and its teaching. Results showed that the attitudes towards statistics and its teaching were slightly better than the ones towards probability.

The present study aims to examined the validity and reliability of ASPT scale, and also increase the results of previous research providing information about this aspect (attitudes) of the affective domain. For this sake, a sample of prospective mathematics teachers from Chile and Spain was selected. Their selection was justified by the fact that the school curriculum of both countries (Ministry of Education Chile 2009; 2015; and Ministry of Education, Culture and Sports Spain 2014; 2015) emphasize the need to deepen into the probability study. Indeed, their curriculums include topics like the modelling of random phenomena through probability distributions and concluding with an introduction to statistical inference.

Methodology

This research is carried out under the quantitative paradigm with a descriptive scope (Hernández, Fernández, & Baptista, 2014) because we started from a previous instrument (ASPT scale), and we have specific background of its implementation.

The study was conducted in a non-probabilistic *sample* of 126 prospective mathematics teachers, who were organized into two groups according to their country of residence (Spain and Chile). The first group (G1) consisted of 84 prospective Spanish teachers (35 women and 49 men aged between 21 and 50 years old). They held a Master's degree in compulsory secondary and bachelor education from a Spanish university. The second group (G2) included 42 prospective teachers from a Chilean university (21 women and 21 men aged between 19 and 38 years old). All participants have taken all probability courses scheduled in their initial training. In addition, implementation took place in a special session in the middle of second semester of 2018, where all participants had voluntarily and individually completed the scale.

The *instrument* used was ASPT Scale for teachers (Estrada et al. 2018) as shown in Appendix 1. For each of the seven components, participants had to answer four questions: two in affirmative and two in negative sense. In total, 28 items were provided. A five-step Likert scale was used, moving from Strongly Disagree (1), to Strongly Agree (5) with a midpoint which expressed Indifference (3). The scores obtained in those items with negative sense (marked with * in Appendix 1) were reversed. This allowed us to define a series of variables as a result of the sum between the different items of each component, and the total score (see Table 1).

Table 1

Variables analyzed according to ASPT components

Component	Total items	Range
Affective towards Probability (AP)	1, 5, 16, 27	4 – 20
Cognitive Competence towards Probability (CCP)	6, 8, 17, 22	4 – 20
Behavioral towards Probability (BP)	2, 7, 15, 18	4 – 20
Affective towards the Teaching of Probability (AT)	9, 21, 26, 28	4 – 20
Didactic Competence towards the Teaching of Probability (CT)	3, 10, 14, 23	4 – 20
Behavioral towards the Teaching of Probability (BT)	11, 20, 24, 25	4 – 20
Value towards Probability and its teaching (VPT)	4, 12, 13, 19	4 – 20
Attitudes towards Probability and its Teaching (APT)	All	28 – 140

Source: Own elaboration.

Given the quantitative nature of previous variables, we started analyzing the total score (APT variable) in the global sample. On this basis, we provided detailed information about internal consistency (instrument reliability) and construct validity as a result of a factor analysis. For reliability, the Cronbach's alpha coefficient was used as an indicator that the scale produced the same results each time it was administrated to the same person in similar conditions. The closer the value is to 1, the higher its internal consistency will be. The Factor Analysis was Exploratory (EFA) (Morales, 2013; Lloret-Segura, Ferreres-Traver, Hernández-Baeza, & Tomás-Marco, 2014). Finally, we carried out a descriptive study of the different components, identifying if results tended towards a positive, negative or neutral (indifferent) attitude, and analyzing if there are significant differences between sampling groups scores. Statistical significance was set at $p < 0.01$.

Results and Analysis

Validity and reliability. On the overall results, average scores per item ranged from 2.67 (item 21) to 4.64 (item 12) points (Appendix 1). In all cases, 96.8% of responses were exceeded with respect to the total sample. However, to analyze the total score (APT), we only considered those cases where no answer was omitted, which corresponded to 102 of the total. These results ranged from 62 to 140 points with an average of 104.39 points and a standard deviation of 14.67 points. The mean score was higher than 84 points (indifference state because in all cases option 3 was chosen), which generally implies a positive attitude towards probability and its teaching. Regarding reliability, we obtained a Cronbach's alpha of 0.879. This value is considered more than adequate (Pedhazur & Pedhazur, 1991). Table 2 shows Alpha values for each variable defined in Table 1, and the number of valid answers. The values oscillate between usual ranges for this type of studies (Carmona, 2004; Nolan et al., 2012), although slightly lower for the component of cognitive competence towards probability (CCP).

Table 2

Cronbach's Alpha for the analyzed variables

Measure	AP	CCP	BP	AT	CT	BT	VPT
n	123	119	121	123	120	120	120
Alpha	0.605	0.446	0.602	0.622	0.736	0.689	0.725

Source: Own elaboration.

Subsequently, the Bartlett's sphericity test was applied, obtaining a p-value of 0.000 (Chi-square approximate 1251.01). This allowed rejecting the null hypothesis which stipulated that the correlation matrix is the identity, i.e. the items of the scale are correlated with each other. In this way, we calculated Kaiser-Meyer-Olkin (KMO) sampling adequacy measure to determine the degree of joint relationship between the questions. The value of 0.753 was obtained, which suggests the suitability of the Exploratory Factor Analysis carried out [EFA] (Morales, 2013; Lloret-Segura et al. 2014).

The EFA was carried out using the unweighted minimum squared method because the scores of each item were not normally distributed. The results showed that seven factors explained 63.67% of the total variance of the model. Although it is not a usual topic of an exploratory analysis, we wanted to provide information on the Item-Factor relationship from a correlation coefficient between them. In addition, to have a better understanding of the results, we decided to work with the rotated matrix components using the varimax criteria. In simple words, this latter consists of maximizing the variance of the coefficients that define the effects of each factor in the analyzed items (see Appendix 2). In Table 3, we synthesized the four items with the highest correlation within every factor, and sorted them in descending order of magnitude. In addition, we included a third column about theoretical components to which each one of them belongs.

From the previous results, we associated the first factor with AP component, and grouped three of the four items which were considered theoretical in it. The same happened with the second, fourth, and sixth factor in relation to the CT, BP, and CCP components, respectively. However, the third and seventh factors are not grouped mostly in some component. The fifth was related to the behavioral (BT) and value (VPT) components towards teaching probability.

Table 3

Items with the highest correlation for each factor

Factor	Items with greater proportion	Theoretical classification of the items
1	5, 1, 26, 27	AP = 1, 5, 27; AT = 26
2	14, 23, 22, 3	CT = 3, 14, 23; CCP = 22
3	17, 13, 25, 19	VPT = 13, 19; CCP = 17; BT = 25
4	15, 2, 7, 4	BP = 2, 7, 15; VPT = 4
5	24, 4, 19, 20	VPT = 4, 19; BT = 20, 24
6	8, 6, 10, 22	CCP = 6, 8, 22; CT = 10
7	18, 16, 12, 5	AP = 5, 16; VPT = 12; BP = 18

Source: Own elaboration.

Furthermore, we classified items 4, 5, 19, and 22 in more than one factor, and left items 9, 11, 21, and 28 unassigned. When we delve into the results for each one, we observed that items 9 and 11 were correlated in greater extent with factor 1, while those in the 21st and 28th positions were correlated with factor 2. In other words, they were mainly related to affective aspects toward probability (AP), and the pedagogical principles (didactics) toward its teaching (CT). This supports the initial grading in the affective component towards the teaching of probability (AT). The resulting factor do not group the four items for each proposed theoretical component, but rather reflect relationship among them. As Estrada et al. (2018), we recognize the need to collect more data to verify the validity of the initially proposed seven-factor model.

Subsequently, we grouped the results according to the variables defined in Table 1, and we computed the correlation coefficient between them. Results are shown in Table 4. It is worth mentioning that we completed only the upper triangular matrix of correlations. This was made on purpose to avoid having overloaded information in the table because it was symmetrical.

In general, we can notice that all previous correlations were significant. Related variables with the affective component toward probability (AP) and its teaching (AT) were those with the greatest influence on the total score (APT). While the strength of the relationship was less towards the value component (VPT). However, we note as considerable the association between the seven components of the ASPT scale, and their total score (APT). For the others, we can conclude that the affective component towards teaching probability (AT) correlates mostly with the affective components towards the content (AP) and the didactic competence towards its teaching (CT), with a weak interaction between the BP-AT, CT-BT, and CCP-VPT components (all less than 0.3).

Table 4

Pearson's correlation between the different components of attitudes

Variable	AP	CCP	BP	AT	CT	BT	VPT	APT
AP	1	0.411*	0.393*	0.663*	0.412*	0.482*	0.310*	0.767*
CCP		1	0.351*	0.547*	0.565*	0.314*	0.285*	0.679*
BP			1	0.286*	0.342*	0.417*	0.475*	0.628*
AT				1	0.655*	0.439*	0.366*	0.819*
CT					1	0.267*	0.337*	0.713*
BT						1	0.544*	0.669*
VPT							1	0.609*
APT								1

Note. * It represents significant correlations to 0.01; *Source.* Own elaboration.

Attitudes of the participants. In what follows, we evaluated if there were differences between results obtained according to each component, and the theoretical value of indifference (12 points of having answered 3 in the four items for each component, or 84 in the total score). We also studied whether or not there were differences according to both sampling groups (G1 and G2). In Table 5, we present the average score and standard deviation of each component, along with the results of contrasting the normality assumption by the Kolmogorov Smirnov test (KS).

Based on the results, normality assumption was rejected only for the VPT variable. Consequently, nonparametric procedures were used for its analysis. Later, delving into those variables with normal behavior, we present in Table 6 the T-test results for independent samples which compare if differences between each average score and the indifference position (12 points for each component and 84 for the total) were equal to zero. For each case, 95% confidence interval (CI) are shown intended to investigate its tendency. With a significance level of 0.01, we reject the null hypothesis that the mean score in each case corresponds to indifference. Moreover, when observing confidence intervals for the mean differences, we note that in all of them their lower limit is greater than 2 in each component and greater than 17 in the total score. We conclude that the participants of this study expressed mostly positive attitudes towards probability and its teaching, at least in the analyzed variables.

Table 5

Summary statistics of analyzed variables

Variable	n	Statistics		KS Test	
		Average	D.E.	Statistic Z of KS	p-value
AP	123	14.18	3.18	0.875	0.428
CCP	119	13.87	2.74	1.207	0.108
BP	121	14.87	3.01	1.238	0.093
AT	123	14.05	3.16	1.126	0.158
CT	120	14.35	3.25	1.417	0.036
BT	120	15.56	3.02	1.130	0.156
VPT	120	16.62	2.63	2.279	0.000*
APT (Total)	102	104.39	14.67	0.688	0.731

Note. *It represents significant results to 0.01

Table 6*Contrasts and Intervals regarding the indifference position in normal variables*

Variable	T Test independent samples		CI (95%) for differences	
	Statistic	p-value	Lower	Higher
AP	7.610	0.000*	1.612	2.746
CCP	7.427	0.000*	1.368	2.363
BP	10.477	0.000*	2.326	3.410
AT	7.198	0.000*	1.485	2.612
CT	7.926	0.000*	1.763	2.937
BT	12.894	0.000*	3.012	4.105
APT (Total)	14.038	0.000*	17.511	23.274

Note. *It represents significant results to 0.01

On the other hand, with respect to the one where the normality assumption fails, in Table 7 we present some summary statistics along with the results of comparing if the median score is equal to 12 points through the Wilcoxon rank test.

Therefore, with a significance of 0.01, we reject the null hypothesis that the median scores of the VPT variable was equal to 12 points. In addition, when we observed percentiles, we noticed that more than 75% of the participants assigned scores over 15 points for the VPT variable (see percentile 25 in Table 7), which, as in the previous case, allows us to conclude that the attitudes declared, in this case, were mostly positive too.

Finally, we studied whether or not there were differences between the analyzed variables of both sample groups (G1 and G2). Therefore, given the sample sizes of each group, we used the nonparametric Mann Whitney U test for independent samples to test whether the distribution of the scores obtained in each variable was the same in both groups. We rejected the null hypothesis only for the BT component, and in the other cases we observed non-significant differences.

Table 7*Contrasts and statistics regarding non-normal variable indifference*

Variable	Wilcoxon Test		Percentiles		
	Null Hip.	p-value	25	50	75
VPT	The median of VPT is equal to 12	0.000	15	17	18.75

Note. *It represents significant results to 0.01

Discussion

This study explored attitudes towards probability and its teaching in a sample of 126 prospective mathematics teachers from Chile and Spain. In this regard, participants generally declared to have a significantly positive attitude in the seven components of the Attitudes' Scale towards Probability and its Teaching (ASPT). Same with in the total average score, who distances more than 17 points on average from the theoretical value of indifference (Table 7). This situation is consistent with previous studies where mild or moderately positive attitudes towards statistics or probability are reported (Estrada, 2002; Estrada et al. 2004; Hannigan et al., 2013; Martins et al., 2015; Zientek et al., 2011; Alvarado et al., 2018; Vásquez et al., 2019). However, these studies are opposed to the ones of Begg & Edward (1999) and Onwuegbuzie (1998) which report mostly negative attitudes of in-service and pre-service teachers. In specific terms, it is interesting to note that item 21 ("I am concerned about answering questions about probability of my students") is the one with the lowest average, and item 12 ("Probability is useless") is the one with the greatest. However, in both cases the items are expressed in a negative sense. Then, in item 21 our participants do feel worried about adequately addressing questions about probability of their students. The same with item 12, where our prospective teachers highlight the usefulness of probability.

Despite the fact that there is a clear tendency to declare positive attitudes towards the content and its teaching, we are concerned that content knowledge about probability is still insufficient for these prospective teachers (Ruz, Molina-Portillo, Contreras, in press). Therefore, an interesting projection would be to deepen the reasons why they have such a positive attitude towards probability and its teaching, even when their content knowledge is poor, as it was analyzed by Martins et al. (2012) with Portuguese teachers.

Regarding the characteristics of the analyzed instrument, we highlight an adequate internal consistency (Cronbach's $\alpha = 0.879$) and a structure with seven factors that explain 63.67% of the total variance of the factorial model. Likewise, four of these factors correlated in greater magnitude with the items of the Affective components (AP, factor 1), Cognitive Competence (CCP, factor 7) and Behavioral components towards the content (BP, factor 4), as well as the Didactic Competence towards teaching probability (CT, factor 2). Regarding the other three factors, we observed in one of them (factor 5) a greater interaction between the items of the components Behavior (BP) and Value towards the content and its Teaching (VPT). However, there is no clear information of the remaining two. In synthesis, we can notice that results did not directly group the four items for each proposed theoretical component, but reflected relationships between them. Thus, we agree with Estrada et al. (2018), because this

study had a modest sample size, we accept that we have to gather more observations to check the validity of the seven factors model, originally proposed. Yet, we appreciate the presentation of these results as we expect that they will be a reference for an upcoming implementation. Therefore, we conclude that exploration work must be continued in order to confirm a factorial structure of the scale which we project as a challenge for its future application.

Finally, we consider that the ASPT scale is an instrument with good characteristics with which it is possible to explore aspects of the affective domain, as attitudes, in teachers. This would allow, among other things, to monitor the evolution of attitudes before and after the instruction, or to relate them with other variables such as content knowledge.

References

- Alvarado, H., Andaur, G., & Estrada, A. (2018). Actitudes hacia la Probabilidad y su enseñanza: un estudio exploratorio con profesores de Matemática en formación y ejercicio de Chile [Attitudes towards Probability and its Teaching: An exploratory study with Chilean mathematics teachers in training and exercise]. *Revista Paradigma*. 39 (2), 36-64.
- Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños. ¿Qué podemos aprender de la investigación? [Understanding of Probability in children. What can we learn from research?]. In J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho, & F. Viseu, (Eds.) *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga: Centro de Investigação em Educação. Universidade Do Minho.
- Aparicio, A., & Bazán, J. (2006). Actitud y rendimiento en Estadística en profesores peruanos [Attitude and performance in Statistics in Peruvian teachers]. In G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 644–650). México DF: CLAME.
- Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática/estadística en las enseñanzas medias y universitaria. Características y medición* [Attitudes towards mathematics/statistics in middle and tertiary education. Features and measurement]. Bilbao: Mensajero.
- Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de profesores [Challenges for Statistical teacher training]. *II Encontro de Probabilidade e Estatística na Escola* (pp. 1–23). Braga: Universidade do Minho.
- Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and Probability in High School*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (Eds.). (2011). *Teaching Statistics in school mathematics: Challenges for Teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study*. New York: Springer.
- Begg, A., & Edwards, R. (1999). Teachers' Ideas About Teaching Statistics. In *Proceedings of the 1999 combined Conference of the Australian Association for Research in Education and the New Zealand Association for Research in Education*. Melbourne: AARE/NZARE.
- Ben-Zvi, D., & Makar, K. (2016). International Perspectives on the Teaching and Learning of Statistics. In D. Ben-Zvi, & K. Makar, *The Teaching and Learning of Statistics* (pp. 1-10). Cham: Springer.
- Ben-Zvi, D., Makar, K., & Garfield, J. (Eds.). (2018). *International Handbook of Research in Statistics Education*. Cham: Springer.
- Bendig, A., & Hughes, J. (1954). Student attitude and achievement in a course in introductory statistics. *Journal of Educational Psychology*, 45(5), 268–276.

- Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística [A review of evidence on reliability and validity of attitude and anxiety questionnaires towards statistics]. *Statistics Education Research Journal*, 3(1), 5–28.
- DelMas, R., Garfield, J., Ooms, A., & Chance, B. (2007). Assessing Students' Conceptual Understanding after a First Course in Statistics. *Statistics Education Research Journal*, 6(2), 28–58.
- Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado* [Analysis of attitudes and elementary statistical knowledge in teacher training] (Doctoral Thesis). Universitat Autònoma de Barcelona.
- Estrada, A., & Batanero, C. (2015). Construcción de una escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza para profesores [Building an Attitudes towards Probability and its Teaching Scale for Teachers]. In C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 239–247). Alicante: SEIEM.
- Estrada, A., Batanero, C., & Díaz, C. (2018). Exploring Teachers' Attitudes Towards Probability and Its Teaching. En C. Batanero y E. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics, ICME-13 Monographs* (pp. 313–332). Cham: Springer.
- Estrada, A., Batanero, C., & Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio [A comparative study of attitudes towards statistics in teachers and prospective teachers]. *Enseñanza de las ciencias*, 22(2), 263–274.
- Estrada, A., Batanero, C., & Lancaster, S. (2011). Teachers' attitudes towards statistics. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 163–174). New York: Springer.
- Everitt, B. S. (1999). *Chance rules: An informal guide to probability, risk, and statistics*. New York: Copernicus Springer-Verlag.
- Garfield, J., & Ahlgren, A. (1988). Difficulties in Learning Basic Concepts in Probability and Statistics: Implications for Research. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(1), 44–63.
- Garfield, J. (2003). Assessing Statistical Reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 2(1), 22–38.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Cañizares, M. J. (1997). *Azar y Probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares* [Chance and probability: Educational foundations and curricular proposals]. Madrid: Síntesis.
- Groth, R., & Meletiou-Mavrotheris, M. (2018). Research on Statistics Teachers' Cognitive and Affective Characteristics. In D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 327–355). Cham: Springer.
- Hannigan, A., Gill, O., & Leavy, A. (2013). An investigation of prospective secondary mathematics teachers' conceptual knowledge of and attitudes towards statistics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(6), 427–449.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* [Investigation Methodology]. México DF: McGraw-Hill.
- J. Pedhazur, E., & Pedhazur, L. (1991). *Measurement, Design, and Analysis*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Inc.
- Lloret-Segura, S., Ferreres-Traver, A., Hernández-Baeza, A., & Tomás-Marco, I. (2014). El análisis factorial exploratorio de los ítems: una guía práctica, revisada y actualizada. *Anales de psicología*, 30, 1151–1169.
- Martins, J. A., Estrada, A., Nascimento, M. M., & Comas, C. (2015). Actitudes hacia la Estadística de los Profesores: Un camino a recorrer [Teachers' Attitudes towards Statistics: A way to go]. In J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina-Portillo, ... M. López-Marín (Eds.), *Didáctica de la Estadística*,

- Probabilidad y Combinatoria 2* (pp. 101–107). Granada: University of Granada.
- Martins, J. A., Nascimento, M. M., & Estrada, A. (2012). Looking back over their shoulders: A qualitative analysis of Portuguese teachers' attitudes towards statistics. *Statistics Education Research Journal*, 11(2), 26–44.
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575–596). Reston, Virginia: NCTM.
- Ministerio de Educación Chile. (2009). *CURRICULUM. Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la Educación Básica y Media* [Curriculum. Fundamental objectives and mandatory minimum contents of Basic and Middle Education]. Santiago: MINEDUC.
- Ministerio de Educación Chile. (2015). *Bases curriculares 7° a 2° medio* [7 to 10 grade curricular bases]. Santiago: MINEDUC.
- Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria [Royal Decree 126/2014, of February 28, which establishes the basic curriculum of Primary Education]. *Boletín Oficial del Estado*, (52), 19349–19420.
- Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato [Royal Decree 1105/2014, of December 26, which establishes the basic curriculum of compulsory Secondary Education and Baccalaureate]. *Boletín Oficial del Estado*, (3), 1–35.
- Morales, P. (2013). El Análisis Factorial en la construcción e interpretación de tests, escalas y cuestionarios [Factor Analysis in the construction and interpretation of test, scales and questionnaires]. *Universidad Pontificia de Comillas*, 46.
- Nasser, F. (2004). Structural Model of the Effects of Cognitive and Affective Factors on the Achievement of Arabic-Speaking Pre-service Teachers in Introductory Statistics. *Journal of Statistics Education*, 12(1).
- Nolan, M. M., Beran, T., & Hecker, K. G. (2012). Surveys assessing students' attitudes toward statistics: A systematic review of validity and reliability. *Statistics Education Research Journal*, 11(2), 103–123.
- Onwuegbuzie, A. J. (1998). Teachers Attitudes toward statistics. *Psychological Reports*, 83, 1008–1010.
- Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' Beliefs and Affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–315). Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing.
- Roberts, D. M., & Bilderback, E. W. (1980). Reliability and validity of a Statistics Attitude Survey. *Educational and Psychological Measurement*, 40, 235–238.
- Ruz, F., Molina-Portillo, E., & Contreras, J. M. (in press). Exploring probability content knowledge in prospective mathematics teachers. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa (BEIO)*.
- Schau, C., Stevens, J., Dauphinee, T., & Del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the survey of attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 55(5), 868–875.
- Scheaffer, R. L., Watkins, A. E., & Landwehr, J. M. (1998). What every high-school graduate should know about statistics. In S. P. Lajoie (Ed.), *Reflections on statistics: Learning, teaching and assessment in Grades K-12* (pp. 3-31). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Tishkovskaya, S., & Lancaster, G. A. (2012). Statistical Education in the 21st Century: a Review of Challenges, Teaching Innovations and Strategies for Reform. *Journal of Statistics Education*, 20(2), 1–24.
- United Nations. (2015). *Transforming our world: The 2030 Agenda for Sustainable Development*. UN.

- Vásquez, C., Alvarado, H., & Ruz, F. (2019). Actitudes de futuras maestras de educación infantil hacia la estadística, la probabilidad y su enseñanza [Attitudes of future teachers of childhood education towards statistics, probability and its teaching]. *Educación Matemática*, 31(3), 177-202.
- Veloo, A., & Chairhany, S. (2013). Fostering students' attitudes and achievement in probability using teams-games-tournaments. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 93, 59–64.
- Wise, S. L. (1985). The development and validation of a scale measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 45, 401–405.
- Zientek, L. R., Carter, T. A., Taylor, J. M., & Capraro, R. M. (2011). Preparing Prospective Teachers: An Examination of Attitudes Toward Statistics. *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education*, 5(1), 25–38.

Appendix 1

Attitudes' Scale towards Probability and its Teaching (ASPT scale) for teachers and analyzed sample outcomes.

Item	n (% total)	Mean	S.D.
1. I enjoy classes where probability contents are explained.	126 (100)	3.41	1.12
2. I use information about probability when making decisions.	125 (99.2)	3.69	1.14
*3. It will be difficult for me to teach probability lessons.	125 (99.2)	3.54	1.13
4. Probability contents help to understand today's world.	125 (99.2)	3.94	0.89
5. I like probability, it is a topic that has always interested me.	125 (99.2)	3.31	1.27
6. Probability contents are easy.	125 (99.2)	3.22	1.03
*7. I have never used probabilities outside a scientific context.	124 (98.4)	3.57	1.24
8. I master the main probability contents.	122 (96.8)	3.51	1.03
9. I am sure that I would like to teach probability content in school.	126 (100)	3.53	1.14
10. I think I will know how to detect and correct mistakes and difficulties of students about probability subject.	123 (97.6)	3.71	1.04
*11. I will only teach probability content if I have time left after the other topics.	126 (100)	3.87	1.18
*12. Probability is useless.	124 (98.4)	4.64	0.74
*13. Probability is not as valuable as other mathematics areas.	124 (98.4)	4.11	1.02
14. It will be easy for me to design probability assessment activities.	124 (98.4)	3.27	1.14
15. I use probability in daily life.	124 (98.4)	3.47	1.06
*16. I feel intimidated by probability data.	125 (99.2)	3.79	1.08
*17. Probability is understood only by scientists.	124 (98.4)	3.81	1.17
*18. I avoid reading information where probability terms appear.	125 (99.2)	4.19	0.99
19. Probability knowledge helps students to reason critically.	125 (99.2)	3.94	0.88
20. More time should be devoted to teaching probability in the first levels of education.	126 (100)	3.64	1.05
*21. I am concerned about knowing to answer my student's probability questions.	123 (97.6)	2.67	1.34
*22. I don't feel ready to solve any probability problem.	125 (99.2)	3.29	1.25
*23. I think I will not be able to prepare teaching resources for probability content lessons.	125 (99.2)	3.78	1.04
24. When appropriate, I will use probability in the others mathematics curriculum areas.	123 (97.6)	3.89	0.86
*25. If I could eliminate any subject from the mathematics curriculum it would be probability.	123 (97.6)	4.15	1.10
*26. I have no interest in teaching probability content, even if they appear in the curriculum.	126 (100)	4.05	1.12
*27. I don't like solving probability problems.	125 (99.2)	3.65	1.23
28. As a future teacher, I think I will feel comfortable teaching probability content.	126 (100)	3.77	0.99

Appendix 2*Varimax rotated factor matrix for the 7-factor model*

Item	Factor						
	1	2	3	4	5	6	7
1	0.785	-0.024	0.017	0.039	0.031	0.021	-0.174
2	0.276	0.163	-0.136	0.706	0.294	-0.049	0.047
3	0.127	0.629	0.099	-0.137	0.366	0.156	0.122
4	-0.009	0.039	0.299	0.447	0.517	-0.090	0.067
5	0.808	-0.019	-0.137	0.094	0.067	-0.027	0.241
6	0.090	0.199	-0.100	-0.101	0.229	0.640	0.048
7	-0.077	0.089	0.298	0.674	-0.167	0.076	0.102
8	0.204	0.285	0.056	0.201	0.065	0.735	0.056
9	0.616	0.515	0.111	-0.144	0.248	0.148	-0.040
10	0.231	0.603	0.029	0.116	-0.044	0.409	-0.037
11	0.549	0.133	0.335	0.159	0.034	0.085	0.097
12	0.196	0.306	0.428	0.074	0.221	-0.360	0.322
13	0.087	0.024	0.699	0.020	0.284	-0.122	0.150
14	0.257	0.735	0.012	0.192	0.051	-0.201	0.039
15	0.259	0.052	0.025	0.800	0.165	0.083	0.019
16	-0.117	0.368	0.098	-0.012	0.046	0.104	0.760
17	0.023	0.034	0.732	0.029	-0.232	0.006	0.019
18	0.147	0.067	0.097	0.128	-0.013	0.013	0.831
19	0.166	0.090	0.466	0.274	0.426	0.105	-0.022
20	0.418	-0.367	0.246	0.097	0.394	0.302	0.239
21	-0.190	0.535	-0.032	0.040	0.013	0.251	0.103
22	0.111	0.645	0.112	0.117	-0.207	0.348	0.152
23	0.031	0.663	0.016	0.119	-0.018	0.001	0.202
24	0.110	0.056	-0.057	0.082	0.725	0.168	-0.015
25	0.542	-0.064	0.641	0.105	0.066	0.102	0.042
26	0.755	0.232	0.281	0.113	0.056	0.049	0.027
27	0.657	0.281	0.122	0.233	0.054	0.228	0.034
28	0.469	0.597	0.042	0.000	0.260	0.232	-0.040

Introduction

Attitudes towards Stochastics (term used to refer to probability and statistics simultaneously; Batanero, 2019; Shaughnessy, 1992) has been a topic of growing interest for researchers and statistical educators for more than 70 years (Bendig & Hughes, 1954). During this time, researchers have focused on the influence of attitudes on the teaching and learning of Stochastics, in the use of Stochastics outside the school context, and in the decision to continue future studies on the subject (Gal, Ginsburg, & Schau, 1997). Therefore, improving teachers' attitudes has established itself as a goal of educational reform around teaching Stochastics (Tishkovskaya & Lancaster, 2012). Moreover, in addition to teaching stochastics, teachers have a responsibility to promote positive attitudes towards this material for their students, as well as to foster an appreciation for its potential uses in future personal and professional life (Estrada, Batanero, & Díaz, 2018).

The need to better understand pre-service teachers' attitudes and how it relates to their teaching has increased as more Stochastics content is being newly introduced to lower grade levels. One example of this situation is Chile, where the most recent update to the math curriculum has incorporated the teaching of Stochastics throughout grades 1-6 (data and probabilities) and grades 7-12 (probability and statistics); and since 2020, the Humanistic-Scientific differentiated students' training plan (grades 11-12) has included a subject called "Probability, and descriptive and inferential statistics" (Chilean Ministry of Education [MINEDUC], 2009, 2012, 2015, 2019). These guidelines include development of specific skills and knowledge, as well as a focus on student attitudes. Successful implementation of these curricular proposals depends not only on the disciplinary and didactic knowledge of teachers, but also on their willingness and interest in teaching these subjects.

In this paper, we use the Chilean system as a case study, with the goal of analyzing and describing the attitudes towards stochastics contents and its teaching for a sample of 269 pre-service Chilean mathematics teachers. We hope that our results can provide an example of assessing the current state of pre-service teachers attitudes towards stochastics and its teaching, adding depth to previous research on pre-service teacher attitudes; as well as service as a source for future comparisons as teacher preparation programs adapt new curricular demands similar to those placed on Chilean teachers.

⁷Ruz, F, Chance, B. & Contreras, J.M. (under review). Exploring How Chilean Pre-service Teachers' Attitudes Toward Stochastics Vary by Content Topic. *International Journal of Science and Mathematics Education*.

Background

Research on statistics-related attitudes mainly focused on theoretical perspectives of *affect* related to mathematics (Groth & Meletiou-Mavrotheris, 2018). Previous work often focused on the influence of attitudes on academic performance from a causal-relationship paradigm, for example, using attitudes towards stochastics to predict achievement and/or to explore attitudinal changes before and after instruction; but at the end of the last century, attention was turned to a more interpretative approach (Di Martino, 2016). During this time, we note that there was not a unanimous definition of *attitude* in the mathematical and statistical education field (Estrada, Batanero, & Lancaster, 2011; Zan, Brown, Evans, & Hannula, 2006). This is due to the impossibility of directly observing the construct, which has led to deducing it from external behaviors, depending on the theoretical perspective adopted (Auzmendi, 1992; Estrada, 2002; Gómez-Chacón, 2000; McLeod, 1992; Philipp, 2007). As Di Martino highlighted in Goldin et al. (2016), however, two definitions of attitude are particularly recurrent. “A *simple* one, that describes attitude in terms of positive or negative feelings associated with math; and a *three-dimensional* definition that recognizes three components (the emotional disposition, the set of beliefs regarding mathematics, and the behavior related to mathematics)” (Goldin et al., p. 4). Within the interpretative paradigm, the development and use of qualitative methods (essays, diaries, and interviews) emerged, however, the use of scaling methods predominates in this field (Carmona, 2004; Nolan, Beran, & Hecker, 2012).

In this paper, we focus on in- and pre-service teachers’ attitudes towards stochastics, where efforts have been more scarce (Estrada et al., 2011; Groth & Meletiou-Mavrotheris, 2018). In general, the trend has been to use one of the classical instruments developed for measuring students’ attitudes (Estrada, 2002; Hannigan, Gill, & Leavy, 2013; Nasser, 2004; Onwuegbuzie, 1998; Zientek, Carter, Taylor, & Capraro, 2011), or to propose a new scale that also considers participants’ attitudes towards teaching statistics (Alvarado, Andaur, & Estrada, 2018; Aparicio & Bazán, 2006; Estrada & Batanero, 2020; Estrada, Batanero, & Fortuny, 2004; Martins, Estrada, Nascimiento, & Comas, 2015; Vázquez et al., 2019; Ruz et al., 2020a).

Using scales designed for students. Among those who used scales designed for students, Onwuegbuzie (1998) used the *Attitudes Toward Statistics* (ATS; Wise, 1985) scale with 222 American teachers to measure attitudinal change at the beginning and end of a graduate course, considering statistics as a *professional field* and as a *subject*. He reported that teachers have relatively less positive attitudes toward statistics as both a field and as a specific course, compared with previous research carried up to that point with undergraduate students.

Like the ATS, the *Survey of Attitudes Toward Statistics-28* SATS-28; Schau, Stevens, Dauphinee, & Del Vecchio, 1995) was developed to measure students' attitudes, and is organized around four attitudinal components: *affect* (feelings concerning statistics), *cognitive competence* (self-perception of intellectual knowledge about statistics), *value* (usefulness, relevance, and worth of statistics), and *difficulty* (perceive difficulty of statistics as a subject). Estrada (2002) used a Spanish translation of the SATS-28 scale with 367 pre-service teachers in Spain. She reported mean scores higher than the theoretical indifference-value both globally and in each of the four components considered in the scale. Nasser (2004) analyzed the association between achievement in statistics and six latent variables of the affective domain (anxiety, attitudes, and motivation, each towards statistics and mathematics) in 162 pre-service from Israel. In terms of attitudes, Nasser reports positive attitudes (higher than the indifference score) towards the affective, cognitive competence, and value components, but negative (lower than indifference) towards the difficulty component.

An extended version of the SATS-28, the *Survey of Attitudes Toward Statistics-36* (SATS-36; Schau, 2003) added two new components: *interest* (individual attraction towards statistics), and *effort* (amount of work spent to learn statistics). Using the SATS-36, Zientek et al. (2011) evaluated the relationship between attitudes and performance in an introductory statistics course for 95 pre-service teachers in the United States. Participants showed a positive disposition in terms of value, cognitive competence, and effort towards statistics; but negative dispositions considering the affective, interest, and difficulty components. Hannigan et al. (2013) analyzed the attitudes towards statistics in 134 Irish pre-service mathematics teachers. These participants declare positive attitudes in each of the six components considered in the SATS-36, although these are closer to the neutral position for the perceived difficulty towards learning statistics.

Using scales design for pre-service teachers. Among those who propose specific ways to measure teachers' attitude towards statistics, Begg and Edwards (1999) analyzed the attitudes and beliefs about statistics and its teaching for 22 in-service and 12 pre-service teachers from New Zealand through interviews, scales, and concept maps. All the initial expressions of attitude in relation to statistics were negative, and most of the teachers saw statistics in a quite narrow sense (only six of the in-service teachers talked about statistics as a process). In terms of teaching statistics however, nearly all the participants rated themselves as feeling reasonably secure when teaching statistics, and were not nervous at the thought of teaching statistics.

Estrada (2002) developed the *Scale of Attitudes towards Statistics and its Teaching* (SAST) for teachers according to six components. The first three components are on anthropological aspects such as *social* (perception of the value of statistics in society); *educational* (interest in learning and teaching statistics); *instrumental* (perception of the usefulness of statistics in other areas). Whereas the other three components refer to pedagogical aspects, according to three classic components in the measurement of attitudes (Di Martino, 2016) as *affective* (personal feelings towards statistics); *cognitive* (conceptions about statistics); and *behavioral* (tendency to use statistics). Estrada et al. (2004) report the results of using the SAST with 140 Spanish teachers (66 in-service and 74 pre-service), indicating in general a positive disposition in all components of the SAST, although less positive among the pre-service teachers. Aparicio and Bazán (2006) used the SAST to analyze the relationship between attitude and statistical performance of 87 Peruvian pre-service teachers. Their results on attitudes were also positive, both globally and in each of the components of attitudes considered. Martins et al. (2015) analyzed the attitudes of 1098 Portuguese teachers from 1st (grades 1-4) and 2nd (grades 5-6) basic cycle. Results showed slightly positive attitudes towards statistics and its teaching, while generally higher for teachers of the 2nd cycle.

More recently, Estrada and Batanero (2015) proposed an evolution of the SAST applied to probability, the scale of *Attitudes towards Probability and its Teaching* (APT) for teachers (Estrada et al., 2018). In this scale, the attitude construct is theorized according to classic components: *affective*, *cognitive*, *behavioral*, and *value*. The survey has three dimensions: the *first dimension* focuses on the affective, cognitive, and behavior attitude components of the subject of probability; the *second dimension* focuses on the affective, didactical, and behavior attitude components of teaching probability; and the *third dimension* considers a seventh component related to the *value* of probability and its teaching. Alvarado et al. (2018) used the APT scale with 122 Chilean mathematics teachers (70 in-service and 51 pre-service), reporting mostly positive attitudes in all seven components and globally; although these were less positive among the pre-service teachers. Vásquez et al. (2019) used the APT to explore attitudinal differences towards statistics and probability and their teaching in 124 Chilean pre-service teachers for early childhood. The Authors reported mostly positive results for both statistics and probability, although these results for the probability content area. Ruz et al. (2020a) used the APT with 42 Chilean and 84 Spanish pre-service mathematics teachers, reporting positive attitudes overall and in all components. Ruz et al did observe differences just in the behavior towards teaching probability attitude, where the Chilean group declared more positive attitudes. Estrada and Batanero (2020) used the APT with 416 Spanish pre-service

teachers, also reporting positive attitudes in general and in each to the seven components, with higher attitudes towards the value towards probability and its teaching component.

In these previous studies, we see improvement in the methods used to focus on the attitudes of teachers of Stochastics, and on identifying how these attitudes relate to the content and pedagogy they choose to cover in their courses. Across the years and in numerous countries, there has been variation in the results depending on the theoretical perspective adopted but also some consistencies as reporting mostly positive attitudes towards statistics in teachers. In this paper, expand the APT to focus on the attitudes of pre-services teachers in regard to three sub-areas (or topics) of Stochastics: probability, descriptive statistics, and inference.

Method

This research utilizes a quantitative approach, and is considered exploratory-descriptive (Hernández, Fernández, & Baptista, 2014). From this perspective, we next describe the framework and research questions, the context and sample, and the instrument and variables analyzed.

Framework and Research Questions. For the affective domain, we use McLeod (1992)'s perspective, which centers around the three main descriptors of emotions, beliefs, and attitudes, although in this case we are interested in attitudes. In particular, we consider attitudes as a multidimensional construct that involves feelings, beliefs, and predispositions towards the object of interest, as well as their professional and personal value, whose stability over time is greater than emotions, but less than beliefs. For measuring attitudes towards stochastics, we follow the suggestion of Groth & Meletiou-Mavrotheris (2018) to use instruments that establish a clear distinction between teachers' attitudes *towards statistics*, and *towards teaching statistics*, which allows us to explore the attitudes of teachers from two perspective: their experience as students learning statistics (attitudes towards statistics), and their experience or expectations as teachers teaching statistics (attitudes towards teaching statistics). This led us to focus on Estrada's which proposed one of the first scales intended for teachers (SAST), building off of classic scales measuring statistics attitudes, such as ATS and SATS-28, and later evolving to include probability (APT; Estrada et al., 2018). Table 1 summaries the APT's seven attitudinal components across the three dimensions.

Table 1.*Description of the components of attitudes considered*

Dimension	Component	Description
1. Attitudes toward Probability	Affective	Feelings about probability (for example, pleasure or displeasure towards the topic, interest or disinterest in probability, rejection of or anxiety towards the topic)
	Cognitive Competence	Self-perception with regards to self-competence, knowledge, and intellectual skills when applied to probability.
	Behavioral	Inclinations to act towards the attitude object in a particular way, to make decisions in situations involving the attitude object, to help colleagues to learn and use probability
2. Attitudes towards Teaching Probability	Affective	Personal feelings about teaching probability; pleasure-displeasure, fear-confidence, interest-disinterest in teaching probability
	Didactical Competence	Teacher's perception of his/her ability to teach probability, to help students, to pose effective tasks to seek relevant resources, etc.
	Behavioural	Whether the teacher has or has not taught (or whether he/she is willing or not willing to teach) probability, whether he/she gives priority to probability over other topics, and whether he/she thinks the topic should be postponed or given emphasis.
3. Value of Probability and its Teaching	Value	Appreciation of the usefulness, relevance, and importance of probability and its teaching in personal and professional life.

Source: Estrada et al. (2018, p. 319-320)

Our goal was to use the APT scale to analyze and describe the attitudes towards stochastics content and its teaching for a sample of Chilean pre-service mathematics teachers organized separately into three content-topics: descriptive statistics, probability, and statistical inference (D/P/I), just as they are grouped within the Chilean mathematics school curriculum. With this distinction, we propose the following research questions:

- 1) What are the attitudinal dispositions of pre-service Chilean mathematics teachers towards each stochastics content-topic D/P/I, and its teaching?
- 2) Considering the three stochastics content-topics D/P/I, are there attitudinal differences among them according to the seven components of the APT scale?
- 3) Does the previous training of the participants relate to their attitudes towards D/P/I and its teaching?

Context and Sample. Globally, mathematics teachers' training is usually offered according to two models. The *concurrent model* provides pedagogical and practical training simultaneously as courses in specific subject matter (e.g., "math methods courses"). Whereas in the *consecutive model*, the pedagogical and practical training is subsequent to the disciplinary training (Organization for Economic Co-operation and Development (OECD), 2014; Valle & Jesús, 2011).

In Chile, both alternatives are offered, the concurrent one is offered as a 9-10 semester program called *pedagogy in mathematics*, and the consecutive one is offered to post-baccalaureate students through continuing studies programs taking one or two years (Tatto et al., 2012). After either training program, teachers are qualified to teach mathematics between grades 7 and 12. This teacher preparation process is regulated by the MINEDUC through the Centre for Improvement, Experimentation, and Pedagogical Research (CPEIP), however, each Chilean training institution formulates their study plans independently. For the stochastics education of pre-service mathematics' teachers, the consecutive programs do not include stochastics courses, but instead focus on pedagogical and didactic aspects related to teaching mathematics. In the concurrent programs, pre-service teachers experience between one to three stochastics courses, usually following a sequence similar to the one planned in school curriculum (start with aspects of descriptive statistics and probability theory, and end with elements of statistical inference).

The *sample* for our study was purposeful, 269 pre-service Chilean mathematics teachers (119 women and 150 men, aged between 19 and 51, with a mean of 23.8 years old), enrolled in 15 of the 30 universities to which we had access in Chile that offer the mathematics' teachers career (www.cned.cl). With this sample, we hope to represent the heterogeneity of the degree programs offered. Participants were selected through scheduled visits to the different institutions, where those pre-services' teachers who had taken all the stochastics subjects offered in their curricula were invited to a specific session to take the scale.

As the participants come from different institutions and their previous training was different in each case, in Table 2 we present the number of stochastics courses completed (passed) for the participants, according to the number of courses required in their respective universities.

The first row of Table 2 applies to the one university in our sample following the *consecutive* model. This graduate program does not require stochastics training, so the students reported the number of courses they passed as undergraduates. The second row shows that among those who have one required course in their *concurrent* model, five (13.9%) have taken the course but have not yet passed it, and 31 (86.1%) did.

Table 2.*Number (and %) of participants according to the number of required courses*

Number of required courses	Number of passed courses			
	0	1	2	3
0 ($n = 8$)	0 (0)	2 (25.0)	2 (25.0)	4 (50.0)
1 ($n = 36$)	5 (13.9)	31 (86.1)	-	-
2 ($n = 195$)	10 (5.1)	23 (11.8)	162 (83.1)	-
3 ($n = 30$)	0 (0)	2 (6.7)	7 (23.3)	21 (70.0)

Source: Ruz, Chance, Medina, and Contreras (in press)

We used this classification to organize the participants according to their *previous training*, but the interesting thing is the content of these courses. Participants with one required course focus on exploratory data analysis, with brief coverage of classical probability, culminating with a brief discussion of parameter estimation. The group with two required courses is the largest. In these institutions, the first course is intended to introduce exploratory data analysis and classical probability theory, while the second course focuses on the modeling of random phenomena through probability distributions and culminates with an introduction to statistical inference. Among those who had taken three courses in stochastics, the first course is intended to develop skills to explore and describe data, the second focuses on probability from a more mathematical perspective, and the third focuses entirely on statistical inference.

Instrument and Variables. For our instrument, we expanded the APT scale perspective to the other stochastics content-topics. The same set of 28 questions was posed to the pre-service teachers three times, once for each content topics (D/P/I), each offering a five-point Likert scale. Half of the statements were written in the negative sense, which were then reverse scored (items with * in Table 8 of Appendix), and the others in the affirmative. We refer to this 28x3-item scale as the *Attitudes towards Stochastics Contents and its Teaching* (ASCT) scale. Four items were included for each of the seven components of the ASCT scale three times (towards D/P/I content-topics) according to the distribution presented in Table 3.

Table 3.*Distribution of items from the ASCT Scale*

Dimension	Component	Items
1	Affective [AC]	1, 5, 16, 27
1	Cognitive Competence [CC]	6, 8, 17, 22
1	Behavioral [BC]	2, 7, 15, 18
2	Affective [AT]	9, 21, 26, 28
2	Didactical Competence [DT]	3, 10, 14, 23
2	Behavioral [BT]	11, 20, 24, 25
3	Value [VV]	4, 12, 13, 19
Global	Total	All

We began by using the individual items' scores towards each content-topic for validity and reliability analysis. In the exploration stage, however, we defined each attitude component of ASCT scale as the mean score for the items listed in Table 3 according to each of the three-stochastics content topics. For a global measurement of attitudes towards each content-topic and its teaching, we used the mean score of all 28 items. We also included the number of stochastics courses passed in the initial training of participants, as well as an indicator variable of whether the subjects have passed all the stochastics courses as measures of previous training.

From a previous administration of the ASCT scale with a pilot sample of 126 pre-service Chilean and Spanish mathematics teachers (Ruz et al., 2020a; 2020b), we confirmed adequate internal consistency for each scale (Cronbach's Alpha to be 0.899, 0.879, and 0.856 for D/P/I contents respectively). In terms of construct validity, an exploratory factor analysis of the pilot data found support for theoretical perspective of seven components, which explained at least 65% of the total variance in each content-topic factorial model. Content and criterion validity were previously discussed by the original authors of APT scale (Estrada & Batanero, 2015; Estrada et al., 2018).

Results

In this section, we organize the results by starting with validity and reliability of ASCT scale for the full sample, and then analyzing the scores according to the different content-topics (descriptive statistics, probability, statistical inference) and components of attitudes considered (dimensions 1-3). We finish by analyzing the results according to the previous training of the participants.

Validity and Reliability. Regarding the reliability of the measurements, we calculated Cronbach's Alpha, and for the construct validity of the scales, we carried out a Confirmatory Factor Analysis (CFA; Brown, 2015). We obtained a more than adequate internal consistency (Cronbach's alpha of 0.883, 0.868, and 0.845 for D/P/I topic respectively).

The theoretical distribution of the items according to 7 components (Table 3) fits better than distributions where the items are grouped according to 3-dimensions (attitudes towards stochastics, towards teaching stochastics, and value of both), or 4-classical attitude components (affective, cognitive competence, behavioral, and value). In this case, 7-components, absolute fit (SRMR of 0.086 (D), 0.093 (P), 0.091 (I)), parsimony correction (RMSEA of 0.082 (D), 0.074 (P), 0.08 (I)), and comparative fit (CFI of 0.886 (D), 0.878 (P), 0.813 (I)) showed acceptable values. Additionally, all item-factor loadings were significant (ranged from 0.29 to

0.82); with the exception of item 21 with a lower factor loading (0.04, 0.03, and 0.14 for D/P/I topic respectively). Although not ideal, these results support the seven-component theoretical proposal (Table 1) as the main descriptors of the attitudes towards stochastics and its teaching.

Exploring Global and Individual Results. Globally, the mean score across the 28 items is slightly higher for probability (3.7 points), but lower for inference (3.5 points), and for each topic the lower quartile is situated above the theoretical indifference (3.4 (D), 3.5 (P), 3.3 (I) points).

The item with the lowest mean score on all three scales was number 21: “I am concerned about knowing how to answer my students’ questions about D/P/I” (reverse scored). This item is part of the *Affective component towards teaching stochastics*, and because the score was reversed, our participants do feel worried about adequately addressing questions about D/P/I content-topics of their students. The second lowest mean score was the same for the descriptive and inferences topics, item 6, “The contents of D/I are easy.” But in the case of probability, the second lowest mean score (after reverse scoring) corresponded to number 22: “I do not feel prepared to solve any problem about probability.” Both items are part of the *Cognitive Competence component towards stochastics*. That is, our pre-service teachers perceive a higher difficulty to the contents more linked to statistics (descriptive and inference), while for probability they feel much better prepared (for having inverted the score of item 22).

On the other hand, the item with the highest (after reverse scoring) mean score on all three scales was number 12: “D/P/I is useless,” and in second place was item 25: “If I could eliminate some content from the math curriculum it would be D/P/I” (reverse scored). Item 12 is part of the *Value component towards stochastics and its teaching*, and Item 25 is part of the *Behavioral component towards teaching stochastics*. In both cases, scores were reversed, so our participants mostly highlight the usefulness of the three considered topics, and also declare they disagree with removing these topics from the math school curriculum. The results obtained on the other items are presented in the Table 8 of Appendix.

Attitudinal Components towards Stochastics and its Teaching. In this section, we explore whether the differences in the content-topics are similar within the seven attitude components. We start with describing the results according to the dimensions given in Table 1: Attitudes towards stochastics (how the pre-service teachers feel about the content, do they like it, can they learn it, and will they use it?); Attitudes towards teaching stochastics (how participants feel about teaching the content: do they like teaching it, can they teach it will, will they teach it?); and Attitudes towards the value of the content and its teaching. We finish the

section analyzing the interaction between the stochastic topics and attitude components considered.

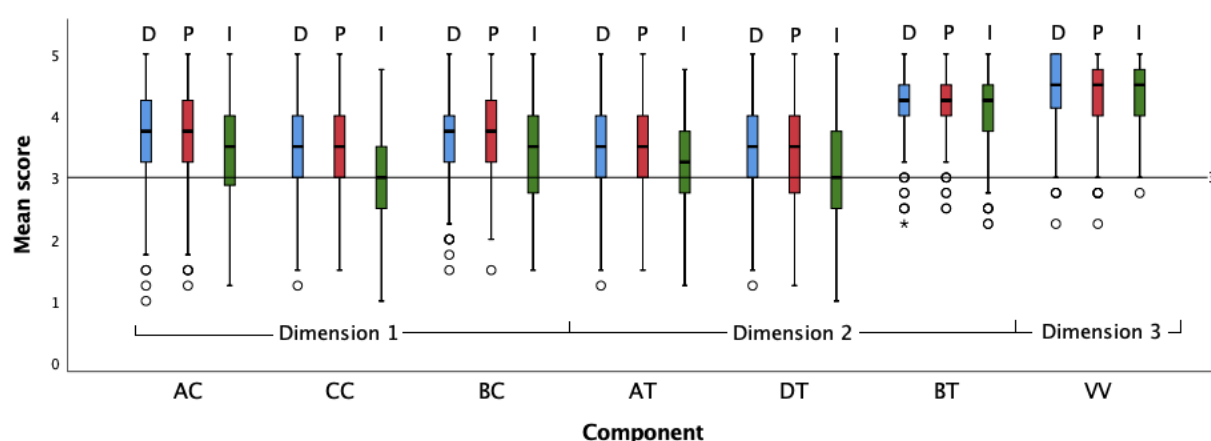
In Figure 1, we explore the mean scores for each of the seven components differentiating according to the stochastic topic considered, in comparison to the neutral position (indifference line at 3 points). We note that the median scores are greater than the indifference value for most of the attitude components. There are two cases, *cognitive competence* (CC) and *didactic competence* (DT), both with respect to inference, where the median score coincides with (or is less than) the indifference line added in Figure 1.

Dimension 1. On the *Affective component* (“do they enjoy the topic”), at least 70% of the participants assigned a mean score higher than indifference in all three cases (30th percentile of 3.25 (D), 3.5 (P), and 3.0 (I)). That is to say, pre-service teachers tend to declare feelings of confidence and pleasure towards stochastic contents, both in their experience as students (e.g., item 1. “I have fun in classes where inference is explained”), and in general (e.g., item 16. “I feel intimidated about information that involves probability” (reversed)). However, the mean scores are higher for probability content (3.7 points) than for inference (3.4 points).

Regarding the *Cognitive Competence component* (“are they good at it”), median scores are above indifference for descriptive statistics and probability topics (3.5 points in both), but not for inference (3.0 points). In other words, participants’ perception of their domain and intellectual capacity towards statistical inference (e.g., item 8 “I master the main inference contents,” or item 22 “I don’t feel prepared to solve any problem about inference” (reversed)) is not so positive or negative but rather closer to indifference on average, lower than for the other two content-topics.

Figure 1.

Boxplots of the mean scores in each component according to the stochastic topics



The component referred to as *Behavioral* or the tendency to use and apply stochastics knowledge in personal, social, or scientific context (e.g., item 7 “I have never used inference outside a scientific context” or item 18 “I avoid reading information where probability terms appear,” both reversed), is the one with the highest scores for Dimension 1 (median of 3.75 points (D and P) and 3.5 points (I)). The declared attitudes were positive in all of them, however, mean scores were higher for probability (3.8 points) and lower for inference (3.4 points).

Dimension 2. Next, we focus on the results for the second theoretical dimension of attitudes towards teaching Stochastics. For the *Affective component* (“would they enjoy teaching the topic”), at least 60% of the participants assigned a mean score higher than indifference in all three cases (40th percentile of 3.25 points (D and P), and 3.0 points (I)). In other words, preservice teachers declare (positive) feelings of interest and pleasure toward the task of teaching stochastics (e.g., item 26 “I don’t have much interest in teaching probability contents, even though they appear in the curriculum” (reversed), or item 28 “As a prospective teacher, I think I will feel comfortable teaching descriptive statistics”). As we saw with the content itself (Dimension 1), the mean scores are higher in terms of affects towards teaching probability (3.4 points) than those of statistical inference (3.2 points).

About *Didactic or teaching competence* (“they would be good at teaching the topic”), half of participants declared scores above indifference for descriptive statistics and probability topics (median of 3.5 points in both), but not for inference (median of 3.0 points). Instead, the pre-service teachers tended to declare negative or indifferent feelings about their own ability to teach inference content, propose good practices, and face the difficulties inherent in this process (e.g., item 23 “I think I will not be able to prepare appropriate teaching resources for classes on statistical inference content” (reversed)).

Regarding the behavioral or *tendency to didactic action* (“they would teach this topic at school”), the mean scores were much higher (and positive) on this component, where more than 90% of the participants had a mean score higher than indifference for the three topics (10th percentile of 3.5 points (D and P) and 3.3 points (I)). For example, item 20 “More time should be devoted to teaching probability in early grades of education,” and item 25 “If I could remove some topics from the math curriculum it would be descriptive statistics” (reversed).

Dimension 3. Finally, we present the results obtained in the third theoretical dimension considered, which involves only one attitudinal component concerning the value found by the

pre-service teachers towards stochastic contents and its teaching (e.g., item 12 “Probability is useless” (reversed), and item 13 “Statistical inference contents do not have as much value as other mathematics topics”). The scores declared in this component are the highest among the three dimensions analyzed (though similar to BT component). Moreover, at least 90% of participants declared a disposition higher than indifference for each topic (10th percentile of 3.8 points (D), and 3.5 points (P and I)). Therefore, pre-service teachers positively evaluate the usefulness and relevance of stochastic content in personal and professional contexts, and in the training of their future students.

Interaction between Stochastics-Topics and Attitude-Components. Up to this point, we have described the results in comparison with the theoretical value of indifference. In what follows, we compare the attitudes to each other across the stochastics topics, within participants. Figure 2 shows that the attitudinal components’ estimated marginal means differ according to stochastics topics, at least in the first five cases (AC, CC, BC, AT, and DT components).

Next, we explored whether these differences in attitudes vary significantly by topic. Therefore, we carried out a Repeated Measures Multivariate Analysis of Variance [RM-MANOVA], considering two factors (D/P/I-content topics, and attitudes’ components), through the Wilks’ Lambda test. In the repeated measure design, all the participants receive every level of the treatments, and the differences are compared within-subjects, which removes individual differences. The results, for a total of 230 participants who answered the ASCT scale completely, are presented in Table 4.

Figure 2.

Interaction effect plot (Topics and Components)

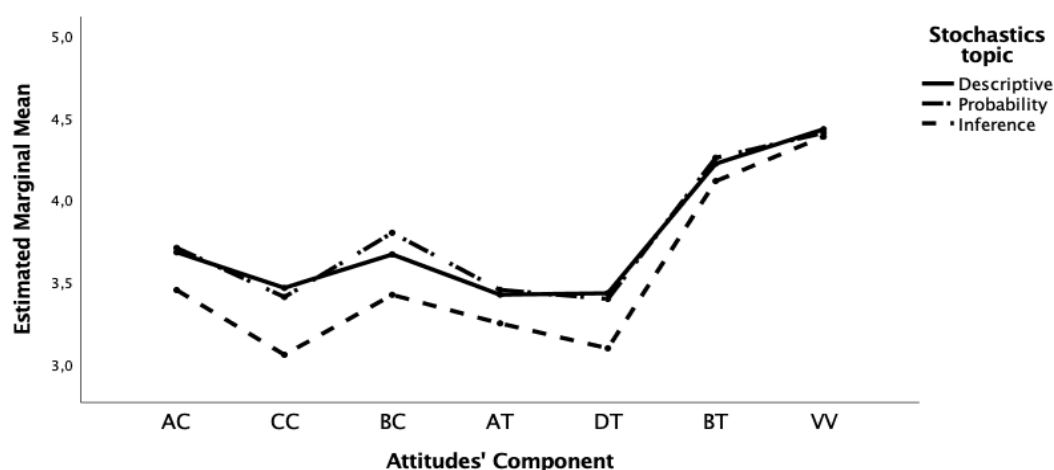


Table 4.*Two-way RM-MANOVA*

Source of Variation	<i>Lambda</i> - value	<i>F</i> -value	<i>df</i>	<i>df</i> <i>error</i>	<i>p</i> -value	Partial Eta- Squared (PES)
Topics	0.714	45.625	2	228	0.000*	0.286
Components	0.232	123.478	6	224	0.000*	0.768
Topics×Components	0.604	11.926	12	218	0.000*	0.396

* *p*-value < 0.05

Regarding the results in Table 4, we note that all three sources of variation analyzed are statistically significant, and are reinforced with large effect sizes estimated by the PES on each case. To explore the significance of *Topics*, we carried out a multiple comparison's analysis (see Table 9 of Appendix, Tukey's HSD analysis). Post-hoc results showed no significant differences between the global attitudes declared towards descriptive and probability topics, but each of those was significantly different from inference content, whose scores are generally lower.

The significant interaction in Table 4 implies that the differences between these topics could vary across the attitude *Components*. We carried out a one factor (topics) RM-MANOVA for each of the seven attitudes' component. For those with a significant overall *p*-value, we computed multiple comparisons (Tukey's HSD analysis), identifying those pairs with different means. The results are presented in Table 5, where we include only those significantly different pairs, accompanied by the CIs for the mean differences.

Table 5.*One-way (topics) RM-MANOVAs for each attitudes' component*

Dim	Comp.	Wilks' Lambda test				Tukey's HSD analysis		
		<i>Lambda</i> value	<i>F</i>	<i>df</i> <i>error</i>	<i>p</i> - value	Topic (Mean)	Dif.	95% CI Lower Upper
1	AC	0.868	19.52	256	0.00*	D-I (0.187)	0.106	0.268
						P-I (0.259)	0.174	0.343
1	CC	0.706	53.81	258	0.00*	D-I (0.403)	0.321	0.485
						P-I (0.347)	0.272	0.422
1	BC	0.694	56.92	258	0.00*	D-P (-0.159)	-0.225	-0.092
						D-I (0.247)	0.165	0.329
						P-I (0.406)	0.331	0.481
2	AT	0.853	22.43	261	0.00*	D-I (0.167)	0.101	0.233
						P-I (0.211)	0.146	0.276
2	DT	0.764	39.19	254	0.00*	D-I (0.316)	0.238	0.395
						P-I (0.299)	0.225	0.373
2	BT	0.879	17.58	255	0.00*	D-I (0.126)	0.070	0.183
						P-I (0.157)	0.105	0.209
3	VV	0.987	1.73	254	0.179	No differences		

* *p*-value < 0.05

The One-way RM-MANOVAs results show that the effect of *Topic* is significant in six of the seven attitudinal components considered. That is, at least one of the mean scores for each content topic is significantly different than the others in all components of Dimension 1 and 2, but there are no differences in Dimension 3 about Value (VV). Furthermore, as a measure of effect sizes, we note that the CIs vary from (0.070-0.183) for the D-I difference in the BT component to (0.331-0.481) for the P-I difference in the BC component. That is, as each component is balanced by 4-items, these mean differences ranged from (0.28-0.732) to (1.324-1.924) points between each pair of components. Therefore, considering that our Likert scale ranged from 1 to 5, we consider these differences meaningful.

After, when observing the results of the post-hoc analysis, we noticed that in the Affective (AC) and Cognitive Competence (CC) components towards stochastics, and in the Affective (AT), Didactical Competence (DT), and Behavioral (BT) components towards teaching stochastics, the mean scores were not different between descriptive and probability topics, but between each one of them and the statistical inference content. In addition, the mean for the differences were positive, as the values included in the CIs (see Table 5), so in these five components the attitudes' scores are lower for the inference topic. Considering the Behavioral component towards stochastics (BC), we observed significant differences among all three-stochastics topic considered. The mean and CIs for the differences' scores (Table 5) was higher for probability and lower for inference.

Previous Training. To analyze the effect of the previous training received by the participants, we split this sample based on the number of stochastics courses required in their curricula (Table 2). The results are presented in Figure 3(a) and Table 6, where we differentiate according to the topic considered in ASCT scale.

Figure 3.

Boxplots of total scores according to: (a) Number of required courses; (b) Success in stochastics courses

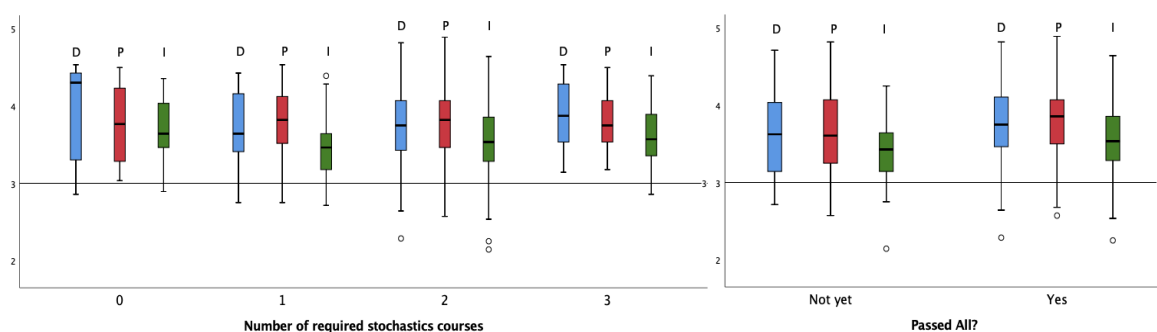


Table 6.*Distribution of scores according to the number of required courses*

N° required courses	Descriptive			Probability			Inference		
	<i>n</i>	<i>M</i>	<i>SD</i>	<i>n</i>	<i>M</i>	<i>SD</i>	<i>n</i>	<i>M</i>	<i>SD</i>
0	8	3.93	0.66	8	3.76	0.53	8	3.69	0.47
1	31	3.70	0.48	31	3.79	0.46	31	3.46	0.43
2	177	3.71	0.50	172	3.76	0.47	167	3.53	0.45
3	26	3.87	0.39	26	3.80	0.36	26	3.64	0.39

For the participants with at least one required stochastics course (*concurrent model*), we note that regardless of the content topic considered, the overall average attitude score increases as the number of courses increases (Table 6). In turn, when considering the participants that are enrolled in a *consecutive program* (zero required courses in their graduate program), their mean scores are the highest for descriptive and lower for inference. These results, however, also show the greatest standard deviations.

Subsequently, when exploring the responses of the participants who have taken all the required stochastics courses for their initial training (Table 2), we differentiate between those who have passed them all and those who have not. Results according to each scale used are presented in Figure 3(b) and Table 7.

We note that the attitudes of those who have not passed all the required stochastics courses tend to be lower than for those who have successfully completed this training process. And in this case, as in our previous results (Figure 1 and 2), participants expressed more positive attitudes about probability, and the lowest towards inference.

Finally, we analyze the effect of previous training on attitudes in the 230 participants who answered the ASCT scale completely. We carry out two one-way (topics) RM-MANOVA's for global attitudes; first, considering the number of required courses (X1), and second, considering the dummy variable of whether the subjects have passed all the stochastics courses (X2), as covariate.

Table 7.*Distribution of scores according to previous training of participants*

Content-topic	Passed all			Have not yet passed all		
	<i>n</i>	<i>M</i>	<i>SD</i>	<i>n</i>	<i>M</i>	<i>SD</i>
Descriptive	204	3.76	0.48	38	3.61	0.54
Probability	200	3.79	0.44	37	3.65	0.54
Inference	198	3.56	0.44	34	3.39	0.44

The effects of X2 on attitudes is significant ($F\text{-value} = 4.358$; $p\text{-value} = 0.038$; PES = 0.019) but the effect of X1 is not significant ($F\text{-value} = 0.198$; $p\text{-value} = 0.657$; PES = 0.001). In this regard, previous training is a good predictor of attitudes towards stochastics and its teaching when it is based on whether or not the pre-service teachers have yet passed all required courses (X2) but not when based on how many courses are required to take (X1).

Discussion

In this paper, we summarize the results of assessing attitudes towards Stochastic content and its teaching in a sample of 269 pre-service Chilean mathematics teachers, across three content subdomains namely descriptive statistics, probability, and statistical inference (D/P/I). We use the Scale of Attitudes towards Stochastic Content and its Teaching (ASCT) which considers seven components organized in three dimensions as detailed in Table 1.

For the first research question, *what are the attitudinal dispositions of pre-service Chilean mathematics teachers towards each stochastics content-topic D/P/I, and its teaching?* Overall the declared attitudes were significantly positive towards each of content topics considered. These results were opposed to research at the end of the last century (Begg & Edwards, 1999; Onwuegbuzie, 1998) but support later results (Alvarado et al., 2018; Aparicio & Bazán, 2006; Estrada, 2002; Estrada et al., 2018, 2004; Hannigan et al., 2013; Martins et al., 2015; Nasser, 2004; Vásquez et al., 2019; Ruz et al., 2020a, b; Zientek et al., 2011). Among them, the results of Alvarado et al. (2018) for probability content are slightly more positive than ours, for both pre-service and in-service teachers.

The second question raised was *considering the three content-topics D/P/I, are there attitudinal differences among them according to the seven components of the ASCT scale?* We identified some differences between the global mean scores according to the content topic considered (Table 4). These differences were not significant between descriptive statistics and probability, but were between them and inference content, whose mean results are lower. This situation is somewhat contrary to Vásquez et al. (2019) results, who report more positive attitudes towards descriptive statistics than probability, but in that case pre-service teachers of childhood education are investigated, whose usually do not have previous training on inference, which may explain this difference.

In addition, we found that for each in the seven components of attitudes considered (Table 1), the mean scores were mostly positive (above theoretical indifference position) with respect to descriptive statistics and probability content (Figure 1). However, regarding inference content, attitudes were positive in five components, while mostly negative or

indifferent in those about cognitive competence towards content and didactic competence towards teaching (Figure 1). In other words, participants have a negative perception about their own intellectual capacity to master and teach inference contents.

After post-hoc analysis (Table 5), we observed differences about each attitude component according to the three-stochastics topic (Figure 1). The most common outcome follows the global results' pattern of no differences between descriptive statistics and probability, but lower means with respect to statistical inference (see Table 9 of Appendix). This occurs in five components, two on the dimension of attitudes towards stochastic content (affective and cognitive competence), and all three on its teaching. About the use of stochastic in personal or professional fields (behavioral component towards content), we report differences between all the content topics; there is a more positive disposition to apply probability instead of statistical inference contents. Finally, regarding the value component, participants value equally positive about the usefulness and relevance of the three stochastics content topics in their life, as in the training of their prospective students.

In summary, the participants in our sample tended to assign similar value to the three stochastic content topics and to declare positive attitudes for most of the analyzed components. The situation turns negative when referring to their mastery of statistical inference content and its teaching. This fact is worrying as 82.5% ($n = 222$) of the sample had completed all the stochastic courses required in their initial training (Table 2) and, as we mentioned at the beginning, from the next academic year 2021 a subject of the Differentiated Humanistic-Scientific training plan for grades 11-12 (16-18 years) from Chile will be on "Probability, descriptive, and inferential statistics." In this subject, students are expected to deepen the school-level stochastics content knowledge developed in previous grades, culminating in "an introduction to inferential statistics methods, the use of confidence intervals, and hypothesis tests" (MINEDUC, 2019, p. 150). Our sample does not feel prepared for such changes.

Regarding the third question, *Does the previous training of the participants relate to their attitudes towards D/P/I and its teaching?* When investigating the effect of previous training received by participants (Figure 3a and Table 6), for the participants who follow a *concurrent* model of initial training, we observe that as the number of required courses increases, the declared attitudes do so as well. Participants enrolled in a *consecutive* model, showed better attitudes for all three stochastics content-topics. This difference may occur due to the fact that the mean age of these 8 participants is higher (28.9 years, ranged from 24 to 51 years) compared to the subjects enrolled in the concurrent model (23.7 years, ranged from 19 to 43 years), and may reflect a better attitude towards school stochastics and their teaching by

older participants. In this context, however, the effect of the number of stochastics courses taken by participants on attitudes was not significant.

On the other hand, we find a significant association between whether or not subjects have yet passed all the required stochastics courses and their attitudes. When our pre-service teachers' have completed all the stochastic subjects required in their initial training, a better attitude towards stochastics contents and its teaching is generated, similar to what was mentioned by Estrada et al. (2011). Previously, however, we found that attitudes were not strongly related to pre-service teachers' content knowledge (Ruz et al., in press), so it seems that attitudes are more related to whether they have completed the required more than to their content knowledge from those courses.

Finally, in what follows we present some *conclusions and recommendations*. Based on our results, we highlight the need to generate professional development instances that promote teachers' continuing education, and improve their disposition towards stochastic contents and its teaching, particularly their cognitive competence. In addition, both in this process and in the initial training, we consider it important to reinforce and monitor attitudinal aspects, because if a teacher is not interested or dislikes a subject, or feels to be not prepared to teach it, it will make it difficult to achieve effective learning by students, as Estrada et al. (2018) concludes.

In this study, the attitudes towards descriptive statistics and probability contents do not show major differences, but attitudes do differ between them and the statistical inference contents and its teaching. In particular, recognizing the common student difficulties and misconceptions associated with inferential reasoning appears daunting to these future teachers, as the correct application of this content requires the understanding of a wide range of concepts (Bakker et al., 2019; Ben-Zvi, Bakker, & Makar, 2015). A teacher with poor knowledge and bad attitude tends to teach inference procedures in a mechanical way and even avoid teaching this content (Batanero 2013; Harradine, Batanero, & Rossman, 2011; Yang, 2012). To address this problem, in recent years a research focus called *Informal Statistical Inference* or *Informal Inferential Reasoning* has originated, which has gained a lot of acceptance in the statistical education community (Bakker and Hussmann, 2017; Makar, Bakker, & Ben-Zvi, 2011; Makar & Rubin, 2009; 2014; Rossman, 2008; Zieffler, Garfield, delMas, & Reading, 2008). This proposal consists of earlier introduction of inferential thinking, starting from the end of primary education with informal ideas about inference. In the simplest possible terms, the idea is to try to decrease the complexity of learning statistical inference with strategies such as the implicit introduction of concepts (as the p-value or the significance level), the suppression of some classical steps in parameter estimation (e.g., calculating the probability of types of error), and using technology to support the students' reasoning.

The most popular suggestion is to teach introductory statistics with simulation- and randomization-based methods, as re-randomization (Watson & Chance, 2012; Rossman & Chance, 2014). The main idea of these approaches is to: (1) Move the learning of inferential concepts to the very beginning of the course, for a complete and then repeated exposure to the entire statistical investigation process as a whole; and (2) Use simulation- and randomization-based inference methods not only to illustrate concepts, but as the primary mechanism through which students perform statistical inference. With this approach, we hope that pre-service teachers have positive experiences when learning statistical inference, so their disposition towards this content and its teaching is not conditioned, for example, by whether or not they have passed the required courses in their initial training.

We hope that our results provide information and tools that guide future actions for initial training and professional development of teachers responsible for teaching stochastic in school. In this way, we propose the ASCT Scale as an instrument that allows inquiring in *What are the attitudes towards stochastic contents and its teaching of teachers?* And we propose that it not be used only for the Chilean context, but that it be extended to other contexts, leaving open the possibility of deepening in the school stochastics and its teaching.

Acknowledgements: This work was supported by Chilean Government (ANID) under a Ph.D. Scholarship N° 72170025, and by the grant B-SEJ-063-UGR18 (FEDER, Spain).

References

- Alvarado, H., Andaur, G., & Estrada, A. (2018). Actitudes hacia la Probabilidad y su enseñanza: un estudio exploratorio con profesores de Matemática en formación y ejercicio de Chile [Attitudes towards Probability and its Teaching: An exploratory study with Chilean mathematics teachers in training and exercise]. *Revista Paradigma*, 39 (2), 36-64.
- Aparicio, A., & Bazán, J. (2006). Actitud y rendimiento en Estadística en profesores peruanos [Attitude and performance in Statistics in Peruvian teachers]. In G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 644–650).
- Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática/estadística en las enseñanzas medias y universitaria. Características y medición* [Attitudes towards mathematics/statistics in middle and tertiary education. Features and measurement]. Bilbao: Mensajero.
- Bakker, A., & Hussmann, S. (2017). Inferentialism in mathematics education: Introduction to a special issue. *Mathematics Education Research Journal*, 29, 395-401.
- Batanero, C. (2019). Thirty years of stochastics education research: Reflections and challenges. En José M. Contreras, María Gea, María López-Martín, & Elena Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-15).
- Batanero, C. (2013). Del análisis de datos a la inferencia: Reflexiones sobre la formación del razonamiento estadístico [From data analysis to inference: Reflections on the development of statistical reasoning]. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 277-291.

- Begg, A., & Edwards, R. (1999). Teachers' Ideas About Teaching Statistics. *Proceedings of the 1999 combined Conference of the AARE & NZARE*. Melbourne: AARE/NZARE.
- Bendig, A., & Hughes, J. (1954). Student attitude and achievement in a course in introductory statistics. *Journal of Educational Psychology*, 45(5), 268–276.
- Ben-Zvi, D., Bakker, A., & Makar, K. (2015). Learning to reason from samples. *Educational Studies in Mathematics*, 88, 291–303.
- Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística [A review of evidence on reliability and validity of attitude and anxiety questionnaires towards statistics]. *Statistics Education Research Journal*, 3(1), 5–28.
- Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado* [Analysis of attitudes and elementary statistical knowledge in teacher training] (Doctoral dissertation), Universitat Autònoma de Barcelona, Spain.
- Estrada, A., Batanero, C., & Díaz, C. (2018). Exploring Teachers' Attitudes Towards Probability and Its Teaching. In C. Batanero & E. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics, ICME-13 Monographs* (pp. 313–332). Cham: Springer.
- Estrada, A., Batanero, C., & Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio [A comparative study of attitudes towards statistics in teachers and prospective teachers]. *Enseñanza de las ciencias*, 22(2), 263–274.
- Estrada, A., Batanero, C., & Lancaster, S. (2011). Teachers' attitudes towards statistics. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 163–174). New York: Springer.
- Gal, I., Ginsburg, L., & Schau, C. (1997). Monitoring Attitudes and Beliefs in Statistics Education. In I. Gal & J. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37–51). Amsterdam: IOS Press & The ISI.
- Gómez-Chacón, I. (2000). *Matemática Emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático* [Emotional Mathematics. Affects in mathematical learning]. Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones.
- Goldin, G., Hannula, M., Heyd-Metzuyanim, E., Jansen, A., Kaasila, R., Lutovac, S., Di Martino, P., Morselli, F., Middleton, J., Pantziara, M. y Zhang, Q. (2016). *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education*. Springer.
- Groth, R., & Meletiou-Mavrotheris, M. (2018). Research on Statistics Teachers' Cognitive and Affective Characteristics. In D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 327–355). Cham: Springer
- Hannigan, A., Gill, O., & Leavy, A. (2013). An investigation of prospective secondary mathematics teachers' conceptual knowledge of and attitudes towards statistics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(6), 427–449.
- Harradine, A., Batanero, C., & Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 235–246). New York: Springer.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* [Investigation methodology]. México DF: McGraw-Hill.
- Lloret-Segura, S., Ferreres-Traver, A., Hernández-Baeza, A., & Tomás-Marco, I. (2014). El análisis factorial exploratorio de los ítems: una guía práctica, revisada y actualizada [Exploratory Factor Analysis: A practical, revised and updated guide]. *Anales de psicología*, 30, 1151–1169.
- Makar, K., Bakker, A., & Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 152–173.
- Makar, K., & Rubin, A. (2014). Informal statistical inference revisited. In K. Makar, B. de

- Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9)*, Arizona, USA. The Netherlands: ISI.
- Makar, K., & Rubin, A. (2009). A framework for thinking about informal statistical inference. *Statistics Education Research Journal*, 8(1), 82-105.
- Martins, J. A., Estrada, A., Nascimento, M. M., & Comas, C. (2015). Actitudes hacia la Estadística de los Profesores: Un camino a recorrer [Teachers' Attitudes towards Statistics: A way to go]. In J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina-Portillo, ... M. López-Marín (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria 2* (pp. 101–107). Granada: University of Granada.
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575–596). Reston, Virginia: NCTM.
- MINEDUC. (2009). *CURRICULUM. Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la Educación Básica y Media* [Curriculum. Fundamental objectives and mandatory minimum contents of Basic and Middle Education]. Santiago: MINEDUC.
- MINEDUC. (2012). *Bases Curriculares Educación Básica* [Basic Education Curriculum]. Santiago: MINEDUC.
- MINEDUC. (2015). *Bases curriculares 7° a 2° medio* [7 to 10 grade curricular basis]. Santiago: MINEDUC.
- MINEDUC. (2019). *Bases Curriculares 3° y 4° Medio* [11 to 12 grade curricular basis]. Santiago: MINEDUC.
- Nasser, F. (2004). Structural Model of the Effects of Cognitive and Affective Factors on the Achievement of Arabic-Speaking Pre-service Teachers in Introductory Statistics. *Journal of Statistics Education*, 12(1).
- Nolan, M. M., Beran, T., & Hecker, K. G. (2012). Surveys assessing students' attitudes toward statistics: A systematic review of validity and reliability. *Statistics Education Research Journal*, 11(2), 103–123.
- OECD. (2014). Indicator D6: What does it take to become a teacher? In *Education at a Glance 2014 Education at a Glance 2014: OECD Indicators*
- Onwuegbuzie, A. J. (1998). Teachers Attitudes toward statistics. *Psychological Reports*, 83, 1008–1010.
- Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' Beliefs and Affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257–315). Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing.
- Rossman, A. (2008). Reasoning about Informal Statistical Inference: One Statistician's View. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 5-19.
- Rossman, A., & Chance, B. (2014). Using simulation-based inference for learning introductory statistics. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 6(4), 211-221.
- Ruz, F., Molina-Portillo, E., Vásquez, C., & Contreras, J. M. (2020a). Attitudes towards Probability and its Teaching in prospective mathematics teachers from Chile and Spain. *Acta Scientiae*, 22(2), 48-66.
- Ruz, F., Molina-Portillo, E., & Contreras, J. M. (2020b). Actitudes hacia la estadística descriptiva y su enseñanza en futuros profesores [Attitudes towards descriptive statistics and its teaching in prospective teachers]. *Cadernos de Pesquisa*, 50(178), 964-980.
- Ruz, F., Chance, B., Medina, E. y Contreras, J.M. (in press). Content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching in pre-service Chilean mathematics teachers. *Statistics Education Research Journal*.
- Schau, C. (2003). *Survey of Attitudes Toward Statistics (SATS-36)*. Available at <https://www.evaluationandstatistics.com/>
- Schau, C., Stevens, J., Dauphinee, T., & Del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the survey of attitudes toward statistics. *Educational and Psychological*

- Measurement*, 55(5), 868–875.
- Shaughnessy, J. M. (1992). Research in probability and statistics: Reflections and directions. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 465–494). New York: Macmillan Publishing.
- Tatto, M. T., Peck, R., Schwille, J., Bankov, K., Senk, S. L., Rodriguez, M., ... Rowley, G. (2012). *Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics in 17 Countries: Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*.
- Tishkovskaya, S., & Lancaster, G. A. (2012). Statistical Education in the 21st Century: a Review of Challenges, Teaching Innovations and Strategies for Reform. *Journal of Statistics Education*, 20(2), 1–24.
- Valle, J. M., & Jesús, M. (2011). La nueva formación inicial del profesorado de Educación Secundaria: modelo para la selección de buenos centros de prácticas [The new initial training for Secondary Education Teachers: a model to choose good schools for trainees]. *Revista de Educación*, 354, 267-290.
- Vásquez, C., Alvarado, H., & Ruz, F. (2019). Actitudes de futuras maestras de educación infantil hacia la estadística, la probabilidad y su enseñanza [Attitudes of future teachers of childhood education towards statistics, probability and its teaching]. *Educación Matemática*, 31(3), 177-202.
- Watson, J., & Chance, B. (2012). Building Intuitions about Statistical Inference Based on Resampling. *Australian Senior Mathematics Journal*, 26(1), 6-18.
- Wise, S. L. (1985). The development and validation of a scale measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 45, 401–405.
- Yang, K. L. (2012). Investigating mathematics teachers' thoughts of statistical inference. *Research in Mathematics Education*, 14(3), 299-300.
- Zan, R., Brown, L., Evans, J., & Hannula, M. (2006). Affect in Mathematics Education: An Introduction. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 113-121.
- Zieffler, A., Garfield, J., Delmas, R., & Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 40-58.
- Zientek, L. R., Carter, T. A., Taylor, J. M., & Capraro, R. M. (2011). Preparing Prospective Teachers: An Examination of Attitudes Toward Statistics. *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education*, 5(1), 25–38.

Appendix

Table 8

ASCT' Scale and sample results

Item (*Reversed item)	D		P		I	
	M	SD	M	SD	M	SD
D/P/I = Descriptive statistics/Probability/statistical Inference						
1) I have fun in classes where D/P/I is explained.	3.7	1.05	3.8	0.98	3.6	1.02
2) I use D/P/I information or tools when making decisions.	3.5	1.06	3.8	0.98	3.2	1.13
*3) It will be hard for me to teach D/P/I contents.	3.2	1.26	3.2	1.23	2.9	1.18
4) D/P/I content help to understand today's world.	4.2	0.84	4.1	0.88	4.1	0.89
5) I like D/P/I, it is a topic that has always interested me.	3.4	1.17	3.6	1.11	3.3	1.15
6) D/P/I is easy.	3.1	1.18	3.0	1.15	2.5	1.00
*7) I have never used D/P/I outside a scientific context.	3.6	1.23	3.7	1.17	3.3	1.28
8) I master the main D/P/I contents.	3.5	1.03	3.6	0.96	3.1	1.04
9) I am sure I will enjoy teaching about D/P/I in the school.	3.8	1.06	3.8	1.05	3.5	1.11
10) I think I will know how to detect and correct misunderstandings and difficulties of the students about D/P/I content.	3.7	0.92	3.7	0.93	3.3	1.04

*11) I will only teach D/P/I if there is time after teaching the other topics.	4.3	0.92	4.3	0.94	4.1	1.03
*12) D/P/I content is useless.	4.7	0.70	4.7	0.69	4.7	0.67
*13) D/P/I content do not have as much value as other mathematics topics.	4.4	0.93	4.4	0.91	4.4	0.95
14) It will be easy for me to design assessing activities about D/P/I content.	3.1	1.01	3.1	1.01	2.8	0.99
15) I use D/P/I tools in everyday life.	3.4	0.99	3.5	0.96	3.0	1.06
*16) I feel intimidated about information that involve D/P/I.	3.6	1.08	3.5	1.11	3.2	1.13
*17) D/P/I content are understood only by people of the scientific area.	4.1	0.92	4.1	0.94	3.9	1.12
*18) I avoid reading information where D/P/I' terms appear.	4.1	0.96	4.2	0.91	4.0	0.99
19) Knowledge about D/P/I help students to reason critically.	4.3	0.77	4.3	0.82	4.3	0.82
20) More time should be devoted to teaching D/P/I content in early grades of education.	4.2	0.91	4.2	0.87	4.0	1.01
*21) I am concerned about knowing how to answer my students' questions about D/P/I.	1.9	1.08	2.0	1.11	1.9	1.01
*22) I don't feel prepared to solve any problem about D/P/I.	3.0	1.21	2.9	1.19	2.7	1.15
*23) I think I will not be able to prepare appropriate teaching resources for classes on D/P/I contents.	3.6	1.11	3.6	1.08	3.3	1.15
24) When appropriate, I will use D/P/I tools in other axes of math curriculum that I teach.	3.9	0.89	4.0	0.86	3.8	0.92
*25) If I could remove some topics from the math curriculum it would be D/P/I.	4.5	0.82	4.6	0.81	4.4	0.90
*26) I don't have much interest in teaching D/P/I content, even though they appear in the curriculum.	4.3	0.96	4.3	0.94	4.2	1.01
*27) I don't like to solve D/P/I problems.	3.9	1.10	3.9	1.10	3.7	1.09
28) As a prospective teacher, I think I will feel comfortable teaching D/P/I.	3.6	1.05	3.7	1.02	3.3	1.04

Source. Own elaboration

Table 9

Post-hoc analysis between total scores towards each stochastics topic

Topic (I)	Topic (J)	Mean diff. (I-J)	SE	p-value (Tukey's HDS)	95% CI	
					Lower	Upper
Descriptive	Probability	-0.016	0.024	0.498	-0.062	0.030
	Inference	0.221	0.027	0.000*	0.167	0.275
Probability	Descriptive	0.016	0.024	0.498	-0.030	0.062
	Inference	0.237	0.026	0.000*	0.185	0.289
Inference	Descriptive	-0.221	0.027	0.000*	-0.275	-0.167
	Probability	-0.237	0.026	0.000*	-0.289	-0.185

* p -value < 0.05

Introduction

Recently, stochastics knowledge has been considered a necessary part of the cultural heritage in order to function effectively in society (Batanero & Borovcnik, 2016; Ben-Zvi & Makar, 2016a; Ben-Zvi, Makar, & Garfield, 2018). We use the term *stochastics* to refer simultaneously to statistics and probability, and thus to emphasize the mutual dependence of knowledge and reasoning between these two domains (Batanero, 2019). The incorporation of stochastics education into the mathematics curricula of many countries has boosted its teaching at different levels of compulsory education (for example, Chile: Ministry of Education [MINEDUC], 2009, 2012, 2015; and USA: National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; www.corestandards.org/Math). Such curricular modifications have established new demands and challenges for the teachers responsible for teaching statistics and probability. Adding stochastics to the middle and high school mathematics curriculum requires different knowledge at a didactic and disciplinary level, as well as changes in teacher disposition and interest in teaching stochastics; however, the literature suggests that in general teachers are not sufficiently prepared, and many do not feel competent in their abilities to teach stochastics (Batanero, Burrill, & Reading, 2011; Groth & Meletiou-Mavrotheris, 2018).

Students, in this case pre-service teachers, react positively or negatively to a stochastics learning situation depending on their beliefs about themselves and about the content. If the situation is repeated several times, producing the same type of emotional reaction (frustration, satisfaction, etc.) this could become an attitude (Estrada, 2002; Gómez-Chacón, 2000). Negative attitudes, can in turn impact teachers' willingness to address the study of statistical content outlined in the curriculum, and their willingness to improve their understanding of the content. As Groth and Meletiou-Mavrotheris (2018) highlighted, there are several attitude-related hypotheses awaiting strong empirical support. For example, in studies of the impact of attitudes on teachers' content knowledge, researchers have found moderate to low association between these aspects (Estrada, 2002; Hannigan, Gill, & Leavy, 2013; Nasser, 2004; Zientek, Carter, Taylor, & Capraro, 2011). Negative attitudes toward statistics appear to be clearly detrimental, but there seems to be a limit on the extent to which positive attitudes relate to increased knowledge (Hannigan et al., 2013). Groth and Meletiou-Mavrotheris claim that one possible cause of limited evidence of correlations between attitudes and knowledge among pre-service and in-service teachers is the lack of instruments designed specifically for teachers.

⁸ Ruz, F., Chance, B., Medina, E. & Contreras, J.M. (in press). Content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching in pre-service Chilean mathematics teachers. *Statistics Education Research Journal*.

Therefore, in this paper we are interested in further exploring the possible connections between stochastics content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching. We wanted to see whether a lack of association between knowledge and attitudes, as found in Hannigan et al. (2013), also applies to pre-service Chilean mathematics teachers, but, following the recommendations of Groth and Meletiou-Mavrotheris (2018), we utilized scales designed specifically for mathematics teachers. In the following sections we discuss the theoretical foundations of our study, our sample and the instruments used to assess pre-service teachers' content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching, and our results. We end with discussion of how these results compare to previous research, and how they guide our recommendations for Chilean mathematics teachers' training and professional development. We chose to conduct our study in Chile to contrast with previous research in the northern hemisphere and to take advantage of the access we had to half the institutions that train mathematics teachers in that country, as a result of their interest in our research. Therefore, our results can provide an example of assessing the current state of pre-service teaching, as well as serve as a baseline for future comparisons as teacher preparation programs adapt to these new curricular demands on Chilean teachers.

Framework

Content knowledge. To explore teachers' content knowledge, we used the teachers' Didactic-Mathematical Knowledge [DMK] model (Godino, 2009; Pino-Fan & Godino, 2015), which is based on the theoretical-methodological tools of Onto-Semiotic Approach [OSA] (Godino, Batanero, & Font, 2007), and whose application to statistics is developed in Godino, Ortiz, Roa, & Wilhelmi (2011). The DMK model characterizes the teachers' knowledge from three dimensions: (1) the Mathematical Dimension, related to content knowledge; (2) the Didactical Dimension, related to pedagogical content knowledge; and (3) the Meta Didactic-Mathematical Dimension, related to knowledge about norms, meta-norms, and reflection on practice. The Mathematical Dimension, is built on the perspectives of Shulman (1986, 1987) and the Learning Mathematics for Teaching [LMT] project (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Hill, Ball, & Schilling, 2008), common frameworks in mathematics education (Ponte & Chapman, 2016).

In the case of statistics, the trend has been similar. For example, Callingham and Watson (2011) built their Teacher Knowledge for Teaching Statistics model based on Shulman's perspective. Burgess (2011, 2012) and Groth (2007) recognized two types of content knowledge necessary for teaching statistics, Common Knowledge and Specialized

Knowledge. Subsequently, Groth (2013) added a third component to the subject matter knowledge dimension of his model called Horizon Knowledge, from LMT perspective. Lee et al. (2014) proposed the Technological Pedagogical Statistical Knowledge model, where the Statistical Knowledge is referred to the understanding of why and how statistical investigations are carried out, from Wild and Pfannkuch (1999)'s perspective. Nevertheless, in analyzing content knowledge, these proposals have some drawbacks. For example, Groth (2013) recognized the three types of subject matter knowledge in the LMT framework, but it can be difficult to tease apart specialized knowledge from Pedagogical Content Knowledge [PCK], like knowledge of content and students (Callingham & Watson, 2011). Similarly, distinguishing between specialized and common knowledge is not always trivial (Groth, 2013; Noll, 2011), and the perspective of Lee et al. is more general regarding the development of statistical thinking.

In the DMK model, a clearer differentiation is established regarding the content knowledge necessary to teach statistics, as the theoretical perspective of this model assumes that knowledge for teaching is entirely specialized and unique to the teacher (didactical dimension), but it is sustained on the basis of solid content knowledge (mathematical dimension), and together enable teachers to reflect on their practice of teaching (meta didactic-mathematical dimension). The Mathematical Dimension considers two types of knowledge, common and extended, as illustrated in Table 1. The *common* term is used in a different way than Ball et al., as it is a shared knowledge between the teacher and the students, so it is common between both of these constituents, not generally with everyone. At the same time, this interpretation is different from that conceptualized by Groth (2007) because it is referring to the knowledge of school statistics specific to the grade where it is taught, and not to the skills developed in conventional courses in general.

Table 1

Mathematical dimension categories of DMK model

Category	Description
Common Content Knowledge	Mathematical knowledge sufficient to solve problems and tasks covered in the Chilean mathematics curriculum and textbooks from grades 7 to 12 (MINEDUC, 2012, 2015, 2019)
Extended Content Knowledge	Knowledge of the mathematics content that comes later in the school curriculum, e.g., knowledge of stochastics beyond grade 12, and is included in content standards for teachers (MINEDUC & CREIP, 2012)

Source. Own elaboration from Pino-Fan and Godino (2015, p. 97)

Regarding *extended* knowledge, our interpretation reformulates the LMT framework and Groth's perspective on Horizon Knowledge by differentiating based on educational level. Therefore, in our case, when referring to the statistical training of teachers, we will differentiate between common and extended knowledge with respect to the current school curriculum.

Attitudes. We used McLeod's perspective on the affective domain which "refers to a wide range of beliefs, feelings, and moods that are generally regarded as going beyond the domain of cognition" (McLeod, 1992, p. 576). We used the term affect in general and considered emotions, beliefs, and attitudes as their main descriptors, although our focus of interest was the latter. In addition, as there is no unanimity in the definition of attitude (Auzmendi, 1992; Estrada, 2002; Estrada, Batanero, & Lancaster, 2011; Gómez-Chacón, 2000; McLeod, 1992; Philipp, 2007), we adopted the definition proposed by Philipp (2007):

[Attitudes are] manners of acting, feeling, or thinking that show one's disposition or opinion. Attitudes change more slowly than emotions, but they change more quickly than beliefs. Attitudes, like emotions, may involve positive or negative feelings, and they are felt with less intensity than emotions. Attitudes are more cognitive than emotion but less cognitive than beliefs. (p. 259)

There is a large amount of research related to the assessment of students' attitudes to predict their academic performance in stochastics courses, and to monitor attitudinal changes before and after instruction (Carmona, 2004; Nolan, Beran, & Hecker, 2012), however, literature on teachers' attitudes, both pre- and in-service, is scarce (Estrada et al., 2011). Furthermore, Groth and Meletiou-Mavrotheris (2018) highlighted that the field has not yet made a strong distinction between "teachers' attitudes toward statistics" and "attitudes toward teaching statistics." Usually, those who analyze teachers' attitudes *towards statistics* follow some generic theoretical approach that can be applied in the general population (Estrada et al., 2011; Hannigan et al., 2013; Nasser, 2004; Zientek et al., 2011). While those who have been interested in teachers' attitudes *towards teaching statistics* have based on frameworks that consider the specific characteristics of teachers' tasks when teaching statistics (Aparicio & Bazán, 2006; Estrada, Batanero, & Fortuny, 2004; Martins, Estrada, Nascimento, & Comas, 2015).

In our efforts to assess teachers' attitudes we followed the theoretical perspective of Estrada et al. (2018) who recognize that teachers' attitudes are a multidimensional construct that can be analyzed according to seven components of attitudes, organized in three dimensions. On this basis, Estrada et al. proposed the Attitudes' Scale Towards Probability and its Teaching [ASTP] (Estrada & Batanero, 2015; Estrada et al., 2018). This scale is based on

the earlier Scale of Attitudes towards Statistics for Teachers [EAEE] (Estrada, 2002), but has better psychometric characteristics (Estrada & Batanero, 2020; Ruz, Molina-Portillo, Vásquez, & Contreras, 2020), and most importantly, the ASPT perspective separately assesses teachers' attitudes towards the content (dimension 1) and towards its teaching (dimension 2), as well as their interaction through the value assigned to both (dimension 3). Previous research using the ASTP has shown mostly positive attitudes in pre-service teachers' from elementary (Vásquez, Alvarado, & Ruz, 2019) and primary school (Estrada & Batanero, 2020; Estrada et al., 2018), and with pre- and in-service mathematics' teachers (Alvarado, Andaur, & Estrada, 2018; Ruz et al, 2020).

Finally, agreeing with Estrada et al. (2018) and Veloo and Chairhany (2013), we considered it important to identify the attitudes of pre-service teachers about the topics they will teach. Therefore, following the way in which stochastics content is organized within the Chilean mathematics curriculum, and in most of stochastics courses for teachers, we differentiated between three content areas: descriptive statistics [D], probability [P], and statistical inference [I], to delve into whether current programs are more successful with some components than others. In order to do this, we expanded the instrument to address each content area separately by asking the same questions for each area, according to the components presented in Table 2.

Content Knowledge and Attitudes. As Tishkovskaya and Lancaster (2012) pointed out, content knowledge and a positive attitude towards statistics are both critical for effective teaching. Most of the studies that have evaluated these content knowledge and attitudes simultaneously have done so in distinct ways. Teachers' content knowledge has been commonly assessed according to the grades earned in stochastics courses, or with knowledge tests such as the Statistical Reasoning Assessment ([SRA], Garfield, 2003) or the Comprehensive Assessment of Outcomes in Statistics ([CAOS], delMas, Garfield, Ooms, & Chance, 2007). With attitudes, the trend has been to use some of the classic instruments, such as the Survey of Attitudes Toward Statistics ([SATS-28]: Schau, Stevens, Dauphinee, & Del Vecchio, 1995; [SATS-36]: Schau, 2003), or to propose a new instrument that also considers attitudes towards teaching, such as the scale EAEE for teachers (Estrada, 2002). In Table 3, we summarize the results from several key studies.

Table 2

Description of the components of attitudes considered

Dimension	Component	Description/Example item
1. Attitudes toward Stochastics content	Affective [AS]	Feelings, positive or negative, towards stochastics content (e.g., I enjoy descriptive statistics [D]).
	Cognitive Competence [CCS]	Self-perception with regards to self-competence, knowledge, and intellectual skills when applied to stochastics content (e.g., Probability is easy [P]).
	Behavioural [BS]	Tendency to use stochastics tools when convenient (e.g., I use inferential statistics tools in everyday life [I]).
2. Attitudes towards teaching Stochastics content	Affective [AT]	Personal feelings, positive or negative, about teaching the content (e.g., I am sure I will enjoy teaching about descriptive statistics in the school [D]).
	Didactical Competence [DTS]	Teacher's perception of their own ability to teach the content (e.g., It will be hard for me to teach probability [P] (reverse scored)).
	Behavioural [BTS]	Values the tendency to teach or have taught the content compared to other materials of the school curriculum (e.g., I will only teach inferential statistics [I] if there is time after teaching the other topics (reverse scored)).
3. Value of the content and its teaching	Value [VTS]	Appreciation of the usefulness, relevance, and importance of stochastics content and its teaching in personal and professional life (e.g., Probability [P] is only useful for games of chance (reverse scored)).

Source. Own elaboration from Estrada and Batanero (2015, pp. 241-242)

Table 3

Main research results on knowledge and attitudes towards statistics in teachers

Reference	Participants	Knowledge	Attitudes	Correlations (att. component)
Estrada (2002)	367 pre-service Spanish teachers	9 items of SRA test (mean of 12.1 out of 19 points)	SATS-28 (total mean score of 88.7 out of 140 points)	0.09 (difficulty) to 0.26 (cognitive), and 0.23 (total)
Nasser (2004)	162 pre-service Israelite teachers	10 open-ended questions (mean of 85.38 out of 100 points)	24 items of SATS-28 (weighted average of 4.66 out of 7 points)	0.11 (difficulty) to 0.28 (cognitive)
Aparicio and Bazán (2006)	87 Peruvian teachers	Performance in an introductory statistics course	EAAE (mean of 83.49 out of 125 points)	0.22 (total in post test)
Zientek et al. (2011)	95 pre-service US teachers	Performance in a professional development program (87.03 out 100 points)	SATS-36 (weight mean of 3.29 out of 5 points)	0.14 (difficulty) to 0.49 (affective)
Hannigan et al. (2013)	104 pre-service Irish teachers	CAOS test (mean of 45 out of 100 points)	SATS-36 (weight mean of 4.94 out of 7 points)	-0.02 (effort) to 0.19 (cognitive)

Source. Own elaboration from literature review.

For most of these studies, findings on the association between attitudes and content knowledge of teachers have been elusive. Estrada (2002) and Aparicio and Bazán (2006) reported low correlations (0.22 and 0.23 respectively) among participants with (on average) moderate responses in both scales. Nasser (2004) and Zientek et al. (2011) report higher mean achievement in content knowledge by their participants (mean of 85-87% of achievement) and average attitudes slightly higher than indifference's theoretical value, however, the intensity of the association between both content and attitudes differed between them. For example, in the affective component (feelings concerning statistics) shared by both SATS-28 and SATS-36 scales, Nasser reported a weak correlation of 0.17 whereas Zientek et al. report a value of 0.49. This variation in results could be explained by their use of different measures of content knowledge. The pre-service teachers studied by Hannigan et al. (2013) had lower content knowledge (mean of 45% of achievement) but mostly positive attitudes, which translated into a weak association between the two. In summary, previous research highlights that good content knowledge is strongly and positively related to positive attitudes towards statistics; however, the association loses intensity when content knowledge is sufficient (slightly higher than the expected value) and the attitudes are more indifferent, or when knowledge is deficient, even when pre-service teachers attitudes are mostly positive.

In this way, stronger content knowledge seems to be a reasonable predictor of positive attitudes towards statistics, but not vice versa. Therefore, we were interested in exploring these same associations with a sample of pre-service Chilean mathematics teachers. Knowledge of whether/how these aspects are related can have implications for teachers' training and professional development. In particular, our research questions are:

1. What is the stochastics content knowledge of pre-service Chilean mathematics teachers, and does it differ for Common and Extended knowledge and/or content areas considered?
2. What is the nature of pre-service Chilean mathematics teachers' attitudes towards stochastics and its teaching? Are there attitudinal differences depending on the content area considered?
3. Is there a relationship between stochastics content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching? Do these associations differ within the three content areas and/or based on previous training?

Method

Context and Participants. Chilean applicants for teaching positions must have a teaching qualification from a university or a professional institute that is appropriate to the level at which they plan to teach. The General Education Law defines teaching qualifications in terms of a licentiate degree (equivalent to a bachelor's degree) in education, and a teaching entitlement. In most institutions, the requirements for the degree and the entitlement are completed simultaneously following a *concurrent model*, and this degree is called a Pedagogy in Mathematics degree. A smaller number of Chilean institutions follow the *consecutive model*, with one to two years continuing studies programs for graduate students (OECD, 2014). The teacher preparation process is regulated by the MINEDUC through the Center for Improvement, Experimentation, and Pedagogical Research [CPEIP]. For example, for the 2019 academic year, a total of 30 Chilean universities offered the Pedagogy in Mathematics degree (www.cned.cl), where usually each institution formulates their own study plans, generating a varying set of courses and training opportunities. Nevertheless, since 2012, MINEDUC and CPEIP have established national standards on the fundamental knowledge and skills that must be promoted by the centers to train effective teachers for grades 7 to 12 (MINEDUC & CPEIP, 2012). From this perspective, every year since 2016 they have organized the National Diagnostic Evaluation of Teachers' Initial Training [ENDFID] for all pre-service teachers who are twelve months away from graduation to diagnose their initial training.

The full sample for this study consisted of 269 Chilean pre-service mathematics teachers (150 men and 119 women, aged between 19 and 51, with an average age of 23.8 years), enrolled in 15 of the 30 universities in Chile that prepare pre-service mathematics teachers. Although the sampling was not probabilistic, we attempted to match the graduation rates of the geographical areas of the country, based on the announcement from the ENDFID (www.diagnosticafid.cl). In this sense, the 269 participants can be organized according to the geographical area: North = 18 (6.7%); Central = 177 (65.7%); South and Austral = 74 (27.5%). Regarding prior training, all the participants had taken all the required courses covering the stochastics content in their curricula but the number of required courses differs across the universities, and not all of the courses taken had been approved (passed). In Table 4, we present the number of courses passed for the participants, according to the number of courses required in their respective universities.

Table 4*Number (and %) of participants according to the number of courses required*

Number of required courses	Passed courses			
	0	1	2	3
0 ($n = 8$)	0 (0)	2 (25.0)	2 (25.0)	4 (50.0)
1 ($n = 36$)	5 (13.9)	31 (86.1)	-	-
2 ($n = 195$)	10 (5.1)	23 (11.8)	162 (83.1)	-
3 ($n = 30$)	0 (0)	2 (6.7)	7 (23.3)	21 (70.0)

Source. Own elaboration

The first row of Table 4 applies to the one university in our sample following the *consecutive model*. This graduate program does not require stochastics training, so the students reported the number of courses they passed as undergraduates. The second row shows that among those who have one required course in their *concurrent* model, five (13.9%) have taken the course but have not yet passed it, and 31 (86.1%) did. In addition, for those who have at least one required course in their university ($n = 261$), approximately 82% have already passed all courses in the planned stochastics content.

We used this classification to organize the participants according to their previous training, but the interesting thing is the content of these courses. Thanks to the collaboration of the institutions that participated in this study, we had access to the details of their stochastic training programs. Participants with one required course were enrolled in universities from the north (50%) and center (50%) geographical zone of the country. This individual course focuses on exploratory data analysis, with slight coverage of classical probability, and culminates with a brief discussion of parameter estimation. The group with two required courses is the largest. Most of these participants were enrolled in a university from the central zone of the country (69.7%), while the rest are part of institutions from the south zone (30.3%). In these institutions, the first course is intended to introduce exploratory data analysis and classical probability theory, while the second focuses on the modeling of random phenomena through probability distributions and culminates with statistical inference elements such as sampling distributions and parameter estimation. Among those who have taken three courses on stochastics, half came from institutions in the south of Chile, and the rest from the center area. In these cases, the first course is intended to develop skills to explore and describe data, the second focuses on probability from a more mathematical perspective in the framework of measurement theory and finite mathematics, while the third focuses entirely on statistical inference. In this last course, in addition to reviewing the classical estimation methods, the course culminates with some non-parametric estimation techniques.

Instruments. As motivated in Framework, the instrument we developed consisted of two sections, the Scale of Common and Extended Stochastics Content Knowledge [CESK] and the Scale of Attitudes towards Stochastics Contents and its Teaching [ASCT].

CESK scale. For the design of this instrument, we followed the recommendations of Batanero and Díaz (2005). Prior research about teachers' content knowledge has highlighted the need to promote understanding of key stochastics concepts (Pfannkuch & Ben-Zvi, 2011; Ruz, Díaz-Levicoy, Molina-Portillo, & Ruiz-Reyes, 2018). Much of this research has focused on the understanding of specific stochastics objects (Batanero et al., 2011; Batanero & Chernoff, 2018; Ben-Zvi & Makar, 2016b; Ben-Zvi et al., 2018; Burrill & Ben-Zvi, 2019; Garfield & Ben-Zvi, 2008), where difficulties and deficiencies have been reported systematically, showing that this content can be difficult for novice students as well as pre-service teachers. This motivated us to design an instrument that considered various key topics of stochastics, such as found in the SRA (Garfield, 2003) and the CAOS test (delMas et al., 2007), but built from the recommendations on the content knowledge that should be promoted in the stochastics training of mathematics teacher.

We carried out a Content Analysis (Krippendorff, 1990) of the local and international requirements on the statistical education of teachers (Franklin et al., 2015; MINEDUC & CPEIP, 2012). Results were organized in the *Guide of Didactic Suitability of Instructional Processes in Statistical Didactics* [GDS-ISD] (Ruz, Molina-Portillo & Contreras, 2019), where the Content Knowledge requirements were synthesized through 23 indicators included in the *Statistical content* component from the Epistemic dimension of the GDS-ISD. Some indicators were not considered in this assessment, such as teachers knowing and applying the statistical problem-solving process (Franklin et al., 2015), as these indicators were not consistent with the current Chilean training programs. Traditionally these programs have been based on accumulation of concepts and procedures, rather than a focus on problem solving and data wrangling. We obtained a total of 20 stochastics content learning objectives for mathematics teachers' education (Appendix 1).

With these 20 learning objectives, we used previous literature and instruments to build an item bank, from which we selected a set of three items for each learning objective, 60 in total. To analyze the degree to which the item effectively represents what is intended to be measured (Content Validity) we contacted ten experts in Statistics Education (all Ph.D.'s with more than seven years of research experience in this area) to evaluate, on a five-step Likert scale (1-very inappropriate and 5-very appropriate), the relationship between an item and the

desired learning objective, and to verify that the answers were correct. Among the three items for each learning goal, we selected the one with the highest mean agreement score and lowest spread among the experts' ratings (Fleiss Kappa index of 0.605, *moderate-substantial* agreement, Landis & Koch, 1977). This gave us the 20 items for the first version of the CESK scale.

Subsequently, we applied this version of the scale to a pilot sample of 126 pre-service math teachers from Chile (21 men and 21 women) and Spain (49 men and 35 women) (Ruz, Molina-Portillo, & Contreras, 2020a). Items ranged from easy to difficult (% of correct answers between 0.9 and 0.1), and showed adequate discrimination (biserial correlation coefficient higher than 0.2) and sufficient reliability (Cronbach's $\alpha = 0.564$). From these results, we adjusted aspects of the implementation, such as the time allowed, as well as the instrument. In particular, we modified some response options to make sure that only one was correct in each item, and also altered some unpopular distractors.

Finally, each item was classified according to the stochastic content area (descriptive statistics [D], probability [P], and statistical inference [I]), and to the DMK content knowledge category (Common or Extended). For example, the first item assesses the objective "Match different representations to explore, summarize, and describe patterns in univariate data," and should be solvable by grade 8 students, where "evaluate the way the data is presented, comparing the information from the same data represented in different representations" (MINEDUC, 2015, p. 115) is promoted – common knowledge. In contrast, the second item assesses the ability to "estimate the correlation coefficient between two variables based on their graphical representation," which is not part of the school curriculum, but is promoted in teacher training standards such as "calculate and interpret the correlation coefficient in linear regression and understand the meaning of influential point and atypical point" (MINEDUC & CPEIP, 2012, p. 124) – extended knowledge. The final version of CESK scale is included in Appendix 2.

ASCT scale. The ASCT scale consists of 28 items, four items in each of the seven components of the ASTP, each offered on a five-step Likert scale (from 1-*strongly disagree* to 5-*strongly agree*). Each item was written separately for each of the three stochastics content areas (Appendix 3), and respondents selected their choices for each area on a separate answer sheet (for example see Figure 1).

Figure 1

Fragment of the ASCT scale' answers sheet

ITEM	DESC. STAT.					PROBABILITY					INFERENCE				
I enjoy the lesson in which Descriptive/ Probability/ Inferences contents is explained	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5

Source. Own elaboration

Fourteen items are expressed affirmatively (e.g., “I enjoy the lesson in which statistics/probability/inference contents is explained” that is part of the AS component) and the other 14 are presented negatively (e.g., “If I could remove some content from the math curriculum it would be statistics/probability/inference” from the BTS component). Scores on the negative items were reversed before analysis, so higher scores always correspond to more positive attitudes. In the pilot study, the scales had considerable reliability (Pedhazur & Pedhazur, 1991; Santiesteban, 2009) for each content area (Cronbach’ alpha of 0.899 (D), 0.879 (P), and 0.856 (I)) (Ruz, Molina-Portillo, & Contreras, 2020b).

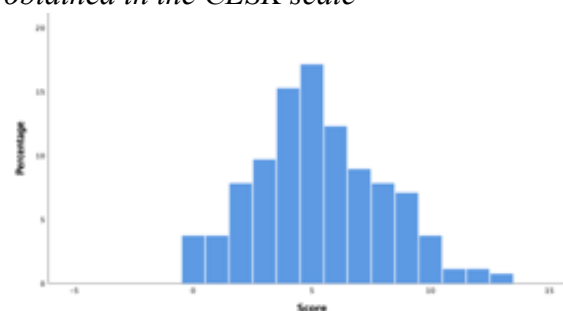
Results

Content Knowledge. Overall, the scores (Figure 2) obtained in the questionnaire ranged from 0 to 13 points (out of 20 possible), with a mean of 5.29 points and a standard deviation of 2.72 points. Cronbach’s alpha, 0.571, was slightly higher than in the pilot study and still sufficient for this type of evaluation (Pedhazur & Pedhazur, 1991; Santiesteban, 2009).

The proportion of correct answers for each item ranged from 0.05 for item 15, which evaluated an application of Bayes’ theorem, to 0.59 for item 11 which evaluated the ability to compare the distribution of data between two groups. Next, we explore the proportion of correct responses out of the 6-7 items for each content area (Figure 3a), and out of 10 items for each DMK content knowledge categories (Figure 3b).

Figure 2

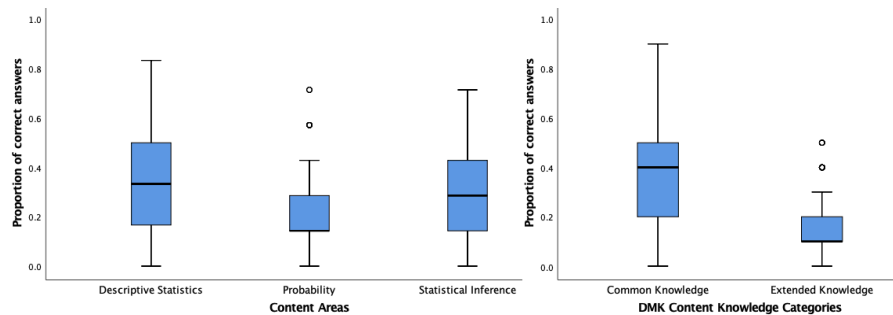
Histogram of the scores obtained in the CESK scale



Source. Own elaboration

Figure 3

Boxplots for the proportion of correct answers according to (a) Content Areas, and (b) DMK categories



Source. Own elaboration

According to the content areas (Figure 3a) we note a higher median score (0.333) for the items on descriptive statistics, and the lowest median score for the probability content (0.142). As we expected, results were higher for common knowledge with a median of four correct questions out of 10, and lower for the extended knowledge, with a median of just one correct item (Figure 3b). We also found lower variability for the probability content and the extended knowledge category respectively; that is, in general, our participants demonstrated consistently low performance across these items. In Table 5, we compare our results on the 10 items of common content knowledge with the original source, reporting the number (and percentage) of subjects who answered the question correctly on each case.

Table 5

Number (%) correct for Common knowledge items according to previous and our studies

Item	Area	Reference and item position in previous research	Previous results	Our results (n = 269)
1	D	delMas et al. (2007), item 33	303 (41.5%)	112 (41.6%)
3	P	Wroughton and Cole (2013) item 1, 3, and 9	36 (28.6%)*	65 (24.2%)
4	P	Gómez et al. (2014, p. 214)	66 (82.5%)	119 (44.2%)
5	I	Allen (2006, p. 418), item 11	71 (42.0%)	135 (50.2%)
6	D	Own elaboration (ítem 5, Ruz et al., 2020a)	75 (59.5%)*	137 (50.9%)
9	I	Olivo (2008, p. 174), item 4	108 (42.9%)	90 (33.5%)
10	I	delMas et al. (2007), item 35	318 (44.2%)	56 (20.8%)
11	D	delMas et al. (2007), item 11, 12, and 13	642 (85.3%)	158 (58.7%)
13	P	Contreras (2011, p. 179), item 2	63 (32.1%)	55 (20.4%)
20	P	Tauber (2001, p. 181), item 12	77 (77.8%)	60 (22.3%)

Note. *Data from our pilot study. Previous source did not report empirical results.

Our pre-service teachers struggled the most with an item asking to distinguish dependent, independent, and mutually exclusive events (item 13, probability), with 20.4% of subjects responding correctly. These results were lower than those reported by Contreras (2011) with 196 Spanish primary pre-service teachers (32.1% correct). The modal response, with 27.5%, corresponded to the misconception of confusing exclusive and independent events. Our subjects showed better performance when comparing the variability between groups through an exploratory data analysis (item 11, descriptive statistics), although the results were also lower than those obtained in the post-instruction application of the CAOS test with 753 American university students (item 12, 85.8% correct). One fifth of our subjects demonstrated the misconception that groups cannot be compared when the sample sizes are not equal (20.4% of responses). The greatest variation between the previous study and our results occurred on the item evaluating the ability to recognize the characteristic shape of the Normal curve (item 20, probability). Our subjects (22.3%) showed worse performance than the 99 Spanish university students of Human and Social sciences analyzed by Tauber (2001) (77.8% responding correctly). Most of our pre-service teachers (26.0%) chose the option of a wrong interpretation of the empirical rule (three-sigma rule) citing that for a Normal distribution 50% of the observations will fall within one standard deviation of the mean, instead of 68.3 %.

In Table 6, we compare our results with those previously studies for the 10 items evaluating *Extended Content Knowledge*.

For these 10 items, our participants showed the lowest performance on the item about Bayes' theorem (item 15, probability) with only 4.8% answering correctly. These results were slightly lower than those reported by Contreras (2011) with Spanish primary prospective teachers (7.7%). Our subjects mostly showed the misconception of confusing conditional and joint probability (selected by 52.0% of the full sample). Better performance was shown when subjects were asked to establish the statistical hypothesis from a research question (item 7, statistical inference) with 32% answering correctly. This result was lower than those reported by Vallecillos (1994) with 436 Spanish university students (68.6% correct). In this case, 33.4% of participants make the mistake of setting hypothesis in the wrong way (33.4% of selections). Item 12 was designed by the authors, but it underwent changes after its pilot implementation, so we do not have prior information on its use.

Table 6*Number (%) correct for Extended knowledge items according previous and our studies*

Item	Area	Reference and item position in previous research	Previous results	Our results (n = 269)
2	D	Allen (2006, p. 420), item 15	161 (52.5%)	56 (20.8%)
7	I	Vallecillos (1994, p. 181), item 3	298 (68.6%)	86 (32.0%)
8	P	Contreras (2011, p. 183), item 6	46 (23.5%)	34 (12.6%)
12	I	Own elaboration	-	24 (8.9%)
14	D	delMas et al. (2007), item 14	256 (34.3%)	74 (27.5%)
15	P	Contreras (2011, p. 178), item 1	15 (7.7%)	13 (4.8%)
16	I	delMas et al. (2007), item 25, 26, and 27	388 (54.5%)	40 (14.9%)
17	D	delMas et al. (2007), item 22	391 (52.6%)	47 (17.5%)
18	P	Cruz-Ramirez et al. (2014, p. 1127)	24 (19.1%)*	42 (15.6%)
19	I	delMas et al. (2007), item 28, 29, and 30	535 (74.3%)	22 (8.2%)

Note. *Data from our pilot study. Previous source did not report empirical results.

In addition, the item with the greatest variation between the prior study and our results, corresponds to the item differentiating between correct and incorrect interpretations of confidence level (item 19, statistical inference). Our participants (8.2%) showed worse performance than the 720 American university students analyzed by delMas et al. (2007). It is interesting to note that in the original CAOS instrument, 74.3% of students could recognize a correct interpretation as valid, but had more difficulty recognizing incorrect interpretations as invalid. When forced to select only one version as correct (as in our instrument), participants struggled substantially. Many of our participants misinterpreted level of confidence as the percentage of the sample between the confident limits (32.3% of selections).

Attitudes. First, as shown in Table 7, we examined the total attitude score (across the 28 5-point Likert items) for each content area (max possible 140). Then we averaged the three content areas for a global measure of attitudes towards stochastics and its teaching (again max possible 140). We only consider cases where no response was omitted, which explains the different values of *n* in Table 7. The global measure of attitudes towards stochastics and its teaching (last row of Table 7) ranged from 75 to 132 points on average, with a mean of 103.34 points and a standard deviation of 11.36 points. From this we can observe that most participants declare positive attitudes towards each of the content areas, with more than 80% of our prospective teachers giving total scores that exceed the theoretical value of indifference (84 points, for answering 3 for all 28 items).

Table 7*Distribution of ASCT scale according to content area results*

Content	n	Median	Mean	SD	Percentile 20
Descriptive Statistics	242	103.50	104.61	13.87	93.00
Probability	237	107.00	105.57	12.88	94.00
Statistical Inference	232	99.00	99.00	12.48	89.00
Global (Mean)	230	102.17	103.34	11.36	93.33

Source. Own elaboration

We also note that the median and mean scores are higher for probability and lower for statistical inference, similar to the pilot study results (statistical inference mean 96.7 out 140 points, compared to 102.5 and 104.4 for descriptive and probability respectively). For reliability, we obtained a Cronbach's alpha of 0.864, which is considered more than adequate (Pedhazur & Pedhazur, 1991; Santiesteban, 2009).

Next, we grouped the results according to the different attitude components (Table 2), using each student's mean score obtained for the four items of each component (for a maximum response of 20 points) as is shown in Figure 4.

Summary statistics are presented in Table 8, accompanied by the number of valid responses in each case. From these results, we note that the attitudes of these participants were mostly positive throughout the seven components. Not only are the median scores above the indifference position, so are the 30th percentiles, indicating that at least 70% of the participants assigned scores of at least 12 points across the four questions for all seven components. The highest medians correspond to value towards stochastics content and its teaching (VTS) and behavior towards teaching the content (BTS), as these pre-service teachers appeared to value the stochastics content in the curriculum and plan to teach it. On the other hand, the lowest medians correspond to the cognitive competence (CCS) towards the stochastics content and didactic competence (DTS) towards its teaching. These prospective teachers considered their intellectual mastery of stochastics content less positively, as well as their didactic ability to carry out the teaching.

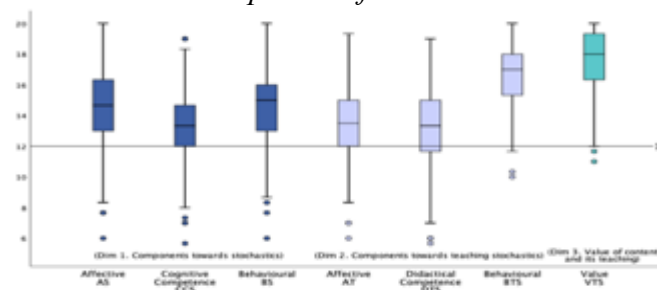
Figure 4*Boxplots on the average scores in each component of the ASCT scale**Source.* Own elaboration

Table 8*Summary statistics of the components and the total ASCT scale scores*

Dimension	Attitudes' components	<i>n</i>	Median	SD	Percentile 30
1. Towards stochastics content	Affective [AS]	258	14.50	2.77	13.00
	Cognitive Competence [CCS]	260	13.00	2.52	12.00
	Behavioural [BS]	260	14.67	2.54	13.00
2. Towards teaching stochastics	Affective [AT]	263	13.33	2.37	12.00
	Didactical Competence [DTS]	256	13.00	2.68	12.00
	Behavioural [BTS]	257	17.00	1.98	16.00
3. Value of content and its teaching	Value [VTS]	256	18.00	2.05	16.70

Source. Own elaboration

Content Knowledge and Attitudes. Next, we analyzed the possible relationships between knowledge and attitudes toward stochastics content and its teaching (averaged across the three content areas). As we can see in Figure 5, a generally positive association is observed: when the overall ASCT score is below average, the performance on the CESK scale was generally also lower. To further the analysis, in Table 9 we present the Pearson correlation coefficients between the different attitude components, the DMK content knowledge categories, and the total scores of each scale. Considering absolute correlations between 0.2 and 0.4 to be moderate, between 0.1 and 0.2 to be low, and below 0.1 to be inconclusive, we note that the overall score on the ASCT scale is moderately correlated with common knowledge and weakly correlated with extended knowledge (last row of Table 9). Also, a slightly positive linear relationship was obtained between the overall results of the CESK scale and each of the individual attitude components (last column of Table 9), although the intensity of these correlations was low in five of them (AT, DTS, CCS, AS, and BS), and inconclusive for BTS and VTS which, as shown in Table 8 were those with a larger average score and less dispersion.

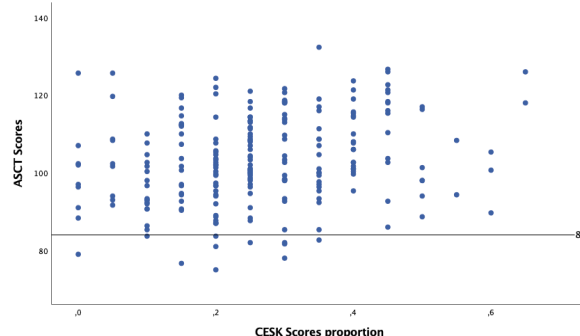
Figure 5*Scatterplot of ASCT and CESK proportions correct (with line at indifference attitude value)**Source.* Own elaboration

Table 9*Correlation coefficients between the ASCT components and the CESK categories*

ASCT Components	DMK content knowledge categories		
	Common [CKSC]	Extended [EKSC]	Total
Affective [AS]	0.155	0.143	0.181
Cognitive Competence [CCS]	0.133	0.133	0.161
Behavioural [BS]	0.238	0.081	0.213
Affective [AT]	0.133	0.072	0.131
Didactical Competence [DTS]	0.142	0.100	0.152
Behavioural [BTS]	0.075	0.043	0.075
Value [VTS]	0.127	-0.024	0.081
Total	0.222	0.164	0.239

Source. Own elaboration

In other words, participants tended to rate the value and behavior of stochastics teaching highly, regardless of their performance in the content knowledge questions. For the other items, with less consistency in subjects' attitudes, there were weak but positive correlations with their knowledge.

When considering the correlations between the Common Knowledge (CKSC) category and the different components of attitudes (second column of Table 9), we noted positive low to moderate results for six of the attitude components, with a higher correlation for the BS component (those who better understand the content are more likely to apply the content in everyday situations). In other words, the participants with stronger common content knowledge tended to have more positive attitudes. The seventh inconclusive correlation refers to the behavioural component towards teaching the content (BTS). Subjects tended to give higher scores for their commitment in teaching the content, regardless of their knowledge of school stochastics.

When considering the results for the Extended Knowledge (EKSC) category and the components of the ASCT scale (third column of Table 9), the correlations were all lower for EKSC compared to CKSC, and conclusive for just two of them (AS and CCS). In other cases, even though we previously saw mostly positive results in the use of stochastics (BS), affective (AT), didactic competence (DTS), behaviour (BTS), and value (VTS) towards teaching the content, these attitudes do not appear strongly related to the participants' level of knowledge about the stochastics that go beyond the school curriculum (which was generally low). In this sense, given that the scores were so low for EKSC, the lack of correlations with ASCT components could have been due to a floor effect.

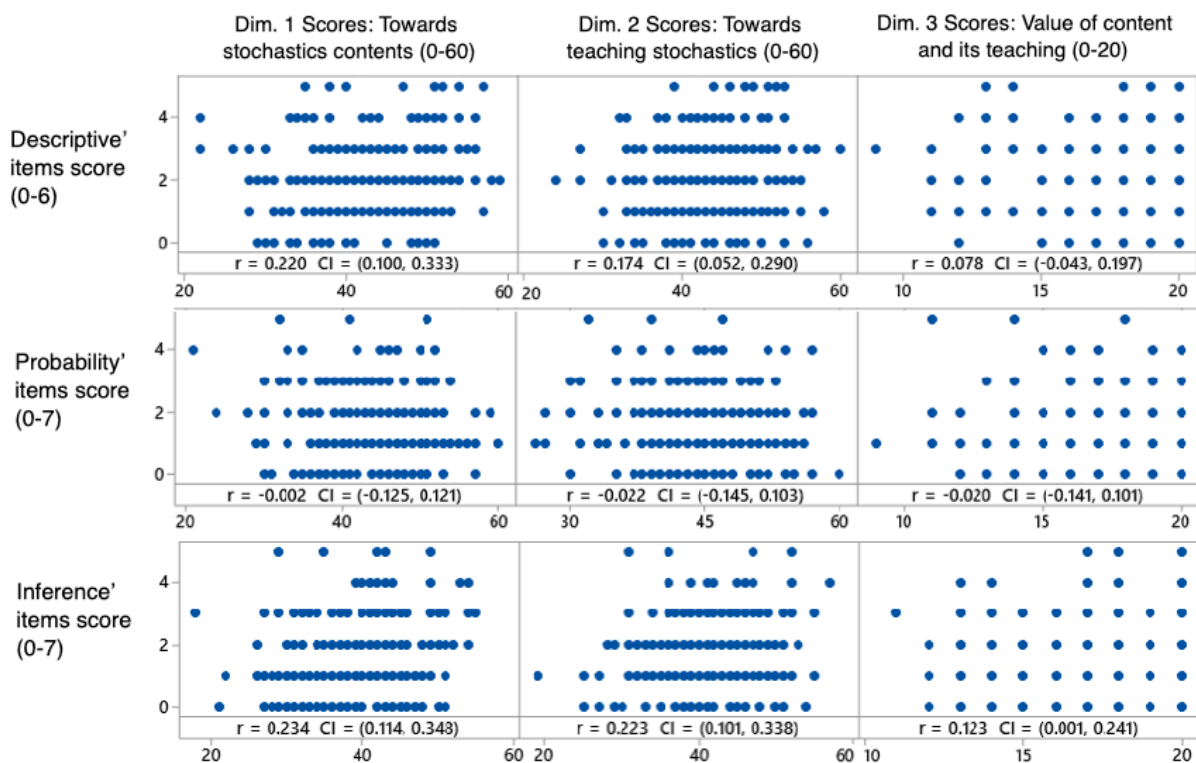
To delve into how or whether these associations differ within each content area, we explored the relationship between knowledge about the different content areas and the three dimensions of attitudes' components considered in Table 2 (towards stochastics contents,

towards teaching stochastics, and value of content and its teaching). For each person, we looked at the total score of the six (descriptive statistics) or seven (probability and statistical inference) questions in that content area, and the corresponding attitude dimension's score towards each of the three-content area (Figure 6).

For example, there was a moderate positive correlation (0.220) between the attitudes *towards* Stochastics-Descriptive Statistics content (total across 60 points in 12 items of first dimension) and the performance on the six Descriptive Statistics questions. This correlation was slightly lower with regard to their attitudes towards *teaching* Descriptive Statistics content (0.174), and inconclusive with regard to the *value* of Descriptive Statistics content and its teaching (0.078). In other words, participants who performed better on the Descriptive Statistics items tended to be more likely to learn that content and to teach it, but were not more likely to use it in their own lives (most students tended to value that content regardless of their own performance).

Figure 6

Scatterplots of CESK content area and ASCT scale dimensions scores



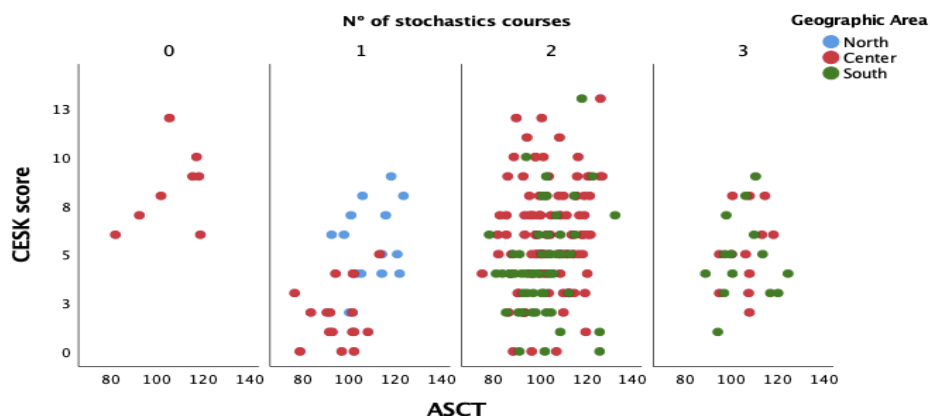
Source. Own elaboration

In the probability area, the situation was totally different, where none of the correlations were conclusive, and actually show slightly negative coefficients. The first two attitude dimensions' patterns were different compared to those obtained in the descriptive statistics area, but showed a similar trend in the value dimension. In this case, the subjects highly favored the *value* of probability to face everyday situations regardless of the knowledge demonstrated on the seven items in this content area. Participants tended to show more positive attitudes for probability (Table 7), but their performance on those items were generally low (Figure 3a). As with the results on EKSC, the lack of correlations could have been due to a floor effect. For the statistical inference question, we found a moderate positive correlation between the performance on the seven Statistical Inference questions and the attitudes *toward* this content area (0.234), and the attitudes towards *teaching* Stochastics-Inference content (0.223). Participants' attitudes towards learning and teaching inference content tended to be higher for those who performed stronger on the content questions. In the value dimension, the behavior was similar to the descriptive statistics questions, although in this case the correlation was slightly higher. That is, our subjects valued inference content and its teaching regardless of their performance in the knowledge items on this topic.

Finally, in Figure 7 we explored the relationship between knowledge and attitudes towards stochastics according to the previous training of the participants (Table 4). Further, in Table 10 we present some summary statistics about the total score in CESK scale, the global measure of attitude from the ASCT scale, and the relationship between them, separated according to the number of stochastics courses required in the initial training of the participants.

Figure 7

Scatterplots of CESK and ASCT scores according to number of required courses



Source. Own elaboration

Table 10

Summary statistics of CESK and ASCT scores, according to previous training

Required courses	CESK scale (0-20)			ASCT scale (0-140)			Relationship	
	<i>n</i>	Mean	SD	<i>n</i>	Mean	SD	<i>n</i>	Pearson corr.
0	8	8.38	2.07	8	106.29	13.60	8	0.387
1	36	3.94	2.73	31	102.19	11.98	31	0.545
2	195	5.46	2.69	165	103.06	11.47	165	0.184
3	30	5.00	2.12	26	105.60	9.12	26	0.151

Source. Own elaboration

The group of students with zero required courses in stochastic content correspond to the participants who followed the *consecutive* model of initial training, belonging to a university in the central zone of Chile. These subjects had higher knowledge scores and higher attitude scores, and the correlation between them was stronger than previously reported (Table 9). That is, most of the participants (except for a couple of cases, see Figure 7) with better performance on the knowledge scale expressed more positive attitudes towards stochastic and its teaching, or vice versa; but this is for just eight subjects. Participants with one required course showed the lowest mean scores on the CESK and ASCT scale, but the highest correlation of those reported in this study (0.545). We can observe a more defined linear upward trend for these subjects (Figure 7), reflecting that most of those with worse performance on the knowledge scale declared less positive attitudes on the ASCT scale (and vice versa). The largest group is the one with two required courses. These participants obtained the highest mean score on the CESK scale, and the mean score on the ASCT scale was slightly higher than for those who complete only one stochastics course. The association between the CESK and ASCT scales for this subgroup did not reflect a clear linear trend (Figure 7), which is reinforced by the low but positive correlation obtained (0.184). The last group included the subjects who had taken three courses on stochastics. The results (Table 10) show that the mean score on the knowledge scale was slightly lower than the previous group, but in terms of attitudes, these were the highest among those who follow the concurrent training model. The correlation coefficient was the lowest, reflecting that participants who declared the more positive attitudes towards stochastic and its teaching did not necessarily correspond with those with the best performance on the knowledge scale.

Discussion

Addressing the Research questions. Teachers need a solid understanding of the content they will teach (Ball et al., 2008; Godino, Giacomone, Batanero, & Font, 2017), so that

their weaknesses do not have negative implications for classroom instruction and student learning. For the first research question, we explored the performance showed by participants using the *Common and Extended Stochastics Knowledge* [CESK] scale (Appendix 1). We found that the content knowledge of these pre-service teachers was generally poor, with slight differences according to the content areas in which we organized stochastics (highest mean score was in the descriptive statistics content area, and lowest was in the probability area), but in all cases insufficient for the local requirements of these professionals (Figure 3a). Although more than 80% of the participants had already passed all their required stochastics courses (Table 4), the majority had not yet mastered the topics they will be teaching (Table 5) or the extended knowledge of school stochastics (Table 6). These findings support recent ENDFIP (CPEIP, 2018, 2019) studies which reported worse results in stochastics and geometry, and better in calculus and algebra. While we expected lower performance in extended knowledge, this indicates these teachers will have difficulty broadening their perspective on the content they are teaching, reflecting on and enhancing their teaching, and helping students connect topics. Furthermore, the Chilean school curriculum (Comunicaciones CIAE, 2018; MINEDUC, 2019) appears to be moving towards more “extended knowledge” content expectations (e.g., big data techniques are planned to be included in the last levels of compulsory education), highlighting the importance of keeping up-to-date the readiness of pre-service teachers for teaching the school curricula. It appears that the stochastics courses currently taken by prospective teachers in Chile need to be reformulated to improve the disciplinary training of these education professionals.

For the second research question, we used the *Attitude towards Stochastics Contents and its Teaching* [ASCT] scale (detailed in Table 2). Overall results (Table 7) showed that participants tended to have positive attitudes (higher than the indifference score), following patterns seen in previous research (Aparicio & Bazán, 2006; Alvarado et al., 2018; Estrada, 2002; Estrada et al., 2004; Estrada et al., 2018; Hannigan et al., 2013; Martins et al., 2015; Ruz et al., 2020; Vásquez et al., 2019; Zientek et al., 2011). For the seven individual attitude components (Table 8), we also saw positive attitudes with the lowest median score (13 points) belonging to Cognitive Competence towards the stochastics content and Didactic Competence towards its teaching, and the highest median score (18 points) to the Value towards stochastics content and its teaching. These pre-service teachers agreed the content is important, but also did not feel very comfortable in their content knowledge and skills to teach it.

Regarding the results in each content area (Table 7), our participants assigned higher mean attitude scores towards probability and descriptive statistics, but lower towards statistical inference (although greater than indifference position, in all cases). Further research will

explore how these differences in attitudes by content area manifest across the different components of the ASCT scale (Figure 3), and include qualitative analysis of reasons behind these different perceptions.

Consequently, our results are most similar to those of Hannigan et al. (2013) with a sample of Irish pre-service mathematics teachers—weak content knowledge and mostly positive attitudes toward statistics. Hannigan et al. mainly attributed their results to the fact that in Ireland stochastic training for teachers has a strong emphasis on mathematics. They concluded that their participants' scores may be reflecting positive attitudes toward mathematics rather than statistics, and because the two disciplines are different, then it is not surprising to find the absence of a relationship between attitudes towards mathematics and performance on statistics items. The mathematical emphasis is similar in Chile and we may again be seeing teachers' attitudes towards mathematics instead of stochastics. This would also explain the more positive attitudes towards probability content in our sample compared to the more statistical content areas. Moreover, even though Estrada and Batanero (2008) concluded that the main reason for negative attitudes by prospective teachers was due to a lack of preparation or knowledge about stochastics content, our results were the opposite. It seems that more positive attitudes are not a strong predictor of better performance.

For the third research question, we used the results on both scales, CESK and ASCT. Overall, the correlation between the total scores of both instruments was 0.239, positive and conclusive for this sample (Table 9 and Figure 4). This correlation was as low as in previous research (Aparicio & Bazán, 2006; Estrada, 2002; Hannigan et al., 2013; Nasser, 2004; Zientek et al., 2011), but it reflected behavior again similar to Hannigan et al. (2013). Furthermore, considering the relationship between the total score on the ASCT scale and the results for the *common* and *extended knowledge* variables, participants with stronger common content knowledge tended to have more positive attitudes, but for the extended knowledge category, attitudes did not appear strongly related to the subjects' level of knowledge about the stochastics that go beyond the school curriculum (which was generally low). The results on the total score in the CESK scale (content knowledge) correlated positively but weakly with all the components of attitudes considered, but was less conclusive with the behavioral towards teaching stochastics (BTS) and the value of content and its teaching (VTS) components. It seems that the participants tended to rate the value and behavior of stochastics teaching highly, regardless of their performance in the content knowledge questions.

Regarding the relationship between knowledge about the different content areas and the attitudinal dimensions towards the contents, its teaching, and the value given to both (Figure 5), again the correlations were low. Results on the association in the *descriptive statistics*

content area were positive but weak. Participants had positive attitudes towards this content even with low knowledge. However, their knowledge was less useful in predicting their (high) attitudes towards teaching the material. For the *probability* content area, correlations were very weak and even negative. Some students with higher probability content knowledge scores had below average (but positive) attitudes. In this sense, given the high positivity of the attitudes declared towards this area (Table 7) and the low performance in the items on this knowledge (Figure 2a), the lack of correlations could be due to a floor effect. In the *statistical inference* area, the correlations between content knowledge and attitude scores were back to being generally positive but weak, as in the descriptive statistics area. Participants who performed better on knowledge items tended to be more willing to learn and teach this content (Figure 5). This situation may be due to the fact that attitudes towards inference were less positive than towards descriptive statistics, as was the knowledge demonstrated in the items on this topic. Lastly, results in the *value* towards stochastics and its teaching' dimension the association was inconclusive in all three content areas considered, perhaps because most of our pre-service teachers' tended to value learning and teaching stochastics, even with weaker understanding of the material.

Regarding previous training, we can see that the performance and attitudes of the participants varied according to their degree program (Figure 6). The association between demonstrated knowledge and declared attitudes was stronger for those who had taken only one course on stochastics, and it becomes less intense for those who took two or three courses respectively. Therefore, a recommendation for future study is to review the assessment results with the participating pre- or in-service teachers, to see how they judge their own knowledge, and to explore why they did not do better on some of the content knowledge questions from a qualitative perspective. It would also be interesting to know why some of those who seem to understand the material better had below average attitudes. Maybe they better understand the limitations and subtleties of the methods, but maybe they also think many of the more subtle nuances will be difficult, less appealing topics to teach.

Finally, we posit that the weak association between attitudes and conceptual knowledge presents an opportunity for improving content knowledge; with generally positive attitudes these teachers should be motivated and open to further their understanding. And we propose to begin with those components and content areas where their disposition was less positive, such as in the cognitive (content knowledge) and didactic (knowledge for teaching) components, and the probability and inference areas. Therefore, in the following section we propose some recommendations for the stochastics education of Chilean mathematics teachers to strengthen

their content knowledge, and at the same time continue to promote a positive attitude to the content and its teaching.

Recommendations. As future teachers, the participants of this study represent a substantial number of professionals who will soon teach stochastics in Chileans schools. And because most of them will not take additional university level courses in this content, we cannot expect teachers' content knowledge and attitudes to improve without systematic improvements to teacher preparation programs and ongoing support for these professionals. Based on the main results of this study, where subjects tended to have positive attitudes regardless of their content knowledge, we provide the following suggestions.

- *Reorganize the disciplinary training in stochastics topics* for both content that teachers must teach in secondary school (common knowledge), as well as the extensions of this content (extended knowledge). Teachers' training institutions that plan 1 to 3 stochastics subjects dedicate at most 6% (3/50) of the entire curriculum to stochastics (www.cned.cl). Furthermore, these courses usually promote traditional teaching (based on a hierarchical accumulation of concepts, which are learnt in a linear sequence), which tends to be more mathematical in nature, often losing sight of the importance of aspects such as context and variability when facing stochastics problems. As Batanero & Díaz (2012) state "stochastics knowledge is more complex and systemic, so stochastics problems must include much more interpretative activities than other areas of mathematics" (p. 7). Statistical thinking is different from mathematical thinking, and a strong background in mathematics does not necessarily translate to an adequate statistical thinking, as Hannigan et al. (2003) concluded with pre-service Ireland secondary mathematics teachers.
- *Promote content knowledge and content knowledge for teaching simultaneously.* Currently, most programs in Chile require at least one course on stochastics, but only one-third of these universities (10 out of 30) require a course about teaching stochastics (Ruz, Molina-Portillo, & Contreras, 2020c). This could explain the lack of confidence for teaching stochastics demonstrated by our participants. Teachers' training in stochastic content should model the effective pedagogical practices these teachers should be using in their future classes. In particular, priority should be given to the use of real data to develop the understanding of the central ideas of stochastics; to detecting the main characteristics that make stochastics different from mathematics; to reflecting on good practices for teaching stochastics, including identifying the reasoning and common misconceptions of students; to developing new methodologies to assess this content, such as the use of projects; and to

promoting the use and mastery of various technological resources to introduce simulation and streamline efforts to compute procedures of interest.

- *Utilize modern approaches to develop stochastic reasoning.* We propose that in order to improve this situation, training institutions should consider some modern approaches to develop adequate stochastics reasoning. For example, organize the teaching of statistics through the problem-solving process ([GAISE]: Franklin et al., 2005) or statistical investigation method ([PPDAC enquiry cycle: Problem, Plan, Data, Analysis, Conclusion]: Wild & Pfannkuch, 1999). Or based on Pfannkuch et al.'s (2016) SWAMTU Probability Modeling Cycle (Situation (Problem), Want-to-know (motivation), Assumptions (ideas about system dynamics), Model (applying structure), Test (does the model make sense?), and Use (apply the model)), we propose that in order to develop students' reasoning of probability and the modeling of random phenomena, it is essential that teachers' education promote a balanced view of probability from both mathematical (symbolic structure and theory) and empirical (use of simulation to provides insights through visualizations of randomness and random processes, and the ability to study more complex systems for which there are currently no theoretical results) perspectives. Thus, core ideas such as randomness and conditioning (items with lower performance by our participants) can be improved. Another option could be a simulation-based introduction to statistical inference approach, where simulations are used to introduce sampling variation and the reasoning of statistical estimation intuitively and informally, without requiring students to first learn the more detailed mathematical underpinnings. The main idea of this approach can be synthesized by Cobb's three Rs: Randomize data production; Repeat by simulation to see what is typical; and Reject any model that puts the data in its tail (Cobb, 2007). Some examples that have systematized these ideas into full curricula are Lock et al. (2017) and Tintle et al. (2016). In particular, these approaches allow consideration of statistical inference earlier in teacher training. This allows learners to focus on the entire statistical process, rather than differentiating and separating descriptive statistics, probability, and statistical inference.

In summary, we specifically suggest that Chilean universities update their stochastics curricula for initial training to include more recent recommendations to better prepare these teachers, such as those mentioned above. In those approaches, the content covered is very similar to a traditional course, but the content has been introduced in context through genuine applications, where changes in pedagogy focus on active learning based on students' explorations. From our perspective, this update should ideally stop differentiating between

courses focusing on stochastics or teaching stochastics for teachers, but such discussions should be integrated and promoted simultaneously. And also focus on affective aspects that may be developed by learning from teaching practice, deep exploration of stochastics content, and use of technological environments for teaching (Groth & Meletiou-Mavrotheris, 2018). For this purpose, we highlight as valuable the instruments developed in this research, which may be useful to evaluate the effectiveness of potential changes introduced to the stochastics education for teachers. In addition, training institutions, the CPEIP, or schools themselves, should provide professional development opportunities for in-service teachers free of charge, especially in stochastics, during at least the first two years of practice. Providing this professional development after teachers have had the opportunity to experience first-hand students' questions and misconceptions can potentially be more effective. We believe that with such steps, in the near future, mathematics teachers can respond satisfactorily to the demands of stochastics in their professional field.

Acknowledgements: This work was supported by Chilean Government under a Ph.D. Scholarship number 72170025, and by Bill and Linda Frost Fund, through three Frost Undergraduate Student Summer Research awards at California Polytechnic State University.

References

- Allen, K. (2006). *The statistics concept inventory: Development and analysis of a cognitive assessment instrument in statistics*. University of Oklahoma.
- Alvarado, H., Andaur, G., & Estrada, A. (2018). Actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza: un estudio exploratorio con profesores de matemática en formación y en ejercicio de Chile [Attitudes towards probability and its teaching: An exploratory study with preservice and inservice mathematics teachers from Chile]. *Revista Paradigma*, XXXIX(2), 36-64.
- Aparicio, A., & Bazán, J. (2006). Actitud y rendimiento en Estadística en profesores peruanos [Attitude and performance in Statistics in Peruvian teachers]. In G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 644-650).
- Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática/estadística en las enseñanzas medias y universitaria. Características y medición* [Attitudes towards mathematics/statistics in middle and tertiary education. Features and measurement]. Bilbao: Mensajero.
- Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Batanero, C. (2019). Thirty years of stochastics education research: Reflections and challenges. In José M. Contreras, María Gea, María López-Martín, & Elena Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-15).
- Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and Probability in High School*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (Eds.). (2011). *Teaching Statistics in school mathematics: Challenges for Teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study*. New York: Springer.

- Batanero, C., & Chernoff, E. (Eds.). (2018). *Teaching and learning Stochastics: Advances in Probability Education Research*.
- Batanero, C., & Díaz, C. (2005). Análisis del Proceso de Construcción de un Cuestionario sobre Probabilidad Condicional. Reflexiones desde el Marco de la TFS [Analysis of the Construction of a Questionnaire on Conditional Probability. Reflections from the TFS Framework]. In D. Ordoñez, C. Batanero, & A. Contreras (Eds.), *Investigación en Didáctica de las matemáticas. I Congreso Internacional sobre Aplicaciones y Desarrollos de la Teoría de las Funciones Semióticas* (pp. 13-36).
- Batanero, C., & Díaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*, 3(1), 3-13.
- Ben-Zvi, D., & Makar, K. (2016a). International perspectives on the teaching and learning of statistics. En D. Ben-Zvi & K. Makar (Eds.), *The Teaching and Learning of Statistics* (pp. 1-10).
- Ben-Zvi, D., & Makar, K. (Eds.). (2016b). *The teaching and Learning of Statistics. International Perspectives*.
- Ben-Zvi, D., Makar, K., & Garfield, J. (Eds.). (2018). *International Handbook of Research in Statistics Education*.
- Burgess, T. (2011). Teacher Knowledge of and for Statistical Investigations. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 259-270).
- Burgess, T. (2012). How Does Teacher Knowledge in Statistics Impact on Teacher Listening? In J. Dindyal, L. P. Cheng, & S. Fong Ng (Eds.), *Mathematics education: Expanding horizons. Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 146-153). Singapore: MERGA.
- Burrill, G., & Ben-Zvi, D. (Eds.). (2019). *Topics and Trends in Current Statistics Education Research: International Perspectives*.
- Callingham, R., & Watson, J. (2011). Measuring Levels of Statistical Pedagogical Content Knowledge. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 283-293).
- Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística [A review of evidence on reliability and validity of attitude and anxiety questionnaires towards statistics]. *Statistics Education Research Journal*, 3(1), 5-28.
- Cobb, G. (2007). The Introductory Statistics Course: A Ptolemaic Curriculum. *Technology Innovations in Statistics Education*, 1(1), 1-16.
- Comunicaciones CIAE. (2018). Proyecto buscará introducir en la enseñanza de las matemáticas conceptos como el big data y la inteligencia emocional [Project will seek to introduce concepts such as Big Data and Emotional Intelligence into school mathematics]. *Noticias CIAE*. Available at: http://www.ciae.uchile.cl/index.php?page=view_noticias&id=1360&langSite=es (Accessed at March 3, 2020).
- Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional* [Evaluation of knowledge and teaching resources about conditional probability in teachers' training] (Doctoral dissertation, University of Granada, Spain).
- CPEIP. (2018). *Resultados Nacionales Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente 2017* [National Results National Diagnostic Evaluation of Initial Teacher Training 2017]. Santiago: CPEIP.
- CPEIP. (2019). *Resultados Nacionales Evaluación Nacional Diagnóstica de la Formación Inicial Docente 2018* [National Results National Diagnostic Evaluation of Initial Teacher Training 2018]. Santiago: CPEIP.

- Cruz-Ramírez, M., Álvarez-Reyes, S., & Pérez-Santos, F. (2014). Sobre la enseñanza de la distribución Poisson en carreras de ingeniería [On teaching Poisson distribution in engineering careers]. *Bolema*, 28(50), 1117-1134.
- delMas, R., Garfield, J., Ooms, A., & Chance, B. (2007). Assessing Students' Conceptual Understanding after a First Course in Statistics. *Statistics Education Research Journal*, 6(2), 28-58.
- Estrada, A. (2002). Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado [Analysis of attitudes and elementary statistical knowledge in teacher training] (Doctoral dissertation, Universitat Autònoma de Barcelona, Spain).
- Estrada, A., & Batanero, C. (2008). Explaining teachers' attitudes towards statistics. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference* (pp. 1-6). Monterrey: ICMI/IASE.
- Estrada, A., & Batanero, C. (2015). Construcción de una escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza para profesores [Building an Attitudes towards Probability and its Teaching Scale for Teachers]. In C. Fernández, M. Molina, & N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 239-247). Alicante: SEIEM.
- Estrada, A., & Batanero, C. (2020). Prospective primary school teachers' attitudes towards probability and its teaching. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(1), em0559.
- Estrada, A., Batanero, C., & Díaz, C. (2018). Exploring Teachers' Attitudes Towards Probability and Its Teaching. In C. Batanero & E. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics, ICME-13 Monographs* (pp. 313-332).
- Estrada, A., Batanero, C., & Fortuny, J. M. (2004). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio [A comparative study of attitudes towards statistics in teachers and prospective teachers]. *Enseñanza de las ciencias*, 22(2), 263-274.
- Estrada, A., Batanero, C., & Lancaster, S. (2011). Teachers' attitudes towards statistics. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 163-174).
- Franklin, C., Bargagliotti, A., Case, C., Kader, G., Scheaffer, R., & Spangler, D. (2015). *Statistical Education of Teachers (SET)*. American Statistical Association (ASA).
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2005). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report. A pre-K-12 curriculum framework*.
- Garfield, J. (2003). Assessing Statistical Reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 2(1), 22-38.
- Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning. Connecting Research and Teaching Practice*.
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas [Mathematics teachers knowledge analysis' categories]. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas [Ontosemiotic Approach of Knowledge and Competence of Mathematics Teacher]. *Bolema*, 31(57), 90-113.
- Godino, J. D., Ortiz, J., Roa, R., & Wilhelmi, M. (2011). Models for Statistical Pedagogical Knowledge. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics - Challenges for Teaching and Teacher Education A Joint ICMI/IASE Study*

- (pp. 271-282).
- Gómez-Chacón, I. (2000). *Matemática Emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático* [Emotional Mathematics. Affects in mathematical learning]. Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones.
- Gómez, E., Batanero, C., & Contreras, J. M. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial [Mathematical knowledge of prospective teacher for teaching probability from frequency approach]. *Bolema*, 28(48), 209-229.
- Groth, R. (2007). Toward a Conceptualization of Statistical Knowledge for Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(5), 427-437.
- Groth, R. (2013). Characterizing Key Developmental Understandings and Pedagogically Powerful Ideas Within a Statistical Knowledge for Teaching Framework. *Mathematical Thinking and Learning*, 15(2), 121-145.
- Groth, R., & Meletiou-Mavrotheris, M. (2018). Research on Statistics Teachers' Cognitive and Affective Characteristics. In D. Ben-Zvi, K. Makar, & J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 327-355).
- Hannigan, A., Gill, O., & Leavy, A. (2013). An investigation of prospective secondary mathematics teachers' conceptual knowledge of and attitudes towards statistics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(6), 427-449.
- Hill, H., Ball, D., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking Pedagogical Content Knowledge: Conceptualizing and Measuring Teachers' Topic-Specific Knowledge of Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: Teoría y práctica* [Content Analysis Methodology: Theory and Practice]. Barcelona: Paidós.
- Landis, J. R., & Koch, G. G. (1977). The Measurement of Observer Agreement for Categorical Data. *Biometrics*, 33(1), 159-174.
- Lee, H., Kersaint, G., Harper, S., Driskell, S., Jones, D., Leatham, K., ... Adu-Gyamfi, K. (2014). Teachers' Use of Transnumeration in Solving Statistical Tasks with Dynamic Statistical Software. *Statistics Education Research Journal*, 13(1), 25-52.
- Lock, R. H., Frazer Lock, P., Lock Morgan, K., Lock, E. F., & Lock, D. F. (2017). *Statistics: Unlocking the power of data* (2nd ed.). New Jersey: John Wiley & Sons.
- Martins, J. A., Estrada, A., Nascimento, M. M., & Comas, C. (2015). Actitudes hacia la Estadística de los Profesores: Un camino a recorrer [Teachers' Attitudes towards Statistics: A way to go]. In J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina-Portillo, ... M. López-Marín (Eds.), *Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria 2* (pp. 101-107).
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). Reston, Virginia: NCTM.
- MINEDUC. (2009). CURRICULUM. Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la Educación Básica y Media [Curriculum. Fundamental objectives and mandatory minimum contents of Basic and Middle Education]. Santiago: MINEDUC.
- MINEDUC. (2012). Bases Curriculares Educación Básica [Basic Education Curriculum]. Santiago: MINEDUC.
- MINEDUC. (2015). *Bases curriculares 7° a 2° medio* [7 to 10 grade curricular basis]. Santiago: MINEDUC.
- MINEDUC. (2019). *Bases Curriculares 3° y 4° Medio* [11 to 12 grade curricular basis]. Santiago: MINEDUC.
- MINEDUC & CPEIP (2012). *Estándares Orientadores para carreras de Pedagogía en Educación Media* [Guiding Standards for Pedagogy careers]. Santiago: CPEIP.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: NCTM.
- Nasser, F. (2004). Structural Model of the Effects of Cognitive and Affective Factors on the

- Achievement of Arabic-Speaking Pre-service Teachers in Introductory Statistics. *Journal of Statistics Education*, 12(1).
- Nolan, M., Beran, T., & Hecker, K. (2012). Surveys assessing students' attitudes toward statistics: A systematic review of validity-reliability. *Statistics Education Research Journal*, 11(2), 103-123.
- Noll, J. (2011). Graduate teaching assistants' statistical content knowledge of sampling. *Statistics Education Research Journal*, 10(2), 48-74.
- OECD. (2014). Indicator D6: What does it take to become a teacher? In *Education at a Glance 2014 Education at a Glance 2014: OECD Indicators*.
- Olivo, E. (2008). Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México [Meaning of Confidence intervals in engineering students from Mexico] (Doctoral dissertation, University of Granada, Spain).
- Pedhazur, E., & Pedhazur, L. (1991). *Measurement, Design, and Analysis*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Pfannkuch, M., & Ben-Zvi, D. (2011). Developing Teachers' Statistical Thinking. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics: Challenges for Teaching and Teacher Education A Joint ICMIIASE Study* (pp. 323-333).
- Pfannkuch, M., Budgett, S., Fewster, R., Fitch, M., Pattenwise, S., Wild, C., & Ziedins, I. (2016). Probability modeling and thinking: What can we learn from practice? *Statistics Education Research Journal*, 15(2), 11-37.
- Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' Beliefs and Affect. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). Charlotte, NC: NCTM & Information Age Publishing.
- Pino-Fan, L., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor [Extended perspective of the Teacher's Didactic-Mathematical Knowledge]. *Paradigma*, XXXVI(1), 87-109.
- Ponte, J., & Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education: Third Edition* (pp. 275-296).
- Ruz, F., Díaz-Levicoy, D., Molina-Portillo, E. & Ruiz-Reyes, K. (2018). Ways to strengthen the statistical literacy, reasoning and thinking in the mathematics teachers training. In M. Sorto, A. White & L. Guyot (Eds.), *Looking back, looking forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 10)*. ISI/IASE.
- Ruz, F., Molina-Portillo, E. & Contreras, J. M. (2019). Guía de Valorización de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Instrucción en Didáctica de la Estadística [Valuation Guide of Didactic Suitability of Instructional Processes in Statistic Didactics]. *Bolema*, 33(63), 135–154.
- Ruz, F., Molina-Portillo, E. & Contreras, J. M. (2020a). Evaluación de conocimientos sobre el contenido de estadística descriptiva en futuros profesores de matemáticas [Assessing descriptive statistics content knowledge in pre-service mathematics teachers]. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 18, 55-71.
- Ruz, F., Molina-Portillo, E. & Contreras, J. M. (2020b). Actitudes hacia la estadística descriptiva y su enseñanza en futuros profesores [Attitudes towards descriptive statistics and its teaching in pre-service teachers]. *Cadernos de Pesquisa*, 50(178), 964-980.
- Ruz, F., Molina-Portillo, E. & Contreras, J. M. (2020c). Idoneidad didáctica de procesos de instrucción programados sobre didáctica de la estadística [Didactical Suitability of Planned Training Processes on Statistical Education]. *PNA. Revista de investigación en Didáctica de la Matemática*, 14(2), 141-172.
- Ruz, F., Molina-Portillo, E., Vásquez, C. & Contreras, J. M. (2020). Attitudes towards Probability and its Teaching in preservice mathematics teachers from Chile and Spain. *Acta Scientiae*, 22(2), 48-66
- Santesteban, C. (2009). *Principios de Psicometría* [Principles of Psychometry]. Madrid:

Síntesis.

- Schau, C. (2003). *Survey of Attitudes Toward Statistics (SATS-36)*. Available at <https://www.evaluationandstatistics.com/>
- Schau, C., Stevens, J., Dauphinee, T., & Del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the survey of attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 55(5), 868-875.
- Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Tauber, L. (2001). La construcción del significado de la distribución normal a partir de actividades de análisis de datos [Construction of the meaning of normal distribution from data analysis activities] (Doctoral dissertation, University of Seville, Spain).
- Tintle, N., Chance, B., Cobb, G., Rossman, A., Roy, S., Swanson, T., & VanderStoep, J. (2016). *Introduction to Statistical Investigations*. John Wiley & Sons, Ltd.
- Tishkovskaya, S., & Lancaster, G. A. (2012). Statistical Education in the 21st Century: a Review of Challenges, Teaching Innovations and Strategies for Reform. *Journal of Statistics Education*, 20(2), 1-24.
- Vallecillos, A. (1994). Estudio teórico experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios [Theoretical-Experimental study of errors and knowledge about statistical contrast of hypotheses in university students] (Doctoral dissertation, University of Granada, Spain).
- Vásquez, C., Alvarado, H., & Ruz, F. (2019). Actitudes de futuras maestras de educación infantil hacia la estadística, la probabilidad y su enseñanza [Attitudes of future teachers of childhood education towards statistics, probability and its teaching]. *Educación Matemática*, 31(3), 177-202
- Veloo, A., & Chairhany, S. (2013). Fostering students' attitudes and achievement in probability using teams-games-tournaments. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 93, 59-64.
- Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-248.
- Wroughton, J., & Cole, T. (2013). Distinguishing between binomial, hypergeometric and negative binomial distributions. *Journal of Statistics Education*, 21(1), 1-16.
- Zientek, L. R., Carter, T. A., Taylor, J. M., & Capraro, R. M. (2011). Preparing Prospective Teachers: An Examination of Attitudes Toward Statistics. *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education*, 5(1), 25-38.

Appendix 1

Learning objectives of the CESK scale items according to the content area and DMK content knowledge category they evaluate.

N	Content	DMK	Learning Objective
1	D	CCK	Match different representations to explore, summarize, and describe patterns in univariate data.
2	D	ECK	Estimate the correlation coefficient between two variables based on their graphical representation.
3	P	CCK	Differentiate between application of different discrete probability distributions.
4	P	CCK	Evaluate likely amount of random variation of a probability experiment

5	I	CCK	Apply the Law of Large Numbers in problem solving.
6	D	CCK	Deduce the behavior of a data distribution from summary statistics.
7	I	ECK	Establish the statistical hypothesis from a research question.
8	P	ECK	Calculate a conditional probability
9	I	CCK	Recognize factors that influence the width of a confidence interval.
10	I	CCK	Recognize the effect of sample size on the variability of the sampling distribution.
11	D	CCK	Compare the variability between groups through exploratory data analysis.
12	I	ECK	Interpret and apply the logic of statistical hypothesis statements.
13	P	CCK	Distinguish dependent, independent, and mutually exclusive events.
14	D	ECK	Estimate and compare standard deviations for different data distribution.
15	P	ECK	Use Bayes' theorem in problem solving.
16	I	ECK	Recognize correct and incorrect interpretations of p-value.
17	D	ECK	Distinguish between correlation and causality.
18	P	ECK	Apply the main properties of Poisson' distribution in problem solving.
19	I	ECK	Identify errors in the interpretation of confidence level.
20	P	CCK	Recognize the characteristic shape of the Normal curve.

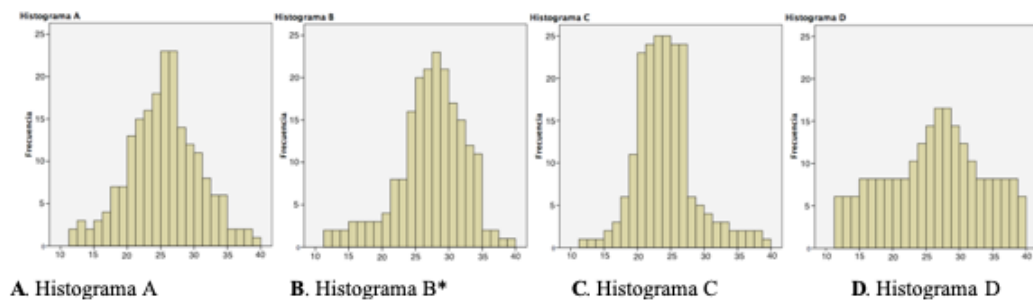
Appendix 2

CESK Scale

1) Un estudio examinó la longitud de una cierta especie de pez en un lago. El plan era tomar 200 peces y examinar los resultados. En la siguiente tabla se muestran algunos estadísticos de resumen sobre la longitud de los peces, en milímetros (mm).

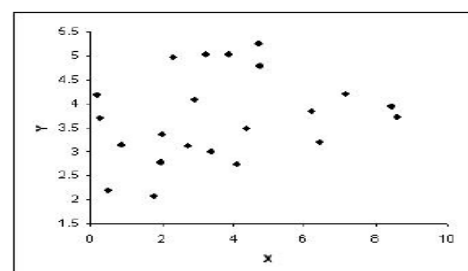
Promedio	Mediana	Desv. Estándar	Mínimo	Máximo
27,3 mm	28,6 mm	5,1 mm	12,1 mm	38,0 mm

¿Cuál de los siguientes histogramas corresponde a los datos mostrados?



2) El siguiente gráfico de dispersión muestra la relación entre las puntuaciones de una escala de ansiedad (X) y las calificaciones de un examen de ciencias (Y). En base al gráfico, deduzca el coeficiente de correlación entre X e Y.

- A. 0
- B. 0,3*
- C. 0,7



D. 1,3

3) ¿En cuál de las siguientes situaciones se puede modelar la variable aleatoria de interés por medio de una distribución binomial?

A. En una empresa de fabricación, aproximadamente el 5% de los productos son defectuosos. Se pretende calcular la probabilidad de que el tercer artículo defectuoso sea el vigésimo producto seleccionado.

B. Al lanzar un par de dados usuales (no trucados y de seis caras cada uno) queremos saber el número de lanzamientos necesarios antes de obtener por primera vez una suma de 7.

C. Un policía ha descubierto que aproximadamente el 15% de los vehículos que detiene son de fuera de la región. Estamos interesados en conocer la cantidad de vehículos de otra región en los próximos 50 que detiene.*

D. En un juego de mesa, se desea apostar a la carta con mayor probabilidad de ser extraída de una baraja inglesa (52 naipes).

4) Un profesor vació sobre la mesa un paquete de 100 chinchas metálicas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba y 32 caen hacia abajo. Luego, el profesor pide a 4 estudiantes (Alba, Bernardo, Carmen y David) repetir el experimento, lanzando cada uno las 100 chinchetas. Entre las siguientes opciones, ¿cuál colección de resultados piensas que es más probable?

A.

Resultado	Alba	Bernardo	Carmen	David
Punta arriba:	32	70	35	65
Punta abajo:	68	30	65	35

C.

Resultado	Alba	Bernardo	Carmen	David
Punta arriba:	69	68	67	68
Punta abajo:	31	32	33	32

*B

Resultado	Alba	Bernardo	Carmen	David
Punta arriba:	63	70	64	71
Punta abajo:	37	30	36	29

D.

Resultado	Alba	Bernardo	Carmen	David
Punta arriba:	50	51	48	53
Punta abajo:	50	49	52	47

5) La estatura media de los universitarios es de 178 centímetros (cm), con una desviación estándar de 8 cm. Mientras que la altura promedio de las universitarias es de 165 cm, con una desviación estándar de 10 cm. Usted realiza un experimento en su universidad midiendo la altura de 100 hombres y 100 mujeres. ¿Qué resultado le sorprendería más?

A. Un hombre con una estatura de 200 cm.

B. Una mujer con estatura de 188 cm.

C. Que la estatura promedio de las mujeres en su universidad sea menor de 163 cm.

*D. Que la estatura promedio de los hombres en su universidad sea mayor de 185 cm.

6) La puntuación obtenida por Ana en un examen corresponde al percentil 35 respecto a sus compañeros de clase, mientras que el resultado de Elena en la misma prueba corresponde al percentil 70. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

A. Ana obtuvo mejor o igual puntuación que 35 compañeros de su clase.

B. Ana responde bien aproximadamente una tercera parte del examen.

C. Elena obtiene el doble de puntuación que Ana en el examen.

D. El 30% de los compañeros de su clase obtuvieron mejor o igual puntuación que Elena.*

7) En una encuesta electoral se desea averiguar si hay más ciudadanos a favor de la política económica del presidente que en contra de la misma. Suponiendo que p representa la probabilidad asociada a que los habitantes estén de acuerdo con dicha política económica y que $q = 1 - p$. ¿Cuál de las siguientes hipótesis elegiría como hipótesis nula?

A. $p > q$

B. $p = q = \frac{1}{2}$ *

C. $p \neq q \neq \frac{1}{2}$

D. $p < q$

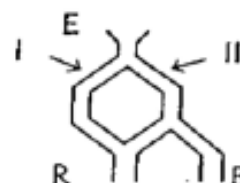
8) Una bola se suelta en E. Si sale por R, ¿cuál es la probabilidad de que haya pasado por el canal I?

A. 0,50

B. 0,33

C. 0,66*

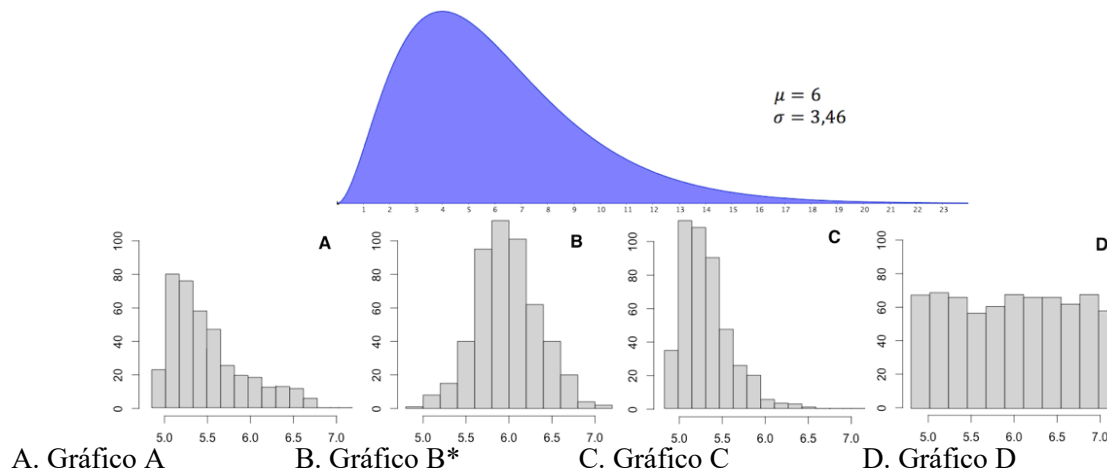
D. No se puede calcular



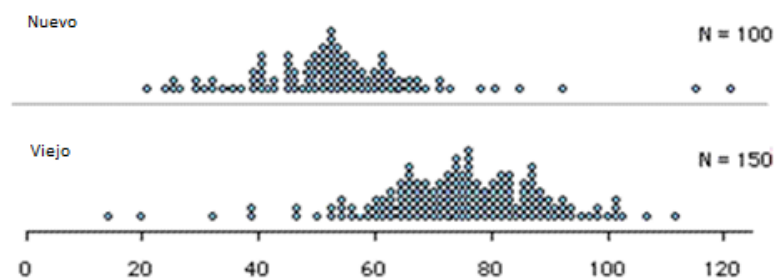
9) Sobre algunos factores que influyen en la amplitud de un intervalo de confianza (IC) para la media poblacional, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- A. El IC será más ancho cuando se utilice una muestra grande.
- B. Si la desviación estándar de la población disminuye, la anchura del IC disminuye*
- C. La elección del nivel de confianza no influye en la amplitud del IC.
- D. Al aumentar la media muestral aumenta la amplitud del IC.

10) A continuación se presentan cinco gráficos. El de la parte superior corresponde a la distribución de una población respecto a los resultados de una prueba. A partir de estos datos, ¿qué gráfica (A, B, C o D) crees que representa una distribución de 500 medias muestrales a partir de muestras aleatorias de tamaño 100 cada una?



11) Una compañía de telefonía desarrolló una nueva fórmula de fibra óptica para mejorar la velocidad de navegación en internet de sus usuarios. Para probar la efectividad de esta nueva fórmula, se desarrolló un análisis exploratorio de datos en un pueblo de 250 habitantes. Entre ellos, 100 recibieron esta nueva conexión, mientras que los otros 150 permanecieron con conexión por cable. Posteriormente, se le solicitó a cada participante visitar una página de prueba, registrándose el tiempo (en segundos) de demora en tener acceso a ella. Los resultados de este procedimiento se muestran en los siguientes gráficos:



Las próximas declaraciones fueron realizadas por estudiantes de estadística diferentes. ¿Cuál de ellas es correcta?

- A. La antigua conexión funciona mejor. Dos personas tuvieron acceso en menos de 20 segundos. Además, la mayor demora - dos minutos - fue con la nueva fórmula.
- B. La nueva conexión funciona mejor. El tiempo promedio de la nueva fórmula de acceso a internet es menor que el de la antigua conexión, tarda unos 20 segundos menos.*
- C. Ambas conexiones alcanzan igual velocidad de navegación, ya que la diferencia entre los resultados obtenidos no es estadísticamente significativa.
- D. No concluiría nada de estos datos. El número de habitantes en los dos grupos no es lo mismo, así que no hay una manera justa de comparar las dos fórmulas.

12) Suponiendo que la variable aleatoria esperanza de vida (X) sigue una distribución normal, se desea evaluar la factibilidad de aumentar la edad de jubilación de un país, que actualmente es de 70 años.

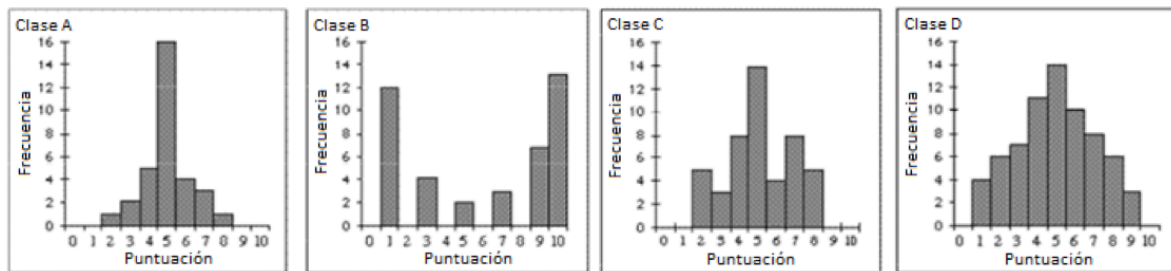
Considere un contraste de hipótesis con $H_0: \mu_X = 70$ v/s $H_1: \mu_X > 70$ y un nivel de significación de $\alpha = 0,05$ ($Z_{0,95} = 1,645$). Se ha tomado una muestra aleatoria de 500 ciudadanos, obteniendo un estadístico muestral igual a 2,5. Entonces:

- A. No se debe rechazar H_0 por tanto, la hipótesis alternativa ha de ser falsa.
- B. Se debe rechazar H_0 ya que la probabilidad de que sea cierta es 0,05.
- C. No se debe rechazar H_0 ya que el estadístico de prueba no cae en la región de rechazo.
- D. Se debe rechazar H_0 aunque no sabemos si hemos tomado la decisión correcta.*

13) Se extrae una carta al azar de una baraja española (40 cartas diferentes, con números del 1 al 7, sota, caballo y rey; y cuatro palos diferentes: oros, copas, espadas y bastos). Considere los sucesos: A: “Se extrae una carta de oros” y B: “Se extrae un rey”. ¿Los sucesos A y B son independientes?

- A. No son independientes porque en la baraja hay un rey de oros.
- B. Sólo si sacamos primero una carta para ver si es rey y se vuelve a colocar en la baraja y luego sacamos una segunda carta para mirar si es un oro.
- C. No, porque $P(\text{Rey de oro}) = P(\text{Rey}) \cdot P(\text{oro})$
- D. Si, en todos los casos.*

14) A continuación se presentan los resultados de una prueba, en escala de 0 a 10 puntos, para cinco clases de estadística diferentes. ¿En cuál de ellas esperarías tener la dispersión más baja, y por qué?



- A. Clase A, porque tiene la mayoría de los valores cercanos a la media.*
- B. Clase B, porque tiene el menor número de puntuaciones distintas.
- C. Clase C, es de las con menor rango y puntuaciones más homogéneas.
- D. Clase D, porque se la forma de su distribución se asemeja más a la curva normal.

15) Un taxi se vio implicado en un accidente nocturno con choque y huida posterior. Hay dos compañías de taxis en la ciudad, una con vehículos de color verde y otra de color azul. El 85% de los taxis de la ciudad son verdes y los demás azules. Un testigo identificó el taxi como azul. El tribunal comprobó la fiabilidad del testigo bajo las mismas circunstancias que había la noche del accidente y llegó a la conclusión de que el testigo identificaba correctamente cada uno de los colores en el 80% de las ocasiones y fallaba en el 20%. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuese realmente azul?

- A. 0.80
- B. 0.15
- C. $0.15 \cdot 0.80$
- D. 0.41^*

16) Un artículo de investigación informa de la efectividad de un nuevo medicamento para disminuir la pérdida de visión en personas con un tipo de degeneración ocular. El artículo indica un p-valor de 0,04 en la sección donde describen el análisis realizado. A partir de esta información, ¿cuál de las siguientes interpretaciones sobre el p-valor es correcta?

- A. La probabilidad de obtener resultados tan extremos, o más extremos que los de este estudio, si el medicamento en realidad no es efectivo.*
- B. La probabilidad de obtener resultados tan extremos, o más extremos que los de este estudio, si el medicamento es efectivo.
- C. La probabilidad de que el medicamento sea efectivo.
- D. La probabilidad de que, si el medicamento no es efectivo, el resultado se deba al azar.

17) En tu vecindario, mediante un análisis exploratorio de datos se determinó un coeficiente de correlación de 0,9 entre el nivel de ingresos y la cantidad de plástico reciclado en una semana. ¿Qué indica este valor?

- A. En este vecindario ganar más dinero provoca que las personas reciclen más.
- B. Los vecinos que menos reciclan son los que ganan más dinero.
- C. Aunque los vecinos que menos dinero ganan son los que menos reciclan, esto no necesariamente significa que ganar menos sea la causa de reciclar menos plástico.*
- D. Las personas que más ganan son las que más plástico reciclan.

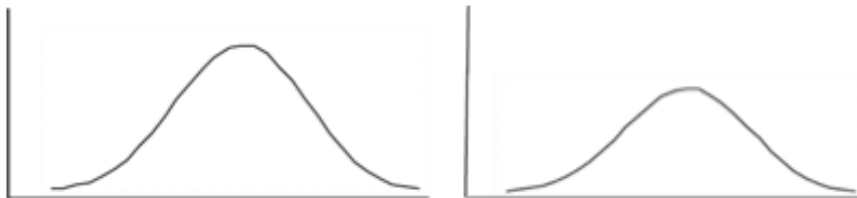
18) El número de aviones que aterriza a un aeropuerto es un factor importante para coordinar la asignación de pistas de aterrizaje. Suponga que el índice de llegadas de aviones se distribuye según una distribución Poisson con una tasa de 6 llegadas por hora. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

- A. Se espera que lleguen 3 aviones en media hora.*
- B. Es igualmente improbable que lleguen 4 aviones en una hora a que lo hagan 8 en el mismo período.
- C. La probabilidad de que aterricen 6 aviones en una hora es casi 1.
- D. Es imposible que lleguen 9 aviones en una hora.

19) Los estudiantes de una escuela secundaria quieren estimar el número medio de chips de chocolate que contienen las galletas de una marca X. Para ello, recopilan una muestra aleatoria de galletas, cuentan los chips en cada una y calculan un intervalo de confianza del 95% para el número promedio de chips por galleta [18,6 – 21,3]. ¿Cuál de las siguientes interpretaciones de los resultados es correcta?

- A. Tenemos el 95% de certeza de que cada galleta producida por esta marca tiene aproximadamente entre 18,6 y 21,3 chips de chocolate.
- B. Esperamos que el 95% de las galletas tenga entre 18,6 y 21,3 chips de chocolate.
- C. Esperamos que aproximadamente el 95% de todas las medias muestrales posibles de esta población oscilarán entre 18,6 y 21,3 chips de chocolate.
- D. Si tomáramos varias muestras del mismo tamaño, en el 95% de los intervalos calculados estará contenido el verdadero número medio de chips por galleta.*

20) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre las curvas que se muestran a continuación es cierta?



- A. No se puede asegurar que las curvas son normales, pero sí que sus medias y desviaciones típicas no son iguales.
- B. Las dos curvas son normales, pero las desviaciones típicas son diferentes.*
- C. Las dos curvas son normales, pero las medias son distintas.
- D. En ambas curvas, el 50 % de los datos está comprendido en el intervalo $[\mu - \sigma; \mu + \sigma]$

Appendix 3

ASCT Scale

- 1) Me divierto en las clases en las que se explican los tópicos de estadística/probabilidad/inferencia.
- 2) Utilizo información que incluyan elementos de estadística/probabilidad/inferencia a la hora de tomar decisiones.
- 3) Será difícil para mi enseñar los tópicos de estadística/probabilidad/inferencia.
- 4) Los contenidos de estadística/probabilidad/inferencia ayudan a entender el mundo de hoy.
- 5) Me gusta la estadística/probabilidad/inferencia, es un tema que siempre me ha interesado.
- 6) El tópico de estadística/probabilidad/inferencia es fácil.
- 7) Nunca he usado los contenidos de estadística/probabilidad/inferencia fuera de un contexto científico.

- 8) Domino los principales contenidos de estadística/probabilidad/inferencia.
- 9) Estoy seguro que me gustará enseñar los contenidos de estadística/probabilidad/inferencia en la escuela.
- 10) Creo que sabré detectar y corregir errores y dificultades de los alumnos con los temas de estadística/probabilidad/inferencia.
- 11) Solo enseñaré estadística/probabilidad/inferencia si me queda tiempo después de los otros temas.
- 12) El tópico de estadística/probabilidad/inferencia no sirve para nada.
- 13) El tópico de estadística/probabilidad/inferencia no tiene tanto valor como otras ramas de la matemática.
- 14) Me resultará fácil diseñar actividades de evaluación sobre los contenidos de estadística/probabilidad/inferencia.
- 15) Uso los contenidos de estadística/probabilidad/inferencia en la vida cotidiana.
- 16) Me siento intimidado ante los contenidos de estadística/probabilidad/inferencia.
- 17) El tópico de estadística/probabilidad/inferencia lo entiende solo la gente del área científica.
- 18) Evito leer informaciones donde aparecen términos sobre estadística/probabilidad/inferencia.
- 19) Los conocimientos sobre estadística/probabilidad/inferencia ayudan a los alumnos a razonar críticamente.
- 20) Se debería dedicar más tiempo a enseñar los temas de estadística/probabilidad/inferencia en los primeros niveles de educación.
- 21) Me preocupa saber responder preguntas sobre el tópico de estadística/probabilidad/inferencia de mis alumnos.
- 22) No me siento preparado para resolver cualquier problema sobre estadística/probabilidad/inferencia.
- 23) Pienso que no seré capaz de preparar recursos didácticos apropiados para las clases donde deba enseñar el tópico de estadística/ probabilidad/inferencia.
- 24) Cuando sea pertinente, utilizaré los contenidos de estadística/probabilidad/inferencia en los otros ejes del currículo de matemática que enseñe.
- 25) Si pudiera eliminar alguna materia del currículo de matemática sería el tópico de estadística/probabilidad/inferencia.
- 26) No tengo mucho interés en enseñar el tema de estadística/probabilidad/inferencia aunque aparezcan en el currículo.
- 27) No me agrada resolver problemas de estadística/probabilidad/inferencia.
- 28) Como futuro profesor, creo que me sentiré cómodo al enseñar el tópico de estadística/probabilidad/inferencia.

Síntesis del Capítulo

En este capítulo, se han presentado los principales resultados relativos a esta investigación doctoral, conformados por la articulación de siete manuscritos publicados, aceptados o en revisión en diversas revistas del campo. Por tanto, a modo de cierre, en lo que sigue presentamos una breve síntesis de cada uno de ellos, en base a los resúmenes incluidos en los reportes originales.

Sobre la publicación en *Bolema* (Ruz et al., 2019): Reconociendo el importante rol que cumplen los docentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la estadística y probabilidad, en este artículo se abordó el problema de la valoración de planes de formación de profesores de matemática en didáctica de la estadística. Para ello, se describió el proceso de construcción de la Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de Instrucción programados sobre Didáctica de la Estadística (GVID-IDE), según una colección de indicadores inferidos por medio de la técnica de análisis de contenido de documentos de consenso internacional, que rigen u orientan esta etapa formativa. Como consecuencia, la guía resultante fue organizada en dos dimensiones de análisis, una que nos permitió caracterizar el conocimiento didáctico-matemático del futuro profesor según las expectativas de aprendizaje institucionales de sus estudiantes (faceta epistémica); y una segunda que consideró las responsabilidades del formador con los docentes en formación (facetas cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica).

Respecto al manuscrito en *PNA* (Ruz et al., 2020c): En este trabajo se presentaron los resultados de la implementación de la GVID-IDE en cuatro programas de asignaturas sobre didáctica o enseñanza de la estadística para profesores de matemática chilenos. Siguiendo una metodología cualitativa y mediante un análisis de contenido, se identificó la presencia o ausencia de cada uno de los indicadores que conforman la GVID-IDE, en el marco de la Teoría de Idoneidad Didáctica. Los resultados fueron organizados de manera que sugieran y detecten puntos de mejora en los documentos analizados, y además se propuso una medida global sobre el grado de idoneidad didáctica alcanzada en estos programas de formación. Se concluyó que los programas tienen un grado de idoneidad alto para las facetas afectiva, interaccional y mediacional, pero solo con un grado medio en las facetas epistémica, cognitiva y ecológica.

En cuanto al reporte publicado en *AIEM* (Ruz et al., 2020b): En este trabajo se presentó el proceso de construcción e implementación piloto de un instrumento para evaluar el conocimiento sobre estocástica en futuros profesores de matemática, ejemplificando en lo referido al Contenido de Estadística Descriptiva. Las pruebas se llevaron a cabo en una muestra de 126 futuros profesores de matemática, españoles y chilenos. Los resultados, fueron

organizados comenzando por algunos indicadores sobre las propiedades psicométricas de los ítems analizados y de los resultados globales del cuestionario. Luego, se estudiaron conjuntamente los ítems que conforman cada categoría del conocimiento del contenido considerada, entre común o ampliado, buscando diferencias entre los grupos que conforman la muestra. Se concluye que el instrumento cuenta con características aceptables, al igual que los reactivos analizados y se proyecta su aplicación reformada en el futuro. Mientras que lo relativo a probabilidades (Ruz et al., aceptado) e inferencia estadística, fue incluido en el Anexo 1, cuyos resultados fueron más deficientes en lo referido a probabilidades, aunque muy bajo lo esperado en ambos tópicos.

Sobre el artículo en CP (Ruz et al., 2020a): En este trabajo, se examinaron las actitudes hacia la estadística descriptiva y su enseñanza en una muestra de 126 futuros profesores de matemática españoles y chilenos. Siguiendo una metodología cuantitativa, se profundizó en analizar el sentido (positivo o negativo) de las actitudes declaradas por los participantes. Entre los resultados, se informó inicialmente sobre la validez del instrumento utilizado, para luego explorar la disposición de los sujetos hacia los distintos componentes de actitudes considerados y finalizar con las principales diferencias según el país de procedencia. Se concluye que los participantes declaran actitudes positivas hacia la estadística descriptiva y su enseñanza, las que son más positivas frente al interés de enseñar estos contenidos en los sujetos chilenos.

Respecto a la publicación en AS (Ruz, Molina-Portillo, Vásquez, et al., 2020): Promover una actitud positiva hacia la enseñanza de la estadística y las probabilidades se ha establecido como un aspecto clave en la formación del profesorado. Por ello, en este estudio se examinó la validez y confiabilidad de la Escala de Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza (EAPE) desde una perspectiva cuantitativa, cuyos resultados fueron organizados en dos partes. La primera sobre las propiedades psicométricas de la EAPE y la segunda donde enfatizamos en las actitudes declaradas por los participantes. Se concluyen las buenas propiedades del instrumento y se destacan actitudes en general positivas en la muestra piloto. Mientras que los resultados de la escala hacia la inferencia fueron también buenos, aunque menos positivos que hacia los contenidos anteriores, cuyo detalle se incluyó Anexo 2.

En cuanto al manuscrito en revisión en *IJMA* (Ruz, Chance y Contreras, en evaluación): Desde que promover una actitud positiva se ha establecido como un objetivo clave en la reforma educativa entorno a la enseñanza de la estocástica en la escuela, se presentaron los resultados de evaluar las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en una muestra de 269 futuros profesores de matemática chilenos. Para ello, los contenidos de estocástica fueron organizados según la denominación usada en el currículo escolar de Chile (entre estadística descriptiva, probabilidades e inferencia estadística) y a través de una perspectiva cuantitativa

nos enfocamos en describir las principales diferencias entre ellas. En general, los participantes declararon actitudes mayormente positivas hacia los tres tópicos de estocástica y su enseñanza, pero con diferencias entre ellos, principalmente hacia la inferencia, que usualmente fue menos positiva. Se finaliza con algunas recomendaciones para mejorar esta situación.

Terminamos la presentación de resultados con el artículo aceptado en *SERJ* (Ruz, Chance, Medina y Contreras, en prensa): Reconociendo que los profesores de matemática están atravesando un incremento en las expectativas de enseñanza sobre los temas de estocástica en la escuela, nos interesamos en analizar el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en una muestra de 269 futuros profesores de matemática chilenos. Para ello, usamos una metodología cuantitativa en evaluación de ambos aspectos, con el interés de profundizar en la posible relación entre ellos. Sobre el conocimiento del contenido, el rendimiento de los participantes fue en general deficiente, aunque más descendido en lo que referido a probabilidades, mientras que sus actitudes fueron en general positivas. En cuanto a la relación entre ellos, reportamos asociaciones mayormente débiles, aunque con variaciones según algunos aspectos como el contenido de estocástica, las componentes de actitudes y la formación previa. Basados en estos resultados, concluimos con recomendaciones para mejorar la educación estocástica de profesores en instancias de formación inicial y desarrollo profesional.

De esta forma, en el siguiente capítulo se prosigue con las conclusiones, donde contrastaremos los resultados descritos en este capítulo con las metas establecidas global y parcialmente, además de referirnos a las limitaciones y proyecciones futuras de esta investigación doctoral.

Capítulo 4

Conclusiones

Introducción

En este capítulo, se presentan las conclusiones y reflexiones finales de esta investigación, que, debido a su modalidad de agrupación de publicaciones, constituyen una discusión más general de las presentadas al término de cada manuscrito desarrollado en el Capítulo 3. Además, en el Anexo 3 se incluye una traducción al inglés de este capítulo, que representa una de las condiciones necesarias para acreditar la mención internacional de esta tesis doctoral.

En este sentido, finalizada la investigación, en lo que sigue se organizan las conclusiones en torno a cuatro secciones. En la primera, se presenta una discusión sobre el cumplimiento de los objetivos e hipótesis establecidas en el Capítulo 2, en contraste con los resultados descritos en el Capítulo 3. Luego, en la segunda sección, se incluye una síntesis de las principales aportaciones y limitaciones de la investigación. Mientras que en la tercera sección se discute sobre las proyecciones de nuestros resultados, donde se concluye con algunas recomendaciones concretas para la formación inicial y desarrollo profesional del profesorado responsable de enseñar estocástica en la escuela. Se finaliza con una breve síntesis del capítulo.

Sobre los Objetivos e Hipótesis de Investigación

En este apartado, se presenta una discusión sobre el cumplimiento de las metas pretendidas y expectativas hipotetizadas en el Capítulo 2, en contraste con los resultados descritos en el Capítulo 3. Se comienza retomando cada uno de los cinco Objetivos Específicos (OE) e Hipótesis iniciales (H), para culminar valorando el logro del objetivo general (OG) de esta investigación.

Conclusiones en Relación al Primer Objetivo Específico (OE1) e Hipótesis (H1)

OE1. Determinar un sistema de indicadores de idoneidad didáctica que sistematice las exigencias esperadas sobre los conocimientos didáctico-estocásticos en los procesos de formación inicial de profesores de matemática chilenos.

Este objetivo se cumplió a través de dos estudios, donde abordamos el problema de la valoración de procesos de instrucción en didáctica de la estadística para profesores de matemática. El primero, relativo a la identificación de dichos indicadores (Ruz et al., 2019) y el segundo sobre su implementación en la valoración de cuatro procesos de instrucción programados concretos (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020c).

Por una parte, se presentaron los resultados del análisis semiótico de documentos curriculares sobre la educación estocástica de profesores, que permitieron la construcción de la Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de Instrucción programados sobre Didáctica de la Estadística (GVID-IDE) (Ruz et al., 2019). Este instrumento, conformado por un total de 90 indicadores distribuidos de manera asimétrica según las distintas facetas de idoneidad didáctica, permite evaluar procesos de instrucción, programados o implementados, distinguiendo entre dos dimensiones de análisis. La primera, que se organiza dentro de la faceta epistémica, sintetiza los conocimientos institucionales sobre la enseñanza y aprendizaje de la estadística que intervienen en la labor profesional del profesor en formación respecto a sus futuros estudiantes, en términos de contenidos: estadísticos, cognitivos, afectivos, interaccionales, mediacionales y ecológicos. Mientras que la segunda dimensión es contemplada en las facetas restantes, que involucran al formador con sus estudiantes (profesores en formación) en términos: cognitivos (aprendizaje del contenido didáctico-estadístico), afectivos (actitudes y motivaciones hacia los contenidos didáctico-estadísticos); interaccionales, mediacionales (uso de recursos en el proceso formativo) y ecológicos (conocimiento del formador en cuanto al currículo, el uso de nuevas tecnologías basadas en la investigación y las conexiones con otras áreas disciplinares).

Por otro lado, se detalló el proceso de valoración de la idoneidad de cuatro programas de asignaturas sobre didáctica o enseñanza de la estadística para profesores de matemática chilenos (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020c). Para ello, a través de un análisis de contenido se identificó la presencia o ausencia de cada uno de los indicadores que conforman la GVID-IDE, resaltando puntos de mejora en los programas analizados. Los resultados fueron clasificados según el criterio cualitativo de Rivas (2014) en idoneidad baja (logro menor al 40%), media (entre 40 y 70%) y alta (mayor al 70%). En general, se concluyó que los programas analizados cuentan colectivamente con un grado alto de idoneidad en las facetas afectiva, mediacional e interaccional, pero solo alcanzan un grado medio en las facetas cognitiva, ecológica y epistémica, siendo esta última la más deficiente. Esta situación contrasta los resultados de Rivas (2014) en la valoración de un programa de estadística para maestros chilenos, donde la faceta epistémica fue aquella con mejores resultados (11 de 24 indicadores satisfechos), pero solo alcanza una condición de logro medio.

De esta forma, pudimos confirmar nuestra hipótesis inicial sobre la viabilidad de determinar una colección de indicadores de idoneidad respecto a los conocimientos didáctico-estocásticos del profesor de matemáticas en Chile. Mientras que destacamos nuestra infravaloración en las expectativas iniciales sobre el grado de idoneidad de los programas de asignatura analizados. Con ello, posicionamos a la GVID-IDE dentro de la familia de instrumentos de esta índole (por ejemplo, Godino, 2013; Godino et al., 2013; Rivas, 2014) cuyo manejo, depende del actor educativo que la utilice. Si la aplicamos al profesor (o futuro profesor), la faceta epistémica abarca el conocimiento especializado del contenido respecto a sus estudiantes y en el caso del formador de profesores, las demás facetas le permitirán orientar, adaptar y desarrollar procesos de estudio de didáctica de la estadística.

Conclusiones en Relación al Segundo Objetivo Específico (OE2) e Hipótesis (H2)

OE2. Construir y validar un instrumento de evaluación sobre el conocimiento del contenido de estocástica en futuros profesores de matemática.

Para lograr este objetivo se desarrollaron diversos estudios donde describimos el diseño e implementación piloto de un cuestionario sobre el conocimiento del contenido de estocástica en futuros profesores de matemática. Uno de ellos, ejemplificó dicho proceso en los ítems de estadística descriptiva (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020b), mientras que el detalle sobre los reactivos de probabilidad fue aceptado en BEIO (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, aceptado), que conjuntamente a los ítems de inferencia conformaron el Anexo 1.

En cuanto a la construcción del cuestionario, seguimos un proceso metodológico riguroso que abarcó diversas etapas, comenzando con la revisión de la literatura, con la que establecimos la perspectiva del instrumento a desarrollar. Luego, seleccionamos de la GVID-IDE (resultados del OE1) aquellos indicadores relativos al conocimiento sobre estadística en profesores, que permitieron establecer la definición semántica de la variable *comprensión de los contenidos de estocástica en futuros profesores de matemática chilenos*. Sobre esta base, retomamos la revisión de la literatura para conformar un banco de ítems que evaluaran potencialmente las especificaciones sobre el aprendizaje de la estocástica identificadas. Una vez seleccionados al menos tres ítems por especificación, recurrimos a un grupo de expertos que valoró con una fuerza de acuerdo considerable la pertinencia y claridad de los reactivos según las metas pretendidas (validez de contenido), lo que orientó la elección de los 20 ítems que conformaron la primera versión del cuestionario. Posteriormente, aplicamos el instrumento en una muestra piloto (126 futuros profesores de matemática chilenos y españoles), con la que analizamos algunas propiedades psicométricas de cada ítem y la escala completa, con los que

además exploramos el conocimiento declarado por los participantes en esta etapa de la investigación.

Respecto a las características del instrumento, garantizamos su validez de contenido a partir del proceso de diseño y la valoración por expertos, como también su aceptable consistencia interna. En este contexto, ejemplificamos el procedimiento descrito en lo referido a los seis ítems de estadística descriptiva (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020b), para los cuales concluimos un nivel de dificultad medio y una fuerza de discriminación adecuada. Además, tras agrupar aquellos ítems sobre el conocimiento común y ampliado, obtuvimos que las puntuaciones en ambas categorías fueron significativamente distintas, mostrando mayor deficiencia en lo referido al conocimiento del contenido ampliado, que es el desarrollado durante la estadía de estos sujetos en la universidad. Mientras que lo referido a los ítems de probabilidad e inferencia, incluidos en el Anexo 1, reflejan también buenas propiedades, aunque globalmente en la etapa de exploración, los participantes demostraron mayores deficiencias en lo referido a probabilidades, tanto desde una perspectiva común como ampliada del conocimiento.

De esta forma, pudimos confirmar nuestra hipótesis inicial respecto a la factibilidad de construir un instrumento de evaluación debidamente validado sobre el conocimiento del contenido de estocástica en futuros profesores de matemáticas. A su vez, en cuanto a la etapa de exploración del conocimiento en la muestra piloto, gracias a la diferenciación del conocimiento del contenido según el modelo CDM, respaldamos nuestra hipótesis al observar un rendimiento en general deficiente, aunque más alejado de las expectativas institucionales en lo referido al conocimiento ampliado promovido durante la formación inicial del profesorado. Por tanto, concluimos las buenas propiedades del instrumento desarrollado, con el que proyectamos la evaluación del conocimiento del contenido en una muestra de futuros profesores de matemática chilenos.

Conclusiones en Relación al Tercer Objetivo Específico (OE3) e Hipótesis (H3)

OE3. Explorar las actitudes de los futuros profesores de matemática hacia los contenidos de estocástica, según su organización en el currículo escolar chileno.

Este objetivo fue alcanzado a través de diversos estudios donde probamos la viabilidad de usar la Escala de Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza (EAPE) para explorar la disposición hacia los contenidos de estocástica en futuros profesores de matemática chilenos, según su denominación en el currículo escolar. En el primero, profundizamos en las actitudes según el tópico de estadística descriptiva (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020a) y el

segundo en probabilidades (Ruz, Molina-Portillo, Vásquez, et al., 2020), mientras que lo referido a inferencia se presentó en el Anexo 2.

Por una parte, tras adaptar la EAPE hacia el tópico de descriptiva, obtuvimos la Escala de Actitudes hacia la Estadística Descriptiva y su Enseñanza (EAEDE), que aplicamos en la muestra piloto para examinar su validez y la disposición de los participantes (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020a). Al respecto, la consistencia interna de la nueva versión es más que adecuada, al igual que la estructura teórica de siete componentes que explican un 65% de la varianza total del modelo resultante de un análisis factorial exploratorio. A su vez, observamos que los participantes declaran tener una actitud positiva tanto globalmente como respecto a los siete componentes considerados en la escala, cuyas puntuaciones medias fueron más bajas en los sentimientos de agrado o desagrado hacia el contenido y más altas hacia el valor otorgado al tema y su enseñanza en la vida personal y profesional.

Por otro lado, aplicamos también la versión original de la EAPE en la misma muestra piloto (Ruz, Molina-Portillo, Vásquez, et al., 2020), con el interés de contrastar los resultados obtenidos hacia los demás tópicos de estocástica considerados. En este caso, también destacamos la adecuada fiabilidad de la escala y tras analizar su estructura factorial exploratoriamente, el modelo de siete factores explica un 63,67% de la varianza total. Sin embargo, los factores resultantes no agruparon directamente los cuatro ítems por cada componente teórico propuesto, sino que reflejan relaciones entre ellos. Por tanto, concordamos con Estrada et al. (2018) y debido a que el tamaño muestral de este estudio es aun moderado, reconocemos la necesidad de recopilar más observaciones para profundizar en esta situación. Por último, al explorar la disposición de los participantes, en general su actitud fue positiva tanto global como particularmente hacia cada componente considerado, cuyas puntuaciones medias fueron más altas que hacia la estadística descriptiva en todos los casos salvo en la autopercepción de la capacidad intelectual hacia el contenido (competencia cognitiva).

Mientras que, al igual que en el caso anterior, lo referido a inferencia conforma el Anexo 2, donde se incluye información sobre la adecuada consistencia interna de la escala y algunos estadísticos de resumen sobre sus componentes. En este caso, aunque el sentido de las actitudes fue positivo (superior a la posición de indiferencia) en general y particular, las puntuaciones medias fueron más bajas respecto a las declaradas considerando los tópicos de probabilidad y descriptiva.

De esta forma, confirmamos nuestra hipótesis inicial de que la EAPE mantiene sus buenas propiedades psicométricas al ser usada para explorar las actitudes respecto a los contenidos de estadística descriptiva e inferencial. En este sentido, destacamos la adecuada consistencia interna de la escala aplicada a los tres tópicos considerados, al igual que su

estructura factorial de siete componentes. Mientras que la disposición de los participantes que conforman la muestra piloto fue en general positiva, al igual que en la mayoría de los estudios previos revisados en el Capítulo 1, aunque menos hacia los contenidos de inferencia estadística (Anexo 2), que además corresponden a los temas más nuevos en el currículo escolar chileno.

Conclusiones en Relación al Cuarto Objetivo Específico (OE4) e Hipótesis (H4)

OE4. Evaluar las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en una muestra de futuros profesores de matemática chilenos.

El cumplimiento de esta meta parcial fue posible tras explorar la factibilidad de la escala AEPE para ser utilizada también en referencia a los contenidos de estadística descriptiva e inferencia (resultados OE 3). Por ello, con el instrumento resultante evaluamos las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza, diferenciando entre tres tópicos del contenido, cuyo reporte se encuentra en revisión en IJMA (Ruz, Chance y Contreras, en evaluación).

En dicho manuscrito, se presentaron los resultados de evaluar las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en una muestra de 269 futuros profesores de matemática chilenos, con el interés de identificar las principales diferencias en la disposición de los participantes hacia cada tópico, según las distintas componentes de actitudes consideradas y su formación previa. En términos globales, observamos actitudes mayormente positivas hacia los tres tópicos, cuyas puntuaciones medias fueron significativamente más bajas hacia la inferencia estadística, pero no hubo diferencias entre descriptiva y probabilidad. A su vez, en cuanto a los componentes de actitudes considerados, la disposición media también fue mayormente positiva, manteniendo la tendencia global de ser más positivas hacia la probabilidad, aunque estuvo más cerca de la indiferencia en lo referido a la competencia cognitiva y didáctica hacia la inferencia. En lo referido al uso del contenido en el ámbito personal o profesional (componente conductual), identificamos diferencias entre todos los tópicos, manteniendo una disposición más positiva hacia la probabilidad. Mientras que en lo referido a la utilidad y relevancia de la estocástica y su enseñanza (componente de valor), no hubo diferencia en la disposición de los participantes hacia los tres tópicos.

Finalmente, concluimos que el efecto de la formación previa es un buen predictor de las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza cuando se basa en si la experiencia en asignaturas previas fue exitosa, pero no al considerar el número de cursos estocásticos rendidos previamente (y no necesariamente aprobados). Por tanto, en aquellos casos en los que se han superado con éxito experiencias pasadas con materias estocásticas, se genera una mejor actitud hacia estos contenidos y su enseñanza.

En este sentido, confirmamos nuestra hipótesis inicial de que las actitudes declaradas por los participantes hacia los tres bloques de contenidos sobre estocástica y su enseñanza fueron en general positivas, aunque menos hacia el caso de inferencia. Con ello, reforzamos que existen diferencias en la disposición de los futuros profesores hacia los temas de estocástica más nuevos en el currículo escolar chileno, los que en algunas realidades analizadas tampoco fueron parte de las temáticas consideradas en el plan de formación inicial del profesorado.

Conclusiones en Relación al Quinto Objetivo Específico (OE5) e Hipótesis (H5)

OE5. Evaluar el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en una muestra de futuros profesores de matemática chilenos, profundizando en la relación entre ambos aspectos.

El logro de este objetivo fue alcanzado tras la implementación de las escalas desarrolladas en las etapas anteriores. De esta forma, nos aproximamos a evaluar el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en una muestra de 269 futuros profesores de matemática chilenos, cuyos resultados fueron presentados en el último manuscrito del Capítulo 3, que se encuentra aceptado en SERJ (Ruz, Chance, Medina y Contreras, aceptado).

En cuanto al conocimiento del contenido, el rendimiento de los futuros profesores fue en general deficiente, con ligeras diferencias según los tópicos en que organizamos la estocástica (la puntuación media más alta fue en los ítems de estadística descriptiva, mientras que la más baja en los referidos a probabilidad). Esta situación es preocupante ya que más del 80% de los participantes habían superado todas las asignaturas de estocástica incluidas en su formación inicial, pero la mayoría aún no dominaba los temas que enseñarán (conocimiento común) o el conocimiento extendido de la estocástica escolar (conocimiento ampliado). Estos hallazgos respaldan los últimos reportes de la ENDFID (Evaluación Nacional Diagnóstica de la formación Inicial Docente) (CPEIP, 2018, 2019) que informaron peores resultados en estocástica y geometría, en comparación con cálculo y álgebra. Además, si bien esperábamos un rendimiento más bajo en el conocimiento ampliado, esto indica que los futuros profesores tendrán dificultades para ampliar su perspectiva sobre el contenido a enseñar y ayudar a los estudiantes a conectar temas más allá del currículo escolar. Además, en Chile, estas directrices curriculares están avanzando a ampliar las expectativas de aprendizaje sobre la estocástica (MINEDUC, 2019), lo que resalta la importancia de mantener actualizados los programas de formación inicial del profesorado.

Respecto a las actitudes, tras la diferenciación establecida sobre los temas de estocástica, en este caso utilizamos una medida global (que denominamos actitudes hacia la estocástica y su enseñanza) definida como la media aritmética entre las puntuaciones declaradas en cada ítem según los tres tópicos de contenido. En este sentido, como es de esperar tras lo discutido en las conclusiones del OE4, los resultados mantienen el patrón ser positivos tanto globalmente como respecto a cada componente de actitudes considerado, los que se intensifican más positivamente hacia las probabilidades en comparación con inferencia.

En consecuencia, confirmamos nuestra hipótesis inicial de que los resultados serían muy similares a los informados por Hannigan, Gill y Leavy (2013) con una muestra de futuros profesores de matemáticas irlandeses, es decir, un débil conocimiento del contenido y actitudes en su mayoría positivas. Los autores, atribuyeron esta situación al hecho de que en Irlanda la formación estocástica de profesores tiene un fuerte énfasis matemático, concluyendo que la disposición de sus participantes pudo reflejar actitudes positivas hacia las matemáticas en lugar de la estadística, por lo que no es sorprendente esta disociación. El énfasis matemático es similar en Chile y es posible que nuevamente estemos viendo actitudes de los profesores hacia las matemáticas en lugar de estocástica. Esto también podría explicar las actitudes más positivas hacia el contenido de probabilidad en nuestra muestra, en comparación con los tópicos de contenido más vinculados a la estadística (descriptiva e inferencial). Además, aunque Estrada y Batanero (2008) concluyeron que la principal razón de las actitudes negativas de los futuros profesores se debía a la falta de preparación o conocimiento del contenido, nuestros resultados fueron contrarios. Con ello, parece ser que las actitudes más positivas no son un fuerte predictor de un mejor desempeño, aspecto en el que profundizaremos a continuación en respuesta a la meta general de esta investigación doctoral.

Conclusiones en Relación al Objetivo General (OG) y Problema de Investigación

OG. Analizar la relación entre el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en futuros profesores de matemática chilenos.

En cuanto a la exploración de la asociación entre el conocimiento del contenido y las actitudes, globalmente usamos las puntuaciones totales obtenidas en cada escala, cuya correlación fue positiva y débil (0,239) al igual que en las investigaciones revisadas en el Capítulo 1. Mientras que, en términos específicos, la intensidad de dicha asociación fue también baja, aunque menos concluyente en términos comportamentales hacia la enseñanza (0,075) y de valor (0,081). A su vez, al correlacionar las puntuaciones obtenidas en los ítems de conocimiento y actitudes hacia cada tópico del contenido, la intensidad varió según cada

caso. Considerando a la estadística descriptiva, aunque también positivas y débiles, la asociación fue más intensa hacia el contenido que hacia su enseñanza, es decir, los participantes declararon actitudes positivas incluso con poco conocimiento. Para el tópico de probabilidad, las correlaciones fueron las más débiles e incluso negativas, observando casos con un buen rendimiento en los ítems de conocimiento, pero con actitudes por debajo de la puntuación media (aunque aun positivas). Esta situación podría deberse a la interacción entre dos efectos observados, uno de tipo piso (*floor effect*) por el bajo rendimiento en los ítems de conocimiento y otro techo (*ceiling effect*) por la alta positividad de las actitudes hacia las probabilidades. En el área de inferencia estadística, las correlaciones volvieron a ser generalmente positivas y débiles, aunque levemente más intensas que hacia la estadística descriptiva. Es decir, los participantes con mejor rendimiento en los ítems de conocimiento tendieron a estar más dispuestos a aprender y enseñar este contenido, lo que se produjo gracias a que las actitudes hacia la inferencia fueron también menos positivas. Mientras que, en la componente de valor, la asociación no fue concluyente hacia ninguna de las tres áreas de contenido consideradas ya que la mayoría de nuestros profesores en formación tendieron a valorar altamente el aprendizaje y la enseñanza de la estocástica, incluso con una comprensión más débil del tema.

De esta forma, pudimos afrontar el problema central de esta investigación, relativo a que los profesores de matemática no se sienten preparados para asumir la responsabilidad de enseñar estocástica en la escuela, ni tampoco son capaces de demostrar un conocimiento adecuado del contenido. Al respecto, concluimos que dicha relación es poco clara ya que, si bien nuestros participantes demostraron un bajo rendimiento, tienen una disposición más positiva frente a la estocástica y su enseñanza. Es decir, más allá de las dificultades y debilidades con el conocimiento, destacamos la buena actitud de los futuros profesores para fortalecer sus falencias relativas al contenido.

Por tanto, consideramos que la formación estocástica del profesorado de matemáticas debe representar en sí misma una secuenciación de buenas prácticas de enseñanza del contenido, donde pueda ser abordado el estudio integrado de la estocástica y su enseñanza. En este contexto, destinamos la siguiente sección a presentar una síntesis de las principales aportaciones y limitaciones de la investigación, para proseguir con las proyecciones de nuestros resultados, donde concluimos con algunas recomendaciones concretas para promover esta perspectiva de la formación inicial y desarrollo profesional del profesorado responsable de enseñar estocástica en la escuela.

Aportaciones y Limitaciones de la Investigación

En esta sección, se presentan los principales aportes y limitaciones identificadas en las distintas etapas desarrolladas en esta investigación.

Aportaciones

A partir del análisis de los principios curriculares que orientan la educación estocástica de profesores, se ha establecido un marco de referencia sobre los conocimientos didáctico-estocásticos del profesor con el que es posible identificar aspectos que necesiten ser fortalecidos en los procesos de formación inicial y desarrollo profesional del profesorado. Al respecto, si bien los documentos consultados son específicos de Chile y Estados Unidos, pensamos que el desglose presentado en el primer artículo del Capítulo 3 (Ruz et al., 2019) permitirá a otros investigadores consultar sus directrices y complementarlas con estos resultados, permitiendo su uso en otras latitudes.

Además, el planteamiento de estas recomendaciones como indicadores, permite a la Guía de Valoración de la Idoneidad Didáctica de procesos de Instrucción sobre Didáctica de la Estadística (GVID-IDE) ser utilizada para responder a la interrogante *¿qué tan idóneos son actualmente los procesos de instrucción en didáctica de la estadística para futuros profesores de matemática?* Con ello, destacamos como valioso proponer nuevas herramientas que permitan evaluar la pertinencia y adecuación de las acciones formativas vigentes e identificar aspectos por mejorar para alcanzar niveles óptimos en esta área. Así, proyectamos la posibilidad de que este instrumento sea un insumo valioso tanto para formadores de profesores como para quienes tengan la responsabilidad de diseñar o evaluar planes formativos para futuros docentes en el campo de la educación estadística.

Por otro lado, en cuanto a los estudios de evaluación, hemos aportado con instrumentos para aproximarse al conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en profesores. El primero, relativo a la dimensión matemática del modelo CDM, fue construido a partir del uso o adaptación de reactivos diseñados en investigaciones previas y validado en una muestra piloto (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020b). Por ello, tras su implementación en una muestra de futuros profesores de matemática chilenos (Ruz, Chance, Medina, et al., en prensa; Ruz y Contreras, 2020), confirmamos hallazgos previos o aportamos resultados originales debido a la modificación de algunos ítems o a su uso anterior en una población distinta.

Para el segundo, adaptamos y verificamos las buenas propiedades psicométricas de Escala de Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza (EAPE) para ser usada hacia otros

tópicos específicos de la estocástica (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020a; Ruz, Molina-Portillo, Vásquez, et al., 2020). De esta forma, con el instrumento desarrollado es posible evaluar la disposición de los profesores hacia los distintos tópicos de estocástica que configuran el currículo escolar y serán objeto de enseñanza en el ejercicio profesional docente. Además, tras su implementación en una muestra de futuros profesores de matemática chilenos, sumamos evidencia de las actitudes principalmente positivas hacia los tres tópicos considerados (Ruz, Chance y Contreras, en evaluación), confirmando la tendencia de las investigaciones revisadas previamente en el Capítulo 1.

Finalmente, con los resultados de los estudios de evaluación, aportamos con la exploración de la relación entre el conocimiento del contenido y las actitudes de los participantes, concluyendo que la asociación entre ambos aspectos es en general positiva y débil, aunque su intensidad fue mayor en el grupo de sujetos con solo una asignatura de estocástica en su formación inicial y menor al considerar los temas de probabilidad. No obstante, reconocemos la necesidad de profundizar en estos resultados desde otra perspectiva, aspecto en el que profundizamos a continuación en el marco de las limitaciones de esta investigación.

Limitaciones

En cuanto al análisis del currículo de formación de profesores chilenos, asumimos como limitación haber implementado la GVID-IDE únicamente en procesos programados sobre la enseñanza de la estocástica. Lo anterior, debido a que en la perspectiva asumida en el EOS sobre los conocimientos y competencias didáctico-matemáticos del profesor (Godino et al., 2017), la enseñanza del contenido debe ser promovida simultáneamente con aspectos relativos a su didáctica. En este sentido, por ejemplo, algunos de los indicadores asignados como insatisfechos en la faceta epistémica, aquella con menor porcentaje de presencia en los programas analizados (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020c; Ruz, Contreras, et al., 2018) pudieron ser cubiertos en asignaturas destinadas al contenido.

En cuanto a los estudios de evaluación, reconocemos como principal limitación haber escogido aproximaciones cuantitativas, las que fueron suficientes para las metas pretendidas en esta investigación, pero un acercamiento al menos mixto pudo haber complementado las conclusiones obtenidas en cada caso. Además, asumimos una limitación en las muestras analizadas (directrices curriculares, programas de asignaturas y futuros profesores de matemática), las que fueron seleccionadas de forma intencional según la disposición de las instituciones formadoras que participaron de esta investigación. En este sentido, desde una

perspectiva cualitativa, con el uso de entrevistas y preguntas de respuesta abierta, sería posible explorar más profundamente el razonamiento y disposición de algunos casos de interés, como los participantes con buen rendimiento y una actitud más indiferente.

Por ello, reconocemos el carácter acotado de nuestra investigación, pero valoramos sus resultados para proyectar futuras líneas de investigación en las que profundizamos a continuación.

Proyecciones de la investigación

A de los resultados de la última etapa de la investigación, donde los sujetos con mayor conocimiento del contenido tendieron a declarar actitudes más positivas hacia la estocástica y su enseñanza, pero no al revés, proyectamos algunas líneas de investigación en forma de sugerencias para la formación inicial y continua del profesorado.

Por una parte, resaltamos la necesidad de fortalecer el vínculo entre la formación disciplinar y didáctica del profesorado. Y para ello, motivamos la promoción del estudio integrado de la estocástica y su enseñanza en estos profesionales, apoyando lo concluido por Godino et al. (2013) sobre la formación matemática en general. De esta perspectiva, proyectamos afrontar el problema de que en los cursos de estocástica para profesores se suele matematizar el contenido, perdiendo muchas veces de vista la importancia de aspectos como el contexto y la variabilidad, reflejando que una sólida formación matemática no se traduce necesariamente en un adecuado dominio de la estocástica. Así, en esta aproximación conjunta al contenido y su enseñanza, el currículo se debería organizar según el proceso de resolución de problemas estadísticos [GAISE] (Franklin et al., 2007) o ciclo de investigación empírica [PPDAC] (Wild y Pfannkuch, 1999) y el ciclo de modelación probabilística [SWAMTU] (Pfannkuch et al., 2016). Este último, cobra vital importancia a partir del rendimiento demostrado por los participantes de esta investigación, que tuvieron más complicaciones en lo referido a probabilidades e inferencia. Por ello, consideramos fundamental que la formación de los profesores promueva una visión equilibrada de la probabilidad tanto matemática (estructura simbólica y teoría) como empíricamente (a través de la simulación). Con ello, pensamos que se puede mejorar el dominio de ideas centrales como la aleatoriedad y el condicionamiento, que fueron conflictivas para nuestros participantes. Otra opción podría ser una aproximación a la inferencia estadística basada en métodos de re-muestreo, donde las simulaciones se utilizan para introducir la variación muestral y el razonamiento de la estimación estadística de manera intuitiva e informal, sin requerir que los estudiantes aprendan primero los fundamentos matemáticos más detallados. Algunos ejemplos que han

sistematizado estas ideas en planes de estudio completos son Lock, Frazer Lock, Lock Morgan, Lock y Lock (2017) y Tintle et al. (2016), que proyectamos como base para continuar y reforzar los esfuerzos desarrollados en el campo en el área de probabilidad e inferencia, que son aquellos tópicos menos frecuentes en la literatura, como revisamos inicialmente en el Capítulo 1.

En este sentido, considerando el caso de Chile, reconocemos que en todas las instituciones formadoras de profesores de matemática se programa al menos un curso de estocástica, pero solo en una tercera parte de ellas (10 de 30) consideran una asignatura relativa a su enseñanza (Ruz, Molina-Portillo y Contreras, 2020c). Frente a esta diferencia, con el interés de optimizar el tiempo disponible, destacamos como factible la posibilidad de promover una perspectiva integral en el desarrollo del conocimiento profesional del profesor de matemáticas para enseñar estocástica. De esta forma, los futuros profesores experimentarían buenas prácticas de enseñanza de la estocástica como parte de su formación inicial, y eso serviría como un ejemplo de cómo desarrollar el razonamiento estocástico con sus estudiantes más adelante. Además, en este nuevo paradigma, debe darse prioridad a usar datos reales para desarrollar la comprensión de las ideas centrales de la estocástica y detectar las principales características que diferencian a la estocástica de la matemática. promover reflexionar sobre buenas prácticas de enseñanza de la estocástica, incluida la identificación de errores y dificultades comunes de los estudiantes; desarrollar nuevas metodologías de evaluación como el uso de proyectos; y promover el uso y dominio de diversos recursos tecnológicos para introducir la simulación y agilizar procedimientos de cálculo (Ruz, Díaz-Levicoy, et al., 2018).

Por otro lado, como futuros profesores, los participantes que conforman la muestra final de esta investigación, representan un número sustancial de profesionales que pronto enseñarán estocástica en las escuelas chilenas. Y debido a que la mayoría de ellos no rendirán cursos adicionales centrados en el contenido (por haberlos aprobado todos durante su formación inicial) no podemos esperar que su conocimiento mejore y las actitudes persistan positivas sin el acceso a programas de desarrollo profesional. En este sentido, según lo revisado en el Capítulo 1 sobre las distintas perspectivas teóricas que han caracterizado al conocimiento profesional del profesor de estocástica, destacamos la aproximación desarrollada por Ponte y colaboradores (Henriques y Ponte, 2014; Ponte, 2011; Ponte y Noll, 2018) como un camino para proyectar la investigación hacia los profesores en ejercicio. Desde esta perspectiva y en la misma línea con nuestras proyecciones previas, Ponte y Noll (2018) aseguran que los cursos de desarrollo profesional son más efectivos cuando se centran en crear ambientes de aprendizaje que a los formadores les gustaría ver a los profesores desarrollar en sus aulas, donde se conceptualice al profesor como un *profesional práctico reflexivo* (Flores, 2007).

Algunos ejemplos de instancias desarrolladas según la perspectiva de Ponte han destacado las etapas del Estudio de Clases japonés como una herramienta valiosa para organizar programas de desarrollo profesional (Souza, Lopes y Pfannkuch, 2015), al igual que el uso de video grabaciones (Groth y Xu, 2011).

Finalmente, en cuanto al análisis de las actitudes, proyectamos la posibilidad de implementar la escala de actitudes en profesores en ejercicio con el interés de contrastar su disposición hacia el contenido tras tomar contacto con la práctica profesional. Mientras que, sobre la base de los antecedentes revisados en el Capítulo 1, proyectamos la difusión de los resultados sobre el conocimiento demostrado por los participantes de la muestra final, de los que hemos reportado parcialmente algunos aspectos (Ruz, Chance, Medina, et al., aceptado; Ruz y Contreras, 2020), por lo que nos encontramos preparando algunos manuscritos destinados únicamente a este asunto.

Síntesis del Capítulo

En este capítulo, se han detallado las principales conclusiones de esta investigación, comenzando con una discusión donde se contrastaron los resultados obtenidos según los objetivos e hipótesis iniciales, para luego identificar algunas de las aportaciones y limitaciones más relevantes. Sobre esta base, se plantearon futuras líneas de investigación y se destacaron otras publicaciones resultantes de la participación en diversos eventos de divulgación científica durante el tiempo en que se llevó adelante esta tesis doctoral.

Inicialmente, valoramos positivamente el cumplimiento de las cinco metas específicas planteadas inicialmente, gracias a los diversos estudios descritos en el Capítulo 3. Con ello, pudimos afrontar el problema central de esta investigación y acercarnos a investigar el objetivo general de esta tesis, relativo a analizar la relación entre el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en futuros profesores de matemática chilenos. Al respecto, concluimos la poca claridad de dicha relación, producto de nuestros participantes demostraron un bajo rendimiento en los ítems sobre el contenido, pero tienen una disposición mayormente positiva hacia la estocástica y su enseñanza. En otras palabras, más allá de las deficiencias con dominio del contenido, destacamos la buena actitud de los futuros profesores para fortalecer sus dificultades con la estocástica y su enseñanza.

Luego, destacamos como principales aportaciones a los instrumentos desarrollados; el primero que sintetiza los principios curriculares para la formación estocástica de profesores y los segundos para aproximarse a evaluar el conocimiento del contenido y las actitudes hacia la estocástica y su enseñanza en profesores de matemática, tanto en ejercicio como formación.

Además, valoramos como aporte el uso de dichos instrumentos en la evaluación de procesos de instrucción concretos (sobre la programación de asignaturas de didáctica de la estadística en Chile) y en distintas muestras de futuros profesores de matemática. A su vez, asumimos como principales limitaciones de la investigación al uso de aproximaciones metodológicas cuantitativas en la mayoría de los estudios desarrollados y a la aplicación de la guía resultante del análisis curricular únicamente en asignaturas sobre enseñanza de la estocástica. De esta forma, reconocemos el carácter diagnóstico y acotado de esta investigación, pero valoramos los resultados obtenidos en el planteamiento de futuras líneas de estudio.

Al respecto, sugerimos específicamente que las universidades chilenas actualicen sus programas de formación inicial sobre estocástica, donde se incluyan recomendaciones más recientes para preparar mejor a los futuros profesores de matemática. En esos enfoques, el contenido cubierto es muy similar a un curso tradicional, pero en su aplicación se sugiere el uso de contextos y aplicaciones genuinas, cuyo objetivo central sea el desarrollo de un aprendizaje activo basado en la exploración. Desde nuestra perspectiva, esta actualización idealmente debería dejar de diferenciar entre asignaturas enfocadas en la estocástica y otras en su enseñanza, sino que ambos aspectos deberían integrarse y promoverse simultáneamente. Al mismo tiempo, debería considerarse aspectos afectivos, que, pueden desarrollarse aprendiendo de la práctica docente, la exploración profunda de los contenidos estocásticos y el uso de entornos tecnológicos para la enseñanza. Por ello, ejemplificando en el caso de Chile, las instituciones de formación, el CPEIP o las propias escuelas, deberían ofrecer oportunidades de desarrollo profesional para los profesores en servicio de forma gratuita, especialmente en estocástica, durante al menos los dos primeros años de práctica. De esta forma, consideramos que ofrecer estas instancias después de que los profesores hayan experimentado las particularidades de la práctica profesional, puede ser potencialmente más efectivo. Así, proyectamos que, siguiendo estas sugerencias en investigaciones futuras, en un período no muy lejano, los profesores de matemáticas podrán responder satisfactoriamente a las demandas de la estocástica en su campo profesional.

Referencias

- Alvarado, H., Andaur, G. y Estrada, A. (2018). Actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza: un estudio exploratorio con profesores de matemática en formación y en ejercicio de Chile. *Revista Paradigma*, XXXIX(2), 36-64. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>
- Aparicio, A. y Bazán, J. (2006). Actitud y rendimiento en Estadística en profesores peruanos. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 644-650). CLAME.
- Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores* [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
- Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. y Contreras, J. M. (2013). Prospective primary school teachers' errors in building statistical graphs. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 745-755). ERME.
- Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M. y Cañadas, G. (2015). Statistical graphs complexity and reading levels: a study with prospective teachers. *Statistique et Enseignement*, 6(1), 3-23-23.
- Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M. y Cañadas, G. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 19(1), 15-40.
- Arteaga, P., Batanero, C., Ortiz, J. y Contreras, J. M. (2011). Sentido numérico y gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Publicaciones*, 41, 33-50.
- Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática/estadística en las enseñanzas medias y universitaria. Características y medición*. Mensajero.
- Ball, D. y Bass, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: Knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. *43rd Jahrestagung für Didaktik der Mathematik*, 1-12.
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*. <https://doi.org/10.1017/CBO9781107415324.004>
- Batanero, C. (2005). Significados de la Probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 8(3), 247-263.
- Batanero, C. (2009). Retos para la formación estadística de profesores. *II Encontro de Probabilidade e Estatística na Scola*, 1-23.
- Batanero, C. (2019). Thirty years of stochastics education research: Reflections and challenges. En José M. Contreras, María Gea, María López-Martín y Elena Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-15). Universidad de Granada.
- Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(1), 141-154.
- Batanero, C., Arteaga, P., Ruiz, B. y Roa, R. (2010). Assessing pre-service teachers conceptions of randomness through project work. En C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)* (pp. 1-6). ISI/IASE.

- Batanero, C., Arteaga, P., Serrano, L. y Ruiz, B. (2014). Prospective primary school teachers' perception of randomness. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: Presenting plural perspectives* (pp. 345-366). Springer Science & Business Media.
- Batanero, C. y Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Sense Publishers.
- Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (2011a). Overview: Challenges for teaching statistics in school mathematics and preparing mathematics teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* (pp. 407-418). Springer.
- Batanero, C., Burrill, G. y Reading, C. (Eds.). (2011b). *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study*. Springer.
- Batanero, C. y Chernoff, E. (Eds.). (2018). *Teaching and learning stochastics: Advances in probability education research*. Springer.
- Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H. y Sánchez, E. (2016). *Research on teaching and learning probability, ICME-13 topical surveys*. Springer.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability: Reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*, 3(1), 3-13.
- Batanero, C. y Díaz, C. (2005). Análisis del proceso de construcción de un cuestionario sobre probabilidad condicional. Reflexiones desde el marco de la TFS. En D. Ordoñez, C. Batanero y A. Contreras (Eds.), *Investigación en didáctica de las matemáticas. I congreso internacional sobre aplicaciones y desarrollos de la teoría de las Funciones Semióticas* (pp. 13-36). Universidad de Jaén.
- Batanero, C., Díaz, C. y López-Martín, M. del M. (2017). Significados del contraste de hipótesis, configuraciones epistémicas asociadas y algunos conflictos semióticos. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. del M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-16). Universidad de Granada.
- Batanero, C., Estepa, A. y Godino, J. D. (1996). Evolution of students' understanding of statistical association in a computer-based environment. En J. Garfield y G. Burrill (Eds.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistics. Proceedings of the 1996 IASE Round Table Conference* (pp. 191-205). ISI/IASE.
- Batanero, C., Gea, M. M., Arteaga, P., Contreras, J. M. y Díaz, C. (2018). Conocimiento del contenido sobre correlación y regresión en futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 21(3), 325-348.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Cañizares, M. J. (2005). Simulation as a tool to train pre-service school teachers. *Proceedings of First ICMI African Regional Conference*.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. En H. Salmerón (Ed.), *Actas de las VII Jornadas LOGSE: Evaluación Educativa* (pp. 301-306). Universidad de Granada.
- Batanero, C., Godino, J. D. y Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal of Statistics Education*, 12(1), 1-15.
- Batanero, C., Henry, M. y Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. *Exploring Probability in School*, 15-37.
- Behar, R. (2001). *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística* [Tesis doctoral. Universitat Politècnica de Catalunya].
- Ben-Zvi, D., Gravemeijer, K. y Ainley, J. (2018). Design of statistics learning environments.

- En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 473-502). Springer.
- Ben-Zvi, D. y Makar, K. (2016a). International perspectives on the teaching and learning of statistics. En D. Ben-Zvi y K. Makar (Eds.), *The Teaching and Learning of Statistics: International Perspectives* (pp. 1-10). Springer.
- Ben-Zvi, D. y Makar, K. (Eds.). (2016b). *The teaching and learning of statistics. International Perspectives*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-12688-3_37
- Ben-Zvi, D., Makar, K. y Garfield, J. (Eds.). (2018). *International Handbook of Research in Statistics Education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-94-010-0462-6>
- Bendig, A. y Hughes, J. (1954). Student attitude and achievement in a course in introductory statistics. *Journal of Educational Psychology*, 45(5), 268-276.
- Biehler, R., Frischemeier, D., Reading, C. y Shaughnessy, J. M. (2018). Reasoning about data. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 139-192). Springer.
- Biggs, J. y Collis, K. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy*. Academic Press.
- Bruno, A. y Espinel, M. C. (2009). Construction and evaluation of histograms in teacher training. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 40(4), 473-493. <https://doi.org/10.1080/00207390902759584>
- Burgess, T. (2009). Teacher knowledge and statistics: What types of knowledge are used in the primary classroom? *The Mathematics Enthusiast*, 6(1-2), 3-24.
- Burgess, T. (2011). Teacher Knowledge of and for Statistical Investigations. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* (pp. 259-270). Springer.
- Burgess, T. (2006). A framework for examining teacher knowledge as used in action while teaching statistics. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Working cooperatively in statistics education. Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics (ICOTS7)* (pp. 1-6). IASE.
- Burgess, T. (2012). How does teacher knowledge in statistics impact on teacher listening? En J. Dindyal, L. P. Cheng y S. Fong (Eds.), *Mathematics education: Expanding horizons. Proceedings of the 35th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 146-153). MERGA.
- Burrill, G. (2014). Preparing future teachers to teach statistics. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics*. ISI/IASE.
- Burrill, G. y Ben-Zvi, D. (Eds.). (2019). *Topics and trends in current statistics education research: International perspectives*. Springer.
- Burrill, G. y Biehler, R. (2011). Fundamental statistical ideas in the school curriculum and in training teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* (pp. 57-69). Springer.
- Callingham, R. (1997). Teachers' multimodal functioning in relation to the concept of average. *Mathematics Education Research Journal*, 9(2), 205-224.
- Callingham, R., Carmichael, C. y Watson, J. M. (2016). Explaining student achievement: The influence of teachers' pedagogical content knowledge in statistics. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14, 1339-1357. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9653-2>
- Callingham, R. y Watson, J. M. (2011). Measuring levels of statistical pedagogical content

- knowledge. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* (pp. 283-293). Springer.
- Canada, D. (2008). Conceptions of distribution held by middle school students and preservice teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. ICMI/IASE.
- Canada, D. y Ciancetta, M. (2007). Elementary preservice teachers' informal conceptions of distribution. En T. Lamberg y L. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 960-967). PME.
- Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística. *Statistics Education Research Journal*, 3(1), 5-28.
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, Ç. Haser y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. CERME 8* (pp. 2985-2994). ERME.
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, Á., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.
- Carter, T. (2008). Preservice teacher knowledge and understanding of probability and statistics. En G. Kulm (Ed.), *Teacher Knowledge and Practice in Middle Grades Mathematics* (pp. 67-85).
- Casey, S. (2010). Subject matter knowledge for teaching statistical association. *Statistics Education Research Journal*, 9(2), 50-68.
- Casey, S. y Wasserman, N. (2015). Teachers' knowledge about informal line of best fit. *Statistics Education Research Journal*, 14(1), 8-35.
- Castro-Sotos, A., Vanhoof, S., Van den Noortgate, W. y Onghena, P. (2007). Students' misconceptions of statistical inference: A review of the empirical evidence from research on statistics education. *Educational Research Review*, 2(2), 98-113.
- Centro de Perfeccionamiento Experimentación e Investigaciones Pedagógicas. (2017). *Resultados nacionales evaluación nacional diagnóstica de la formación inicial docente 2016*. CPEIP.
- Centro de Perfeccionamiento Experimentación e Investigaciones Pedagógicas. (2018). *Resultados nacionales evaluación nacional diagnóstica de la formación inicial docente 2017*. CPEIP.
- Centro de Perfeccionamiento Experimentación e Investigaciones Pedagógicas. (2019). *Resultados nacionales evaluación nacional diagnóstica de la formación inicial docente 2018*. CPEIP.
- Chance, B., delMas, R. y Garfield, J. (2004). Reasoning about sampling distributions. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 295-323). Kluwer Academic.
- Chaput, B., Girard, J. C. y Henry, M. (2008). Modeling and simulations in statistics education. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference* (pp. 1-6). ICMI/IASE.
- Chernoff, E. (2012). Recognizing revisitation of the representativeness heuristic: An analysis of answer key attributes. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 44(7), 941-952. <https://doi.org/10.1007/s11858-012-0435-9>

- Chernoff, E., Vashchyshyn, I. y Neufeld, H. (2018). Comparing the relative probabilities of events. En C. Batanero y E. Chernoff (Eds.), *Teaching and learning stochastic, ICME-13 Monographs* (pp. 277-291). Springer.
- Chick, H. y Pierce, R. (2012). Teaching for Statistical Literacy: Utilising affordances in real-world data. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10, 339-362.
- Chick, H. y Pierce, R. (2008). Teaching statistics at the primary school level: beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. En C. Batanero, G. Burrill y A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference* (pp. 1-6). ICMI/IASE.
- CIAE Noticias. (2018). *Proyecto buscará introducir en la enseñanza de las matemáticas conceptos como el big data y la inteligencia emocional*. Recuperado el 9 Mayo 2019. http://www.ciae.uchile.cl/index.php?page=view_noticias&id=1360&langSite=es
- Cobb, G. (2007). The introductory statistics course: A ptolemaic curriculum. *Technology Innovations in Statistics Education*, 1(1), 1-16.
- Cobb, P. y McClain, K. (2004). Principles of instructional design for supporting the development of students' statistical reasoning. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 375-395). Kluwer Academic. https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_16
- Common Core State Standards Initiative. (2020). *Common Core State Standards for Mathematics*. CCSSI. <http://www.corestandards.org/Math/>
- Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional* [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
- Contreras, J. M. y Molina-Portillo, E. (2019). Elementos clave de la cultura estadística en el análisis de la información basada en datos. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. del M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-12). Universidad de Granada.
- Contreras, J. M., Molina-Portillo, E., Godino, J. D. y Batanero, C. (2017). Construcción de un cuestionario para evaluar la interpretación crítica de gráficos estadísticos por futuros profesores. En J. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 207-216). SEIEM.
- Crompton, H. (2015). Pre-service teachers' developing Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) and Beliefs on the Use of Technology in the K-12 mathematics classroom: A review of the literature. En C. Angeli y N. Valanides (Eds.), *Technological Pedagogical Content Knowledge: Exploring, Developing, and Assessing TPCK* (pp. 239-250). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4899-8080-9>
- Cumming, G. (2014). The new statistics: Why and how. *Psychological Science*, 25(1), 7-29.
- Cumming, G. y Fidler, F. (2005). Interval estimates for statistical communication: problems and possible solutions. *IASE Satellite Conference on Communication of Statistics*, 1-7.
- Dabos, M. (2011). *Two-year college mathematics instructors' conceptions of variation*. [Tesis doctoral. University of California].
- Dabos, M. (2014). A glimpse of two year college instructors' understanding of variation in histograms. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics*. ISI/IASE.
- De Vetten, A., Schoonenboom, J., Keijzer, R. y van Oers, B. (2019). Pre-service primary school teachers' knowledge of informal statistical inference. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 22(6), 639-661. <https://doi.org/10.1007/s10857-018-9403-9>
- Del Pino, J. (2017). *Síntesis de la investigación sobre variabilidad y dispersión en estadística*.

- Departamento de didáctica de la matemática, Universidad de Granada..
- delMas, R. (2004). A comparison of mathematical and statistical reasoning. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 79-95). Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-2278-6_4
- delmas, R., Garfield, J. y Ooms, A. (2005). Using assessment items to study students' difficulty reading and interpreting graphical representations of distributions. En K. Makar (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Research Forum on Statistical Reasoning, Literacy, and Reasoning* (pp. 1-17). SRTL.
- delMas, R., Garfield, J., Ooms, A. y Chance, B. (2007). Assessing students' conceptual understanding after a first course in statistics. *Statistics Education Research Journal*, 6(2), 28-58.
- Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología* [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
- Doll, B., Haack, K., Kosse, S., Osterloh, M., Siemers, E. y Pray, B. (2005). The dilemma of pragmatics: Why schools don't use quality team consultation practices. *Journal of Educational and Psychological Consultation*, 16(3), 127-155.
- Dollard, C. (2011). Preservice elementary teachers and the fundamentals of probability. *Statistics Education Research Journal*, 10(2), 27-47.
- Dolor, J. y Noll, J. (2015). Using guided reinvention to develop teachers' understanding of hypothesis testing concepts. *Statistics Education Research Journal*, 14(1), 60-89.
- Dunlap, K. y Piro, J. (2016). Diving into data: Developing the capacity for data literacy in teacher education. *Cogent Education*, 3, 1-13.
- Eichler, A. y Zapata-Cardona, L. (2016). *Empirical research in statistics education*. Springer.
- Engel, J. (2017). Statistical Literacy for active citizenship: A call for data science education. *Statistics Education Research Journal*, 16(1), 44-49.
- Engel, J. (2019). Cultura estadística y sociedad: ¿Qué es la estadística cívica? En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. del M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del tercer congreso internacional virtual de educación estadística* (pp. 1-18). Universidad de Granada.
- Engel, J. y Sedlmeier, P. (2011). Correlation and regression in the training of Teachers. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* (pp. 247-258). Springer.
- Engel, J., Sedlmeier, P. y Wörn, C. (2008). Modeling scatterplot data and the signal-noise metaphor: Towards Statistical Literacy for Pre-Service Teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference* (pp. 1-6). ICMI/IASE.
- Escudero-Ávila, D., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA. Revista de investigación en Didáctica de la Matemática*, 10(1), 53-77.
- Espinel, M. C., Bruno, A. y Plasencia, I. (2008). Statistical graph in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference* (pp. 1-6). ICMI/IASE.
- Estepa, A. y Gea, M. M. (2011). Conocimiento para la enseñanza de la asociación estadística. En J. Ortiz (Ed.), *Investigaciones actuales en educación estadística y formación de profesores* (pp. 23-40). Departamento de didáctica de la matemática, Universidad de Granada.

- Estrada, A. (2002). *Análisis de las actitudes y conocimientos estadísticos elementales en la formación del profesorado* [Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona].
- Estrada, A. (2011). Instrumentos de medición de actitudes hacia la estadística: La escala EAEE para profesores. En M. M. Moreno y N. Climent (Eds.), *Investigación en educación matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación de la SEIEM* (pp. 233-251). Universitat de Lleida y SEIEM.
- Estrada, A. y Batanero, C. (2020). Prospective primary school teachers' attitudes towards probability and its teaching. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15(1), 1-14.
- Estrada, A. y Batanero, C. (2015). Construcción de una escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza para profesores. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 239-247). SEIEM.
- Estrada, A., Batanero, C. y Díaz, C. (2018). Exploring teachers' attitudes towards probability and its teaching. En C. Batanero y E. Chernoff (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics, ICME-13 Monographs* (pp. 313-332). Springer.
- Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004a). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores en formación y en ejercicio. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(2), 263-274.
- Estrada, A., Batanero, C. y Fortuny, J. M. (2004b). Un estudio sobre conocimientos de estadística elemental de profesores en formación. *Educación Matemática*, 16(1), 89-111.
- Estrada, A., Batanero, C. y Lancaster, S. (2011). Teachers' attitudes towards statistics. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* (pp. 163-174). Springer.
- Even, R. y Kvatinsky, T. (2010). What mathematics do teachers with contrasting teaching approaches address in probability lessons? *Educational Studies in Mathematics*, 74, 207-222.
- Fernandes, J. y Freitas, A. (2019). Selection and application of graphical and numerical statistical tools by prospective primary school teachers. *Acta Scientiae*, 21(6), 82-97.
- Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de investigación. *PNA. Revistas de Investigación en Educación Matemática*, 1(4), 139-159.
- Franklin, C., Bargagliotti, A., Case, C., Kader, G., Scheaffer, R. y Spangler, D. (2015). *Statistical Education of Teachers (SET)*. American Statistical Association (ASA).
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M. y Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) Report. A pre-K-12 curriculum framework*. American Statistical Association (ASA).
- Friel, S., Curcio, F. y Bright, G. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158.
- Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-51.
- Gal, I., Ginsburg, L. y Schau, C. (1997). Monitoring attitudes and beliefs in statistics education. En I. Gal y J. Garfield (Eds.), *The assessment challenge in statistics education* (pp. 37-51). IOS Press & The ISI.
- Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education*, 10(3). <https://doi.org/10.1080/10691898.2002.11910676>
- Garfield, J. (2003). Assessing statistical reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 2(1), 22-38.

- Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008a). *Developing students' statistical reasoning. Connecting research and teaching practice*. Springer Science & Business Media.
- Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2009). Helping students develop statistical reasoning: Implementing a statistical reasoning learning environment. *Teaching Statistics*, 31(3), 72-77. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9639.2009.00363.x>
- Garfield, J. y Ben-Zvi, D. (2008b). Preparing school teachers to develop students' statistical reasoning. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference* (pp. 1-6). ICMI/IASE.
- Gea, M. M. (2014). *La correlación y regresión en bachillerato: Análisis de libros de texto y del conocimiento de los futuros profesores* [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
- Gea, M. M., Batanero, C., Fernandes, J. y Arteaga, P. (2016). Interpretación de resúmenes estadísticos en futuros profesores de educación secundaria. *Redimat*, 5(2), 135-157.
- Gfeller, M., Niess, M. L. y Lederman, N. (1999). Preservice teachers' use of multiple representations in solving arithmetic mean problems. *School Science and Mathematics*, 99(5), 250-257.
- Giacomone, B. (2018). *Desarrollo de competencias y conocimientos didáctico-matemáticos de futuros profesores de educación secundaria en el marco del enfoque ontosemiótico* [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
- Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(11), 111-132.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Flores, P. (1999). El análisis didáctico del contenido matemático como recurso en la formación de profesores de matemáticas. En *Homenaje al profesor Oscar Sáenz Barrio* (pp. 165-185). Departamento de didáctica y Organización escolar, Universidad de Granada.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. y Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: El modelo CCDM. En J. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, F. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). SEIEM.
- Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H. y Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *Revemat: revista eletrônica de educação matemática*, 8(1), 46-74.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Wilhelmi, M. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference* (pp. 1-6). ICMI/IASE.
- Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. (2006). Análisis y valoraciones de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las Matemáticas. *Paradigma*, 27(2), 221-252.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31(57), 90-113.
- Godino, J. D., Ortiz, J., Roa, R. y Wilhelmi, M. (2011). Models for statistical pedagogical

- knowledge. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMIIASE study* (pp. 271-282).
- Goldin, G. A., Hannula, M., Heyd-Metzuyanim, E., Jansen, A., Kaasila, R., Lutovac, S., Di Martino, P., Morselli, F., Middleton, J., Pantziara, M. y Zhang, Q. (2016). *Attitudes, Beliefs, Motivation and Identity in Mathematics Education*. Springer.
- Gómez-Chacón, I. (2000). *Matemática Emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea.
- Gómez-Torres, E. (2014). *Evaluación y desarrollo del conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad en futuros profesores de educación primaria* [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
- Gómez-Torres, E., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2014). Conocimiento matemático de futuros profesores para la enseñanza de la probabilidad desde el enfoque frecuencial. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 209-229.
- Gómez-Torres, E., Batanero, C., Díaz, C. y Contreras, J. M. (2016). Developing a questionnaire to assess the probability content knowledge of prospective primary school teachers. *Statistics Education Research Journal*, 15(2), 197-215.
- Gómez-Torres, E., Díaz, C., Contreras, J. M. y Ortiz, J. (2018). Prospective teachers' probabilistic reasoning in the context of sampling. En C. Batanero y E. Chernoff (Eds.), *Teaching and learning stochastic, ICME-13 Monographs* (pp. 351-372). Springer.
- González, O. (2016). A framework for assessing statistical knowledge for teaching based on the identification of conceptions of variability held by teachers. En D. Ben-Zvi y K. Makar (Eds.), *The teaching and learning of statistics: International perspectives* (pp. 1-334). Springer.
- González, T., Espinel, M. C. y Ainley, J. (2011). Teachers' graphical competence. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMIIASE study* (pp. 187-198). Springer.
- González, T. y Pinto, J. (2008). Conceptions of four pre-service teachers on graphical representation. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference* (pp. 1-6). ICMI/IASE.
- Grandgenett, N. (2008). Perhaps a matter of imagination: TPCK in mathematics education. En AACTE Committee on Innovation and Technology (Ed.), *Handbook of Technological Pedagogical Content Knowledge (TPCK) for Educators* (pp. 145-166). Routledge.
- Green, J. y Blankenship, E. (2014). Beyond calculations: Fostering conceptual understanding in statistics graduate teaching assistants. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics*. ISI/IASE.
- Groth, R. (2007). Toward a conceptualization of statistical knowledge for teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(5), 427-437.
- Groth, R. (2012). The role of writing prompts in a statistical knowledge for teaching course. *Teacher Educator*, 1(1), 23-40.
- Groth, R. (2013). Characterizing key developmental understandings and pedagogically powerful ideas within a statistical knowledge for teaching framework. *Mathematical Thinking and Learning*, 15(2), 121-145.
- Groth, R. y Bergner, J. (2005). Pre-service elementary school teachers' metaphors for the concept of statistical sample. *Statistics Education Research Journal*, 4(2), 27-42.
- Groth, R. y Bergner, J. (2006). Preservice elementary teachers' conceptual and procedural

- knowledge of mean, median, and mode. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(1), 37-63.
- Groth, R. y Xu, S. (2011). Preparing teachers through case analyses. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMIIASE study* (pp. 371-382). Springer.
- Groth, R. y Meletiou-Mavrotheris, M. (2018). Research on statistics teachers' cognitive and affective characteristics. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 327-355). Springer.
- Hammerman, J. y Rubin, A. (2004). Strategies for managing statistical complexity with new software tools. *Statistics Education Research Journal*, 3(2), 17-41.
- Hannigan, A., Gill, O. y Leavy, A. (2013). An investigation of prospective secondary mathematics teachers' conceptual knowledge of and attitudes towards statistics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(6), 427-449.
- Harradine, A., Batanero, C. y Rossman, A. (2011). Students and teachers' knowledge of sampling and inference. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* (pp. 235-246). Springer.
- Henriques, A. y Ponte, J. (2014). Preparing teachers to teach statistics: Developing professional knowledge and practice. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics*. ISI/IASE.
- Hill, H., Ball, D. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
- Huerta, P. (2018). Preparing teachers for teaching probability through problem solving. En C. Batanero y E. Chernoff (Eds.), *Teaching and learning stochastics, ICME-13 Monographs* (pp. 293-311). Springer.
- Huerta, P. (2015). La resolución de problemas de probabilidad con intención didáctica en la formación de maestros y profesores de matemáticas. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 105-119). SEIEM.
- Inzuna, S. y Jiménez, J. V. (2013). Caracterización del razonamiento estadístico de estudiantes universitarios acerca de las pruebas de hipótesis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(2), 179-211.
- Jacobbe, T. (2012). Elementary school teachers' understanding of the mean and median. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 10(5), 1143-1161.
- Jacobbe, T. (2008). Elementary school teachers' understanding of the mean and median. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference* (pp. 1-6). ICMI/IASE.
- Jacobbe, T. y Carvalho, C. (2011). Teachers' understanding of averages. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMIIASE study* (pp. 199-210). Springer.
- Jacobbe, T. y Horton, R. (2010). Elementary school teachers' comprehension of data displays. *Statistics Education Research Journal*, 9(1), 27-45.
- Kahneman, D. (2011). *Thinking, fast and slow*. Farrar, Straus and Giroux.
- Kahneman, D., Slovic, P. y Tversky, A. (Eds.). (1982). *Judgment under uncertainty: Heuristics and biases*. Cambridge University Press.
- Kazak, S. y Pratt, D. (2017). Pre-service mathematics teachers' use of probability models in making informal inferences about a chance game. *Statistics Education Research Journal*,

- 16(2), 287-304.
- Kilpatrick, J. y Spangler, D. (2015). Educating future mathematics education professors. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education: Third edition* (pp. 297-309). Routledge.
- Koehler, M., Mishra, P., Kereluik, K., Shin, T. S. y Graham, C. (2014). The Technological Pedagogical Content Knowledge Framework. En J. M. Spector, M. D. Merrill, J. Elen y M. J. Bishop (Eds.), *Handbook of Research on Educational Communications and Technology* (4th ed., pp. 101-111).
- Konold, C. y Miller, C. (2005). *TinkerPlots: Dynamic data exploration*. Key Curriculum Press.
- Kultusministerkonferenz. (2004). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. KMK.
- Kultusministerkonferenz. (2005a). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss*. KMK.
- Kultusministerkonferenz. (2005b). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich*. KMK.
- Kustos, P. y Zelkowski, J. (2013). Grade-continuum trajectories of four known probabilistic misconceptions: What are students' perceptions of self-efficacy in completing probability tasks? *Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 508-526.
- Kvatinsky, T. y Even, R. (2002). Framework for teacher knowledge and understanding about probability. En B. Phillips (Ed.), *Developing a statistically literate society. Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 6)* (pp. 1-6). ISI/IASE.
- Leavy, A. (2006). Using data comparison to support a focus on distribution: Examining preservice teachers' understandings of distribution when engaged in statistical inquiry. *Statistics Education Research Journal*, 5(2), 89-114.
- Leavy, A. (2010). The challenge of preparing preservice teachers to teach informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 9(1), 46-67.
- Leavy, A. (2015). Looking at practice: revealing the knowledge demands of teaching data handling in the primary classroom. *Mathematics Education Research Journal*, 27(3), 283-309.
- Leavy, A. y O'Loughlin, N. (2006). Preservice teachers understanding of the mean: Moving beyond the arithmetic average. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9(1), 53-90.
- Lee, H. (2018). Probability concepts needed for teaching a repeated sampling approach to inference. En C. Batanero y E. Chernoff (Eds.), *Teaching and learning stochastics, ICME-13 Monographs* (pp. 89-101). Springer.
- Lee, H., Doerr, H., Tran, D. y Lovett, J. (2016). The role of probability in developing learners' models of simulation approaches to inference. *Statistics Education Research Journal*, 15(2), 216-238.
- Lee, H. y Hollebrands, K. (2008). Preparing to teach mathematics with technology: An integrated approach to developing Technological Pedagogical Content Knowledge. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 8(4), 326-341.
- Lee, H. y Hollebrands, K. (2011). Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI/IASE study* (pp. 359-369). Springer.
- Lee, H., Kersaint, G., Harper, S., Driskell, S., Jones, D., Leatham, K., Angotti, R. y Adu-Gyamfi, K. (2014). Teachers' use of transnumeration in solving statistical tasks with dynamic statistical software. *Statistics Education Research Journal*, 13(1), 25-52.

- Liu, Y. y Thompson, P. (2009). Mathematics teachers' understandings of proto-hypothesis testing. *Pedagogies*, 4(2), 126-138.
- López-Martín, M. del M., Batanero, C. y Gea, M. M. (2019). Prospective high school teachers' interpretation of hypothesis tests and confidence intervals. En U. T. Jankvist, M. van den Heuvel-Panhuizen y M. Veldhuis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1018-1025). ERME.
- López-Martín, M. del M., Molina-Portillo, E., Contreras, J. M. y Ruz, F. (2019). Análisis de los errores de aplicación de la inferencia estadística. En J. M. Contreras, M. Gea, M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-10). Universidad de Granada.
- Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics* (1st ed.). Lawrence Erlbaum Associates.
- Makar, K., Bakker, A. y Ben-Zvi, D. (2011). The reasoning behind informal statistical inference. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1), 152-173.
- Makar, K. y Confrey, J. (2005). «Variation-talk»: Articulating meaning in statistics. *Statistics Education Research Journal*, 4(1), 27-54.
- Makar, K. y Rubin, A. (2018). Learning about statistical inference. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 261-294). Springer.
- Martins, J. A., Estrada, A., Nascimento, M. M. y Comas, C. (2015). Actitudes hacia la estadística de los profesores: Un camino a recorrer. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G. Cañadas, P. Arteaga, E. Molina-Portillo, M. Gea y M. López-Marín (Eds.), *Didáctica de la estadística, probabilidad y combinatoria 2* (pp. 101-107). Universidad de Granada.
- Mason, J. (2016). Perception, interpretation and decision making: understanding gaps between competence and performance: A commentary. *ZDM Mathematics Education*, 48(1-2), 219-226.
- Mcclain, K. (2008). The evolution of teachers' understanding of distribution. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference* (pp. 1-6). ICMI/IASE.
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575-596). NCTM.
- Meletiou-Mavrotheris, M., Kleanthous, I. y Paparistodemou, E. (2014). Developing pre-service teachers' Technological Pedagogical Content Knowledge (TPACK) of sampling. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics*. ISI/IASE.
- Mena, A. (2007). *El estudio de clases japonés en perspectiva*. Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- MINEDUC y CPEIP. (2012). *Estándares orientadores para carreras de pedagogía en educación media*. CPEIP.
- Ministerio de Educación Chile. (2009). *CURRICULUM. Objetivos fundamentales y contenidos mínimos obligatorios de la educación básica y media*. MINEDUC.
- Ministerio de Educación Chile. (2012). *Bases curriculares educación básica*. MINEDUC.
- Ministerio de Educación Chile. (2015). *Bases curriculares 7° a 2° medio*. MINEDUC.
- Ministerio de Educación Chile. (2019). *Bases curriculares 3° y 4° Medio*. MINEDUC.
- Ministerio de Educación Chile. (2020). *Priorización curricular COVID-19 matemática. 1° básico a 4° medio*. Unidad de Curriculum y Evaluación.

- Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *Boletín Oficial del Estado*, 52, 19349-19420.
- Ministerio de Educación Cultura y Deporte. (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado*, 3, 1-35.
- Mishra, P. y Koehler, M. (2008). Introducing Technological Pedagogical Content Knowledge. *Annual Meeting of the American Educational Research Association*, 1-16.
- Mohamed, N. (2012). *Evaluación del conocimiento de futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad*. Universidad de Granada.
- Molina-Portillo, E., Contreras, J. M., Godino, J. D. y Ruz, F. (2019). Statistical literacy in the information society. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*, 35(2), 148-169.
- Molina-portillo, E., Contreras, J. M. y Ruz, F. (2017). La alfabetización estadística gráfica: un desafío para la educación. En REDINE (Ed.), *1st International Virtual Conference on Educational Research and Innovation*. Adaya Press.
- Molina-Portillo, E., Contreras, J. M., Ruz, F. y Contreras, J. (2018). Evaluación de la cultura estadística en futuros profesores de educación primaria: Interpretación y argumentación de gráficos estadísticos. En L. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, Á. Aguilar-González, P. Alonso, F. García y A. Bruno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 348-357). SEIEM.
- Monteiro, C. y Ainley, J. (2007). Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal Mathematics Education*, 2(3), 187-207.
- Montes, M., Ribeiro, M. y Carrillo, J. (2017). Conceptual Issues in developing a framework for examining teachers knowledge. En S. Zehetmeier, B. Rösken-Winter, P. Despina y M. Ribeiro (Eds.), *ETC3 ERME Topic Conference Mathematics Teaching, Resources and Teacher Professional Development* (pp. 187-196). ERME.
- Moore, D. S. (1997). New pedagogy and new content: The case of statistics. *International Statistical Review*, 65(2), 123-137.
- Morey, R., Hoekstra, R., Rouder, J., Lee, M. y Wagenmakers, E. (2016). The fallacy of placing confidence in confidence intervals. *Psychonomic Bulletin and Review*, 23(1), 103-123.
- Nasser, F. (2004). Structural model of the effects of cognitive and affective factors on the achievement of arabic-speaking pre-service teachers in introductory statistics. *Journal of Statistics Education*, 12(1).
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Nicholson, J., Gal, I. y Ridgway, J. (2018). *Understanding Civic Statistics: A conceptual framework and its educational applications*. A product of the ProCivicStat Project. <http://iase-web.org/islp/pcs>.
- Niess, M. L. (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology: Developing a technology pedagogical content knowledge. *Teaching and Teacher Education*, 21(5), 509-523.
- Niess, M. L., Ronau, R., Shafer, K., Driskell, S., Harper, S., Johnston, C., Browning, C., Özgün-Koca, S. A. y Kersaint, G. (2009). Mathematics Teacher TPACK standards and development model. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 9(1), 4-24.
- Nolan, M. M., Beran, T. y Hecker, K. G. (2012). Surveys assessing students' attitudes toward statistics: A systematic review of validity and reliability. *Statistics Education Research Journal*, 11(2), 103-123.

- Noll, J. (2011). Graduate teaching assistants' statistical content knowledge of sampling. *Statistics Education Research Journal*, 10(2), 48-74.
- OCDE. (2019). *CORE FOUNDATIONS for 2030: Conceptual learning framework*. <http://www.oecd.org/education/2030-project/teaching-and-learning/learning/>
- OCDE. (2014). Indicator D6: What does it take to become a teacher? En *Education at a Glance 2014 Education at a Glance 2014: OECD Indicators*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/888933120252>
- Olivo, E. (2008). *Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México* [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
- Onwuegbuzie, A. J. (1998). Teachers attitudes toward statistics. *Psychological Reports*, 83, 1008-1010.
- Ortiz, J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2012). Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME*, 15(1), 63-91.
- Ortiz, J. y Font, V. (2014). Pre-service teachers' common content knowledge regarding the arithmetic mean. *Redimat*, 3(3), 192-219.
- Parraguez, R., Gea, M. M., Díaz-Levicoy, D. y Batanero, C. (2017). ¿Conectan los futuros profesores las aproximaciones frecuencial y clásica de la probabilidad? *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 17(2).
- Peters, S. (2011). Robust understanding of statistical variation. *Statistics Education Research Journal*, 10(1), 52-88.
- Peters, S. (2014). Developing understanding of statistical variation: Secondary statistics teachers' perceptions and recollections of learning factors. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7, 539-582.
- Peters, S. y Kopeikin, K. (2016). The teaching and learning of statistics: International perspectives. En D. Ben-Zvi y K. Makar (Eds.), *The Teaching and Learning of Statistics: International Perspectives* (pp. 249-259). Springer.
- Peters, S. y Stokes-Levine, A. (2019). Secondary teachers' learning: Measures of variation. En G. Burrill y D. Ben-Zvi (Eds.), *Topics and trends in current statistics education research: International perspectives* (pp. 245-264). Springer.
- Pfannkuch, M. y Ben-Zvi, D. (2011). Developing teachers' statistical thinking. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMILASE study* (pp. 323-333). Springer.
- Pfannkuch, M., Budgett, S., Fewster, R., Fitch, M., Pattenwise, S., Wild, C. y Ziedins, I. (2016). Probability modeling and thinking: What can we learn from practice? *Statistics Education Research Journal*, 15(2), 11-37.
- Pfannkuch, M. y Wild, C. (2004). Towards an understanding of statistical thinking. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 17-46). Springer.
- Pfannkuch, M. y Ziedins, I. (2014). A modelling perspective on probability. En E. Chernoff y B. Sriraman (Eds.), *Probabilistic thinking: Presenting plural perspectives* (pp. 101-116). Springer Science & Business Media.
- Philipp, R. A. (2007). Mathematics teachers' beliefs and affect. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 257-315). NCTM & Information Age Publishing.
- Piñeiro, J. L. (2019). *Conocimiento profesional de maestros en formación inicial sobre resolución de problemas en matemáticas* [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
- Pino-Fan, L., Assis, A. y Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization

- of teachers' Didactic-Mathematical Knowledge. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 11(6), 1429-1456.
- Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del Conocimiento Didáctico-Matemático del profesor. *Paradigma*, XXXVI(1), 87-109.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2018). Assessing key epistemic features of Didactic-Mathematical Knowledge of prospective teachers: The case of the derivative. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21, 63-94. <https://doi.org/10.1007/s10857-016-9349-8>
- Piro, J., Dunlap, K. y Shutt, T. (2014). A collaborative Data Chat: Teaching summative assessment data use in pre-service teacher education. *Cogent Education*, 1(1), 1-24.
- Piro, J. y Hutchinson, C. (2014). Using a data chat to teach instructional interventions: Student perceptions of data literacy in an assessment course. *The New Educator*, 10(2), 95-111.
- Ponte, J. (2011). Preparing teachers to meet the challenges of statistics education. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMIIASE study* (pp. 299-307).
- Ponte, J. (2012). Estudiando el coocimiento y el desarrollo profesional de profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98). Graó.
- Ponte, J. y Chapman, O. (2016). Prospective mathematics teachers' learning and knowledge for teaching. En L. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education: Third Edition* (pp. 275-296). Routledge.
- Ponte, J. y Noll, J. (2018). Building capacity in statistics teacher education. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 433-455). Springer.
- Ponte, J. y Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*, 11(2), 145-163.
- Pratt, D. y Kazak, S. (2018). Research on uncertainty. En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 193-227). Springer.
- Ramos, C., Espinel, M. C. y Ramos, R. (2009). Identificación de los errores en los contrastes de hipótesis de los alumnos de bachillerato. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, 61(2), 35-44.
- Reaburn, R. (2014). Introductory statistics course tertiary students' understanding of p-values. *Statistics Education Research Journal*, 13(1), 53-65.
- Reading, C. y Canada, D. (2011). Teachers' knowledge of distribution. En C. Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics: Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMIIASE study* (pp. 223-234). Springer.
- Ridgway, R., Nicholson, J. y Gal, I. (2018). Understanding statistics about society: A framework of knowledge and skills needed to engage with civic statistics. En M. Sorto, A. White y L. Guyot (Eds.), *Looking back, looking forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 10)* (pp. 1-6). ISI/IASE.
- Rivas, H. (2014). *Idoneidad didáctica de procesos de formación estadística de profesores de educación primaria* [Tesis doctoral, Universidad de Granada].
- Roberts, D. M. y Bilderback, E. W. (1980). Reliability and validity of a Statistics Attitude Survey. *Educational and Psychological Measurement*, 40, 235-238.
- Rodríguez-Alveal, F., Vásquez, C. y Rojas, F. (2019). Formación inicial docente en profesores de matemática: una mirada desde la evaluación nacional diagnóstica. *Estudios Pedagógicos*, 45(2), 141-153.
- Rossmann, A. (2008). Reasoning about informal statistical inference: One statistician's view.

- Statistics Education Research Journal*, 7(2), 5-19.
- Rossman, A. y Chance, B. (2014). Using simulation-based inference for learning introductory statistics. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 6(4), 211-221.
- Rossman, A., Chance, B. y Medina, E. (2006). Some key comparisons between statistics and mathematics and why teachers should care. En *Thinking and reasoning with data and chance: Sixty-eighth annual yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 323-333). NCTM.
- Ruiz, B., Arteaga, P. y Batanero, C. (2009). Comparación de distribuciones. ¿Una actividad sencilla para los futuros Profesores? *II Encontro de Probabilidade e Estatística na Scola*, 1-21.
- Ruz, F. (2017). Alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico en la formación de profesores de matemática. En REDINE (Ed.), *1st International Virtual Conference on Educational Research and Innovation*. Adaya Press.
- Ruz, F., Díaz-Levicoy, D., Molina-Portillo, E. y Ruiz-Reyes, K. (2018). Ways to strengthen the statistical literacy, reasoning and thinking in the mathematics teachers training. En M. Sorto, A. White y L. Guyot (Eds.), *Looking back, looking forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 10)*. ISI/IASE.
- Ruz, F., Martínez, F., Garzón, J. y Contreras, J. M. (2020). Estadística cívica en la sociedad de la información. En T. Sola, J. López, A. Moreno, J. Sola y S. Pozo (Eds.), *Investigación Educativa e Inclusión Retos actuales en la sociedad del siglo XXI* (pp. 805-816). Dykinson.
- Ruz, F., Molina-Portillo, E. y Contreras, J. M. (2019). Guía de Valorización de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Instrucción en Didáctica de la Estadística. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(63), 135-154. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n63a07>
- Ruz, F., Molina-Portillo, E. y Contreras, J. M. (2020a). Actitudes hacia la estadística descriptiva y su enseñanza en futuros profesores. *Cadernos de Pesquisa*, 50(178), 964-980.
- Ruz, F., Molina-Portillo, E. y Contreras, J. M. (2020b). Evaluación de conocimientos sobre el contenido de estadística descriptiva en futuros profesores de matemáticas. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 18, 55-71.
- Ruz, F., Molina-Portillo, E. y Contreras, J. M. (2020c). Idoneidad didáctica de procesos de instrucción programados sobre didáctica de la estadística. *PNA. Revista de investigación en Didáctica de la Matemática*, 14(2), 141-172. <https://doi.org/10.30827/pna.v14i2.8897>
- Ruz, F., Molina-Portillo, E., Vásquez, C. y Contreras, J. M. (2020). Attitudes towards Probability and its Teaching in prospective mathematics teachers from Chile and Spain. *Acta Scientiae*, 22(2), 48-66. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.5489>
- Ruz, F., Olivares, C. y Ramos, E. (2018). *Estadística y probabilidades para profesores de matemáticas*. Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Ruz, F., Molina-Portillo, E. y Contreras, J.M. (aceptado). Exploring probability content knowledge of prospective mathematics teachers. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*.
- Ruz, F., Chance, B., Medina, E. y Contreras, J.M. (en prensa). Content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching in pre-service chilean mathematics teachers. *Statistics Education Research Journal*.
- Ruz, F., Chance, B. y Contreras, J.M. (en revisión). Attitudes towards stochastics and its teaching in Chilean preservice mathematics teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*.
- Sánchez, E., Silva, C. y Coutinho, C. (2011). Teachers' understanding of variation. En C.

- Batanero, G. Burrill y C. Reading (Eds.), *Teaching Statistics in School Mathematics - Challenges for Teaching and Teacher Education A Joint ICMIIASE Study* (pp. 211-222). Springer.
- Schau, C. (2003). *Survey of Attitudes Toward Statistics (SATS-36)*. <https://www.evaluationandstatistics.com/>
- Schau, C. y Emmioğlu, E. (2012). Do introductory statistics courses in the United States improve students' attitudes? *Statistics Education Research Journal*, 11(2), 86-94.
- Schau, C., Stevens, J., Dauphinee, T. y Del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the survey of attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 55(5), 868-875.
- Schiold, M. (1999). Statistical literacy: Thinking critically about statistics. *Of Significance*, 1(1), 1-7.
- Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *International handbook of mathematics teacher education* (Vol. 2, pp. 321-354). Sense Publishers.
- Serradó, A. (2013). El proyecto internacional de alfabetización estadística. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 83(Julio), 19-33.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.
- Sikorski, J. (2016). *Examination of the NU Data Knowledge Scale* [Doctoral Tesis, University of Nebraska].
- Sikorski, J., Doll, B., Thomas, A., Franta, E. y Kenney, C. (2014). NU Data: Building educators' data use in schools. *The Researcher*, 26(1), 23-27.
- Silva, C. y Coutinho, C. (2008). Reasoning about variation of a univariate distribution: A study with secondary mathematics teachers. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference* (pp. 1-6). ICMI/IASE.
- Silverman, J. y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 499-511.
- Simon, M. A. (2006). Key developmental understandings in mathematics: A Direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(4), 359-371.
- Smith, T. y Hjalmarson, M. (2013). Eliciting and developing teachers' conceptions of random processes in a probability and statistics course. *Mathematical Thinking and Learning*, 15(1), 58-82.
- Souza, L., Lopes, C. y Pfannkuch, M. (2015). Collaborative professional development for statistics teaching: A case study of two middle-school mathematics teachers. *Statistics Education Research Journal*, 14(1), 112-134.
- Strutchens, M., Huang, R., Losano, L., Despina, P., Ponte, J., de Costa, M. y Zbiek, R. (2017). *The Mathematics Education of Prospective Secondary Teachers Around the World* (ICME-13 Topical Surveys). Springer.
- Tatto, M. T., Peck, R., Schwille, J., Bankov, K., Senk, S. L., Rodriguez, M., Ingvarson, L., Reckase, M. y Rowley, G. (2012). *Policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics in 17 countries: Findings from the IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M)*. International Association for the

- Evaluation of Educational Achievement (IEA).
- Thanheiser, E., Noll, J. y Leavy, A. (2011). Statistical preparation of teachers: Preservice elementary teachers (PST's) conceptions of distributions of data - Thinking about measure of center and variability. En L. Wiest y L. Teruni (Eds.), *Proceedings of the 33rd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 541-549). PME.
- Tishkovskaya, S. y Lancaster, G. A. (2012). Statistical education in the 21st century: A review of challenges, teaching innovations and strategies for reform. *Journal of Statistics Education*, 20(2), 1-24.
- Valle, J. M. y Jesús, M. (2011). La nueva formación inicial del profesorado de Educación Secundaria: modelo para la selección de buenos centros de prácticas. *Revista de Educación*, 354, 267-290.
- Vallecillos, A. (1994). *Estudio teórico experimental de errores y concepciones sobre el contraste estadístico de hipótesis en estudiantes universitarios* [Tesis Doctoral, Universidad de Granada].
- Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. *Bulletin of the International Statistical Institute: Proceedings of the Fifty-Second Session of the International Statistical Institute*. ISI
- Vanhoof, S., Kuppens, S., Castro-Sotos, A., Verschaffel, L. y Onghena, P. (2011). Measuring statistics attitudes: Structure of the Survey of Attitudes Toward Statistics (SATS-36). *Statistics Education Research Journal*, 10(1), 35-51.
- Vásquez, C., Alvarado, H. y Ruz, F. (2019). Actitudes de futuras maestras de educación infantil hacia la estadística, la probabilidad y su enseñanza. *Educación Matemática*, 31(3), 177-202.
- Vásquez, C. (2014). *Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidad de profesores de educación primaria en activo* [Tesis Doctoral, Universitat de Girona].
- Vera, O., Díaz, C. y Batanero, C. (2011). Dificultades en la formulación de hipótesis estadísticas por estudiantes de Psicología. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 27, 41-61.
- Vermette, S. (2018). Secondary school teachers' knowledge of the standard deviation concept. En M. Sorto, A. White y L. Guyot (Eds.), *Looking back, looking forward. Proceedings of the Tenth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 10)*. ISI/IASE.
- Vermette, S. y Gattuso, L. (2014). High school teachers' Pedagogical Content Knowledge of variability. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics*. ISI/IASE.
- Vermette, S. y Savard, A. (2019). Necessary knowledge for teaching statistics: Example of the concept of variability. En G. Burrill y D. Ben-Zvi (Eds.), *Topics and trends in current statistics education research: International perspectives* (pp. 225-244). Springer.
- Wallman, K. K. (1993). Enhancing statistical literacy: Enriching our society. *Journal of the American Statistical Association*, 88(421), 1-8.
- Wassong, T. y Biehler, R. (2010). A model for teacher knowledge as a basis for online courses for professional development of statistics teachers. En C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS8)* (pp. 1-6).
- Wassong, T. y Biehler, R. (2014). The use of technology in a mentor teacher course in statistics education. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics* (pp.

- 1-6). ISI/IASE.
- Watson, J. M. (2001). Profiling teachers' competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4, 305-337.
- Watson, J. M., Callingham, R. y Donne, J. (2008). Proportional reasoning: Student knowledge and teachers' Pedagogical Content Knowledge. En M. Goos, R. Brown y K. Makar (Eds.), *Navigating currents and charting directions: Proceedings of the 31st Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 1, pp. 563-571). MERGA.
- Watson, J. M., Callingham, R. y Nathan, E. (2009). Probing teachers' Pedagogical Content Knowledge in statistics: «How will Tom get to school tomorrow?» En R. Hunter, B. Bicknell y T. Burgess (Eds.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (Vol. 2, pp. 563-570). MERGA.
- Watson, J. M. y Chance, B. (2012). Building intuitions about statistical inference based on resampling. *Australian Senior Mathematics Journal*, 26(1), 6-18.
- Wild, C. (2006). The concept of distribution. *Statistics Education Research Journal*, 5(2), 10-26.
- Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, 67(3), 223-248.
- Winslow, C. y Durand-Guerrier, V. (2007). Education of lower secondary mathematics teachers in Denmark and France. *Nordic Studies in Mathematics Education*, 12(2), 5-32.
- Wise, S. L. (1985). The development and validation of a scale measuring attitudes toward statistics. *Educational and Psychological Measurement*, 45, 401-405.
- Zieffler, A., Garfield, J., Delmas, R. y Reading, C. (2008). A framework to support research on informal inferential reasoning. *Statistics Education Research Journal*, 7(2), 40-58.
- Zientek, L. R., Carter, T. A., Taylor, J. M. y Capraro, R. M. (2011). Preparing Prospective Teachers: An examination of attitudes toward statistics. *Journal of Mathematical Sciences & Mathematics Education*, 5(1), 25-38.

Anexo 1

Resultados en Ítems sobre Probabilidad e Inferencia

Instrumento

La Tabla 1 presenta las especificaciones referidas a los ítems restantes del cuestionario sobre el conocimiento del contenido de estocástica para profesores. En ella, diferenciamos en el contenido central que evalúan (entre probabilidad e inferencia estadística) y el tipo de conocimiento del contenido según el modelo CCDM (común y ampliado). Comenzaremos la presentación correlativamente desde el número siete, ya que los seis primeros ítems fueron ejemplificados en el artículo de AIEM (Capítulo 3), aunque el orden de los 20 reactivos que conformaron el cuestionario completo fue el incluido en el artículo de SERJ (Capítulo 3).

Tabla A1

Especificaciones sobre los contenidos de probabilidad e inferencia estadística

Especificación (E)	Contenido	Conocimiento
E7. Aplicación del enfoque frecuencial como aproximación a la probabilidad teórica de un suceso aleatorio	Probabilidad	Común
E8. Aplicación del enfoque subjetivo como aproximación a la probabilidad de un suceso aleatorio condicionado por conocimientos previos.	Probabilidad	Ampliado
E9. Uso de las propiedades de dependencia e independencia de sucesos para calcular la probabilidad en experimentos compuestos.	Probabilidad	Común
E10. Aplicación de los teoremas de la probabilidad total y Bayes en la resolución de problemas.	Probabilidad	Ampliado
E11. Relación entre distintos sistemas de representación que modelan el comportamiento de fenómenos aleatorios por medio de distribuciones de probabilidad discretas.	Probabilidad	Común
E12. Relación entre distintos sistemas de representación que modelan el comportamiento de fenómenos aleatorios por medio de distribuciones de probabilidad continuas.	Probabilidad	Común
E13. Aplicación de las principales propiedades de las distribuciones de probabilidad discretas en la resolución de problemas.	Probabilidad	Ampliado
E14. Efecto del tamaño de la muestra en la variabilidad de la distribución muestral del estadístico.	Inferencia	Común
E15. Aplicación de las distribuciones muestrales en la resolución de problemas.	Inferencia	Común
E16. Interpretación del nivel de confianza de un IC.	Inferencia	Ampliado
E17. Factores que influyen en la amplitud de un IC.	Inferencia	Común
E18. Interpretación de la lógica de los contrastes estadísticos de hipótesis.	Inferencia	Ampliado

E19. Identificación de las hipótesis de un contraste estadístico de hipótesis.	Inferencia	Ampliado
E20. Relación entre el nivel de significación y el p-valor de un contraste de hipótesis.	Inferencia	Ampliado

Fuente. Elaboración propia

Algunas características psicométricas

En la Tabla 2, presentamos algunos indicadores sobre las propiedades psicométricas de los ítems seleccionados para evaluar los contenidos de probabilidad e inferencia, tras su implementación en la muestra piloto.

Tabla A2

Índices de dificultad y discriminación de los ítems sobre probabilidad e inferencia

Ítem	Índice dificultad	Índice discriminación	p-valor
7	0.75	0.243	0.000*
8	0.25	0.292	0.000*
9	0.25	0.201	0.026*
10	0.04	-0.032	0.719
11	0.28	0.342	0.000*
12	0.41	0.310	0.000*
13	0.19	0.378	0.000*
14	0.31	0.323	0.000*
15	0.62	0.338	0.000*
16	0.04	0.126	0.267
17	0.41	0.473	0.000*
18	0.11	0.157	0.079
19	0.28	0.119	0.186
20	0.17	0.425	0.000*

Nota. *Resultados estadísticamente significativos a un nivel de 0.05

Sobre los ítems de probabilidad

En cuanto al índice de dificultad, podemos apreciar que los ítems 10 y 13 alcanzan su menor valor con un 0.04 y 0.19 respectivamente, lo que nos indican su condición de difíciles, mientras que para los demás, su valor oscila entre 0.25 (ítems 8 y 9) y 0.75 (ítem 7), lo que nos permite concluir que los cinco ítems restantes cuentan con un grado de dificultad moderada. Por otro lado, sobre los resultados de la capacidad de discriminación de los ítems, podemos notar que en seis de los siete casos el p-valor es menor a 0.05, por lo que podemos rechazar la hipótesis nula y concluir que la correlación entre la puntuación total y la de cada ítem es significativa, es decir, distinta de cero (salvo en el ítem 10). Además, según la clasificación propuesta por Ebel y Frisbie (1991, p. 232), los ítems 11, 12 y 13 tienen una fuerza de discriminación *adecuada* por tener un índice entre 0.30-0.39, mientras que los ítems 7, 8 y 9

logran una condición *regular* por pertenecer al rango 0.20-0.29 y por obtener un índice negativo, es necesaria una revisión detallada del contenido del ítem 10. Este reactivo es aquel que cuenta con el menor índice de dificultad y discriminación de la Tabla 2, es decir, la mayoría de los participantes responden incorrectamente y quienes lo hacen bien, no se corresponden con aquellos con mejor rendimiento en la evaluación total. Sin embargo, al observar el contenido que se busca evaluar con él, notamos que nuestros participantes tienden al error de confundir las probabilidades condicionales y conjuntas en la aplicación de los teoremas de la probabilidad total y Bayes, aspecto reportado previamente en la literatura (Contreras, 2011; Díaz, 2007) lo que explica este comportamiento. Por tanto, es considerado como un ítem valioso para identificar la presencia de este error en futuros profesores, por lo que decidimos mantenerlo como parte del cuestionario.

Sobre los ítems de inferencia

Respecto al índice de dificultad, podemos apreciar que el ítem 16 alcanza su menor valor con un 0.04, lo que nos indica su condición de difícil, mientras que para los demás, oscila entre 0.11 (ítem 18) y 0.62 (ítem 15), lo que nos permite concluir que los seis ítems restantes cuentan con un grado de dificultad moderada. A su vez, los resultados de la capacidad de discriminación de los ítems, en cuatro de los siete casos la correlación entre la puntuación total y la de cada ítem es significativa (con * Tabla 2), es decir, distinta de cero (salvo en los ítems 16, 18 y 19). Además, según la clasificación propuesta por Ebel y Frisbie (1991, p. 232), los ítems 17 y 20 tienen una fuerza de discriminación excelente, mientras que los ítems 14 y 15 alcanzan un grado de discriminación adecuada y los ítems 16, 18 y 19 logran una condición regular, por lo que es necesaria una revisión de su contenido.

En cuanto el Ítem 16 es aquel que obtiene un menor índice de dificultad y discriminación. Sin embargo, al analizar su estructura, notamos que la opción correcta (D) “Ninguna de las anteriores” parece ser poco atractiva como distractor, ya que las demás consideran errores altamente arraigados según la literatura. Entonces se decide modificar esta alternativa por una que incluya la interpretación correcta del nivel de confianza de un intervalo, quedando: “Si tomáramos varias muestras del mismo tamaño, en el 95% de los intervalos calculados estará contenido el verdadero número medio de chips por galleta”.

Sobre Ítem 18, producto de su alta tasa de omisión y dado que contamos con otro ítem cuya valoración de expertos es igual de buena, se deciden modificar entre sí. Con esto, esperamos evitar conflictos que puedan generar su omisión en la aplicación futura, los que pensamos pueden estar relacionados con las controversias existentes entre la lógica de Fisher y Neyman-

Pearson. Por tanto, seleccionamos el ítem 16 de Vallecillos (1994, p. 197), donde se define más claramente un contraste de hipótesis y sus componentes, a diferencia del elegido inicialmente. Por último, el Ítem 19, este es aquel que cuenta con el mayor índice de dificultad y el menor de discriminación entre los tres. Al analizar el contenido que busca ser evaluado con él, notamos que confundir las hipótesis nula y alternativa en un contraste de hipótesis es un error común en la literatura, lo que nos motiva a mantenerlo para identificar su presencia en futuros profesores. Además, comparando nuestros resultados con los obtenidos en el análisis piloto de su versión original, estos son similares, pudiendo proyectar que en su implementación futura puedan variar como lo hicieron en Vallecillos (1994).

Ítems seleccionados

7) Un profesor vació sobre la mesa un paquete de 100 chinchas metálicas obteniendo los siguientes resultados: 68 caen con la punta para arriba  y 32 caen hacia abajo . Luego, el profesor pide a 4 estudiantes (Alba, Bernardo, Carmen y David) repetir el experimento, lanzando cada uno las 100 chinchetas. Entre las siguientes opciones, ¿cuál colección de resultados piensas que es más probable?

A.

Resultado	Alba	Bernardo	Carmen	David
Punta arriba:	32	70	35	65
Punta abajo:	68	30	65	35

C.

Resultado	Alba	Bernardo	Carmen	David
Punta arriba:	69	68	67	68
Punta abajo:	31	32	33	32

*B.

Resultado	Alba	Bernardo	Carmen	David
Punta arriba:	63	70	64	71
Punta abajo:	37	30	36	29

D.

Resultado	Alba	Bernardo	Carmen	David
Punta arriba:	50	51	48	53
Punta abajo:	50	49	52	47

8) Una bola se suelta en E. Si sale por R, ¿cuál es la probabilidad de que haya pasado por el canal I?

A. 0,50

B. 0,33

*C. 0,66

D. No se puede calcular

9) Se extrae una carta al azar de una baraja española (40 cartas diferentes, con números del 1 al 7, sota, caballo y rey; y cuatro palos diferentes: oros, copas, espadas y bastos). Considere los sucesos: A: “Se extrae una carta de oros” y B: “Se extrae un rey”. ¿Los sucesos A y B son independientes?

A. No son independientes porque en la baraja hay un rey de oros.

B. Sólo si sacamos primero una carta para ver si es rey y se vuelve a colocar en la baraja y luego sacamos una segunda carta para mirar si es un oro.

C. No, porque $P(\text{Rey de oro}) = P(\text{Rey}) \cdot P(\text{oro})$

*D. Sí, en todos los casos.

10) Un taxi se vio implicado en un accidente nocturno con choque y huida posterior. Hay dos compañías de taxis en la ciudad, una con vehículos de color verde y otra de color azul. El 85% de los taxis de la ciudad son verdes y los demás azules. Un testigo identificó el taxi como azul. El tribunal comprobó la fiabilidad del testigo bajo las mismas circunstancias que había la noche del accidente y llegó a la conclusión de que el testigo identificaba correctamente cada uno de

los colores en el 80% de las ocasiones y fallaba en el 20%. ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi implicado en el accidente fuese realmente azul?

- A. 0.80 B. 0.15 C. $0.15 \cdot 0.80$ *D. 0.41

11) ¿En cuál de las siguientes situaciones se puede modelar la variable aleatoria de interés por medio de una distribución binomial?

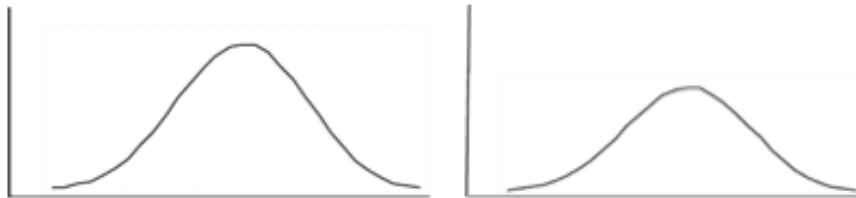
A. En una empresa de fabricación, aproximadamente el 5% de los productos son defectuosos. Se pretende calcular la probabilidad de que el tercer artículo defectuoso sea el vigésimo producto seleccionado.

B. Al lanzar un par de dados usuales (no trucados y de seis caras cada uno) queremos saber el número de lanzamientos necesarios antes de obtener por primera vez una suma de 7.

*C. Un policía ha descubierto que aproximadamente el 15% de los vehículos que detiene son de fuera de la región. Estamos interesados en conocer la cantidad de vehículos de otra región en los próximos 50 que detiene.

D. En un juego de mesa, se desea apostar a la carta con mayor probabilidad de ser extraída de una baraja inglesa (52 naipes).

12) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre las curvas que se muestran a continuación es cierta?



A. No se puede asegurar que las curvas son normales, pero sí que sus medias y desviaciones típicas no son iguales.

*B. Las dos curvas son normales, pero las desviaciones típicas son diferentes.

C. Las dos curvas son normales, pero las medias son distintas.

D. En ambas curvas, el 50 % de los datos está comprendido en el intervalo $(\mu - \sigma; \mu + \sigma)$

13) El número de aviones que aterriza a un aeropuerto es un factor importante para coordinar la asignación de pistas de aterrizaje. Suponga que el índice de llegadas de aviones se distribuye según una distribución Poisson con una tasa de 6 llegadas por hora. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

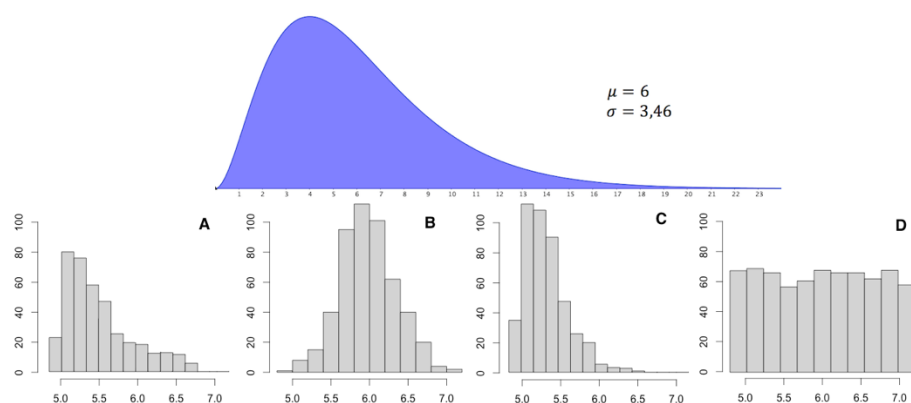
*A. Se espera que lleguen 3 aviones en media hora.

B. Es igualmente improbable que lleguen 4 aviones en una hora a que lo hagan 8 en el mismo período.

C. La probabilidad de que aterricen 6 aviones en una hora es casi 1.

D. Es imposible que lleguen 9 aviones en una hora.

14) A continuación se presentan cinco gráficos. El de la parte superior corresponde a la distribución de una población respecto a los resultados de una prueba. A partir de estos datos, ¿qué gráfica (A, B, C o D) crees que representa una distribución de 500 medias muestrales a partir de muestras aleatorias de tamaño 100 cada una?



A. Gráfico A

***B. Gráfico B**

C. Gráfico C

D. Gráfico D

15) La estatura media de los universitarios es de 178 centímetros (cm), con una desviación estándar de 8 cm. Mientras que la altura promedio de las universitarias es de 165 cm, con una desviación estándar de 10 cm. Usted realiza un experimento en su universidad midiendo la altura de 100 hombres y 100 mujeres. ¿Qué resultado le sorprendería más?

A. Un hombre con una estatura de 200 cm.

B. Una mujer con estatura de 188 cm.

C. Que la estatura promedio de las mujeres en su universidad sea menor de 163 cm.

***D. Que la estatura promedio de los hombres en su universidad sea mayor de 185 cm.**

16) Los estudiantes de una escuela secundaria quieren estimar el número medio de chips de chocolate que contienen las galletas de una marca X. Para ello, recopilan una muestra aleatoria de galletas, cuentan los chips en cada una y calculan un intervalo de confianza del 95% para el número promedio de chips por galleta [18,6 – 21,3]. ¿Cuál de las siguientes interpretaciones de los resultados es correcta?

A. Tenemos el 95% de certeza de que cada galleta producida por esta marca tiene aproximadamente entre 18,6 y 21,3 chips de chocolate.

B. Esperamos que el 95% de las galletas tenga entre 18,6 y 21,3 chips de chocolate.

C. Esperamos que aproximadamente el 95% de todas las medias muestrales posibles de esta población oscilarán entre 18,6 y 21,3 chips de chocolate.

***D. Ninguna de las anteriores.**

17) Sobre algunos factores que influyen en la amplitud de un intervalo de confianza (IC) para la media poblacional, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?

A. El IC será más ancho cuando se utilice una muestra grande.

***B. Si la desviación estándar de la población disminuye, la anchura del IC disminuye.**

C. La elección del nivel de confianza no influye en la amplitud del IC.

D. Al aumentar la media muestral aumenta la amplitud del IC.

18) La siguiente situación modela la lógica de una prueba de hipótesis. Un electricista usa un instrumento para probar si un circuito eléctrico está defectuoso o no. Sin embargo, el instrumento a veces falla en detectar si un circuito trabaja correctamente. La hipótesis nula es que el circuito no es defectuoso. La hipótesis alternativa es que el circuito es defectuoso. Si el electricista rechaza la hipótesis nula, ¿cuál de las siguientes declaraciones es verdadera?

A. El circuito definitivamente es defectuoso y necesita ser reparado.

B. El electricista decide que el circuito está defectuoso, pero podría estar bien.

C. El circuito está definitivamente bien y no necesita reparación.

D. El circuito probablemente esté bien, pero podría estar defectuoso.

19) En una encuesta electoral se desea averiguar si hay más ciudadanos a favor de la política económica del presidente que en contra de la misma. Suponiendo que p representa la probabilidad asociada a que los habitantes estén de acuerdo con dicha política económica y que $q = 1 - p$. ¿Cuál de las siguientes hipótesis elegiría como hipótesis nula?

- A. $p > q$ *B. $p = q = \frac{1}{2}$ C. $p \neq q \neq \frac{1}{2}$ D. $p < q$

20) Un artículo de investigación informa de la efectividad de un nuevo medicamento para disminuir la pérdida de visión en personas con un tipo de degeneración ocular. El artículo indica un p -valor de 0,04 en la sección donde describen el análisis realizado. A partir de esta información, ¿cuál de las siguientes interpretaciones sobre el p -valor es correcta?

- *A. La probabilidad de obtener resultados tan extremos, o más extremos que los de este estudio, si el medicamento en realidad no es efectivo.
- B. La probabilidad de obtener resultados tan extremos, o más extremos que los de este estudio, si el medicamento es efectivo.
- C. La probabilidad de que el medicamento sea efectivo.
- D. La probabilidad de que, si el medicamento no es efectivo, el resultado se deba al azar.

Anexo 2

Escala de Actitudes hacia la Inferencia Estadística y su Enseñanza

Algunos resultados de interés en la muestra piloto

En la Tabla 1 presentamos la puntuación media y desviación estándar según cada componente, al considerar el contenido de inferencia estadística, sumado al alfa de Cronbach de cada uno como medida de la confiabilidad de la escala.

Tabla A3

Estadísticos de resumen según componentes de actitudes considerados

Dim	Componentes hacia los contenidos de inferencia	n	Estadísticos		Confiabilidad
			Media	D.E.	Alfa Cronbach
1	Afectivo	122	12.92	3.41	0.639
1	Cognitivo	118	12.48	3.01	0.467
1	Comportamental	122	13.09	3.11	0.556
2	Afectivo	122	13.30	3.26	0.624
2	Didáctico	122	13.17	3.28	0.686
2	Comportamental	121	14.58	3.28	0.663
3	Valor	122	16.28	2.66	0.652
	Total	101	96.75	14.77	0.856

Fuente. Resultados de la investigación

Tabla A4

Resultados de la EAIEE por ítem

Ítem	n (%)	Media	D.E.
1) Me divierto en las clases en las que se explican los contenidos de inferencia estadística.	126 (100)	2.94	1.17
2) Utilizo información sobre inferencia estadística a la hora de tomar decisiones.	126 (100)	2.94	1.26
3) Será difícil para mi enseñar los temas de inferencia estadística.	126 (100)	3.30	1.17
4) Los contenidos de inferencia estadística ayudan a entender el mundo de hoy.	125 (99.2)	3.82	1.00
5) Me gusta la inferencia estadística, es un tema que siempre me ha interesado.	123 (97.6)	2.92	1.29
6) Los contenidos sobre inferencia estadística son fáciles.	124 (98.4)	2.86	1.06
7) Nunca he usado la inferencia estadística fuera de un contexto científico.	126 (100)	3.20	1.30
8) Domino los principales contenidos de inferencia estadística.	122 (96.8)	3.01	1.20

9) Estoy seguro que me gustará enseñar los contenidos de inferencia estadística en la escuela.	126 (100)	3.21	1.23
10) Creo que sabré detectar y corregir errores y dificultades de los alumnos con los temas de inferencia estadística.	124 (98.4)	3.45	1.09
11) Solo enseñaré los contenidos de inferencia estadística si me queda tiempo después de los otros temas.	126 (100)	3.52	1.31
12) La inferencia estadística no sirve para nada.	126 (100)	4.58	0.74
13) La inferencia estadística no tiene tanto valor como otras ramas de la matemática.	124 (98.4)	4.03	1.06
14) Me resultará fácil diseñar actividades de evaluación de la inferencia estadística.	124 (98.4)	2.97	1.13
15) Uso la inferencia estadística en la vida cotidiana.	123 (97.6)	2.80	1.14
16) Me siento intimidado ante datos sobre inferencias estadísticas.	125 (99.2)	3.52	1.15
17) La inferencia estadística es entendida solo por gente de área científica.	124 (98.4)	3.52	1.35
18) Evito leer informaciones donde aparecen términos de inferencia estadística.	125 (99.2)	4.15	1.02
19) Los conocimientos sobre inferencia estadística ayudan a los alumnos a razonar críticamente.	125 (99.2)	3.83	0.98
20) Se debería dedicar más tiempo a enseñar inferencia estadística en los primeros niveles de educación.	125 (99.2)	3.47	1.16
21) Me preocupa saber responder preguntas de inferencia estadística de mis alumnos.	122 (96.8)	2.67	1.31
22) No me siento preparado para resolver cualquier problema de inferencia estadística.	125 (99.2)	3.06	1.24
23) Pienso que no seré capaz de preparar recursos didácticos apropiados para las clases sobre el contenido de inferencia.	125 (99.2)	3.50	1.18
24) Cuando sea pertinente, utilizaré la inferencia estadística en los otros ejes del currículo de matemática que enseñe.	124 (98.4)	3.71	0.90
25) Si pudiera eliminar alguna materia del currículo de matemática sería la inferencia estadística.	123 (97.6)	3.88	1.25
26) No tengo mucho interés en enseñar los temas de inferencia estadística, aunque aparezcan en el currículo.	126 (100)	3.85	1.21
27) No me agrada resolver problemas de inferencia estadística.	126 (100)	3.50	1.30
28) Como futuro profesor, creo que me sentiré cómodo al enseñar los contenidos de inferencia estadística.	126 (100)	3.52	0.99

Anexo 3

Conclusion

In this appendix, an English translation of Chapter 4, about the final reflections of our research are presented. Since they are grouped into a set of publications, they, therefore, constitute a more general discussion than the one presented at the end of each manuscript developed in Chapter 3. In this sense, the present Appendix is a necessary condition to accredit the international mention of this doctoral thesis.

The conclusion is organized around four sections. In the first section, a discussion is presented on the fulfilment of the Main Aim (MA), and specific Objectives (Ob) and hypotheses established in Chapter 2. While the second section synthesizes the main thesis' contributions and includes the limitations. The third section discusses the projections of our results described in Chapter 3, and also concludes some specific recommendations for initial training and professional development for teachers responsible for teaching stochastics in school. The Chapter ends with a brief summary of the discussion presented.

About the Goals and Research Hypotheses

In this section, a discussion is presented about the fulfilment of the intended goals and expectations hypothesized in Chapter 2. It begins by taking up each of the five specific Objectives (Ob) and initial Hypotheses (H) to culminate in assessing the achievement of the Main Aim (MA) of this research.

Conclusions Regarding the First Objective (Ob1) and Hypothesis (H1)

Ob1. To determine a system of didactic suitability indicators that systematizes the expected demand on didactic-stochastic knowledge in the initial training processes of Chilean mathematics teachers.

This objective was met through two studies upon which we addressed the problem of assessing instructional processes in statistics education for mathematics teachers. The first one was related to the identification of said indicators (Ruz, Molina-Portillo, & Contreras, 2019), and the second one was about their implementation in the assessment of four specific Chilean programmed instruction processes (Ruz, Molina-Portillo, & Contreras, 2020c).

On the one hand, the results of the semiotic analysis of curricular documents on stochastic teacher education were presented. These results allowed the construction of the Assessment Guide of Didactic Suitability of planned Instructional processes about Educational Statistics (AGDS-IES) (Ruz et al. al., 2019). This instrument encompasses a total of 90 indicators that are distributed asymmetrically according to the different facets of didactic suitability. It permits the evaluation of instructional processes, be them programmed or implemented, and the distinction between two dimensions of analysis.

The first dimension is organized within the epistemic facet. This dimension synthesizes the institutional knowledge about the teaching and learning of statistics that intervenes in the professional work of the pre-service teacher. Regarding teachers' future students, this dimension includes epistemological knowledge in terms of statistical, cognitive, affective, interactional, mediational, and ecological contents. The second dimension is contemplated in the remaining facets. They involve the trainer with his students (pre-service teachers) in terms of: cognitive (learning of the didactic-statistical content); affective (attitudes and motivations towards the didactic-statistical content); interactional (teacher-student and student-student interactions); mediational (use of resources in the training process); and ecological (knowledge of the trainer regarding the curriculum, the use of new technologies based on research and connections with other disciplinary areas).

On the other hand, the process for assessing the suitability of four subject programs on didactics or teaching of statistics for Chileans mathematics teachers was detailed (Ruz, Molina-Portillo, & Contreras 2020c). Through a Content Analysis, the presence or absence of each of the indicators, that make up the AGDS-IES, was identified. This allowed to highlight the points for improvement in the analysed programs. The results were classified according to the qualitative criteria of Rivas (2014) in low suitability (achievement less than 40%), medium (between 40 and 70%), and high (greater than 70%). In general, it was concluded that the analysed programs have collectively a high degree of suitability in terms of affective, mediational, and interactional aspects; however, they only reach a medium degree in the cognitive, ecological, and epistemic facets, which were the most deficient. This situation contrasts the results of Rivas (2014) in the assessment of a statistics program for Chileans teachers in which the epistemic facet was the one with the highest results (11 out of 24 satisfied indicators), but with only a medium achievement condition.

In this way, we were able to confirm our initial hypothesis about the viability of determining a collection of suitability indicators with respect to the didactic-stochastic knowledge promoted for mathematics teachers in Chile. We highlight, however, our undervaluation in the initial expectations declared in Chapter 2 about the degree of suitability

of the analysed programs. With this, we position the AGDS-IES within the family of instrument of this nature (for example, Godino 2013; Godino et al., 2013; Rivas, 2014) whose management depends on the educational actor who uses it. If we apply it to the pre-service teacher, the epistemic facet encompasses the specialized content knowledge regarding teachers' future students. Regarding the teacher educator, the other facets will allow them to guide, adapt, and develop the didactic study processes of statistics.

Conclusions Regarding the Second Objective (Ob2) and Hypothesis (H2)

Ob2. Build and validate a test on stochastics content knowledge for pre-service mathematics teachers.

To achieve this goal, several studies were developed where we describe the design and pilot implementation of a test for stochastics content knowledge pre-service mathematics teachers. One of them exemplified this process in the descriptive statistics items (Ruz, Molina-Portillo, & Contreras, 2020b). The detail on the probability items was accepted in BEIO (Ruz, Molina-Portillo, & Contreras, in press). This study along with the inference items are explained in Appendix 1.

Regarding the test construction, we followed a rigorous methodological process that encompassed various stages. First, we established the perspective of the instrument to be developed within the literature review as it is described in Chapter 1. Then, we selected from the AGDS-IES (results of Ob1) those indicators related to stochastics content knowledge. They allowed us to establish the semantic definition of the variable understanding of stochastic content pre-service Chilean mathematics teachers. On this basis, we return to the literature review to conform an items' bank that could potentially assess the identified stochastics learning specifications. After that, three items were selected per specification. We resorted to a group of experts to reinforce the content validity. Those experts assessed, with considerable strength of agreement, the relevance and clarity of the items according to the intended goals. Their assessment guided the choice of the 20 items that made up the first version of the test. Subsequently, we applied the instrument in a pilot sample that included 126 pre-service Chilean and Spanish mathematics teachers with whom we analysed some psychometric properties of each item and the complete test, and explored the knowledge declared by the participants in this stage of the thesis.

Regarding the characteristics of the instrument, the design process and experts' agreement guaranteed its content validity, as well as acceptable Cronbach' Alpha for internal consistency. In this context, we exemplify the procedure described in relation to the six

descriptive statistics items (Ruz, Molina-Portillo, & Contreras, 2020b) upon which we conclude a medium level of difficulty and an adequate discrimination strength. After grouping those items according to the Didactical-Mathematics Knowledge (DMK; Pino-Fan, Assis, & Castro, 2015) model on common and extended content knowledge, we concluded significant differences that showed lower results in the extended items (knowledge developed during the pre-service teachers training). As to the probability and inference items that are included in Appendix 1, they also reflect good properties, and for the exploration stage, the participants demonstrated greater difficulties in terms of probability, both from a common and extended knowledge perspective.

In this way, we were able to confirm our initial hypothesis regarding the feasibility of constructing a duly validated assessment test to explore stochastic content knowledge of pre-service mathematics teachers. In turn, thanks to the differentiation of content knowledge from a common and extended perspective, we support our hypothesis by observing a generally poor performance, and demonstrate previously identified errors in school students. Therefore, we identified the good properties of the developed instrument that we project to assess content knowledge for a sample of pre-service Chilean mathematics teachers.

Conclusions Regarding the Third Objective (Ob3) and Hypothesis (H3)

Ob3. Explore pre-service mathematics teachers' attitudes towards stochastics and its teaching, according to the content topics in which stochastics is organized in the Chilean school curriculum.

This objective was achieved through various studies where we tested the feasibility of the scale of Attitudes towards Probability and its Teaching (APT) to explore other content topics such as descriptive statistics and statistical inference, organized in the school curriculum. While in the first study we delve into attitudes towards descriptive statistics' topic (Ruz, Molina-Portillo, & Contreras, 2020a), in the second one, we inquired about the ones related to probability (Ruz, Molina-Portillo, Vásquez, & Contreras, 2020). The attitudes related to inference are presented in Appendix 2.

After adapting the APT scale towards the descriptive topic, we obtained the scale of Attitudes towards Descriptive Statistics and its Teaching (ADST) that we applied in the pilot sample to examine its validity and the participants' disposition (Ruz, Molina-Portillo, & Contreras, 2020a). In this regard, the internal consistency of the new version-ADST scale is more than adequate as is the theoretical structure of the seven components which resulted from an exploratory factor analysis. Additionally, we observe that the participants declare positive

attitudes both globally and with respect to the seven components considered in the scale. The mean scores were lower in the feelings of like or dislike towards the content (affective component) and higher in the value given the content and its teaching in personal and professional life.

We also applied the original version of the APT scale in the same pilot sample (Ruz, Molina-Portillo, Vásquez, et al., 2020) as we were interested to contrast the results obtained toward the other stochastic topics. In this case, we also highlight the adequate reliability of the scale. After exploring its factorial structure, the seven-factor model explains 63.67% of the total variance. The resulting factors, however, did not directly group the four items for each proposed theoretical component, but rather reflected the relationship between them. Therefore, since the sample size of this study is still moderate, we recognize the need for collecting more observations to deepen this situation. Finally, when we explored the participants' disposition, their attitude was overall positive particularly towards each considered component. Mean scores were higher than for descriptive statistics in all cases except in the self-perception of the intellectual ability towards the content (cognitive competence).

As in the previous case, finding for inference is mentioned in Appendix 2. This latter includes information on the adequate internal consistency of the scale and some statistical summary of the results on its components. Although the sense of attitudes was in general and in particular positive, the mean attitudes scores were mostly lower than those declared by participants considering probability and descriptive statistics topics.

In this way, we confirm our initial hypothesis that APT scale maintains good psychometric properties when it is used to explore attitudes towards descriptive and inferential statistics topics. In this sense, we highlight the adequate internal consistency of the scale applied to the three considered topics as well as factorial structure of seven (theoretical) components. Although the disposition of the participants, that made up the pilot sample, was generally positive as in most of the previous studies reviewed in Chapter 1, it was less positive towards statistical inference (Appendix 2). This also corresponds to the newest stochastic topic in the Chilean School curriculum.

Conclusions Regarding the Fourth Objective (Ob4) and Hypothesis (H4)

Ob4. To evaluate the attitudes towards stochastics and its teaching in a sample of future Chilean mathematics teachers.

The fulfilment of this partial goal was possible after exploring the feasibility of the APT scale (Estrada & Batanero, 2015) to be used in reference to descriptive statistics and inference

(results Ob3). With the resulting instrument, which is called Attitudes towards Stochastics Contents and its Teaching (ASCT) scale, we evaluate this construct by differentiating between three content topics, whose report is under review at IJMA (Ruz, Chance and Contreras, under review). In this manuscript, the results of the applied ASCT scale in a sample of 269 Chilean pre-service mathematics teachers were presented. The interest was to identify the main differences in the disposition of the participants towards each content-topic according to the different components of the considered attitudes and their previous training.

In global terms, we observed mostly positive attitudes towards the three content-topics. The means scores were significantly lower for statistical inference, but there were no differences between descriptive statistics and probability. Regarding the seven attitude components considered, mean scores was higher than the indifference position, in that way, maintaining that the global trend was more positive towards probability. Regarding inference, the results were closer to indifference considering cognitive and didactic competence components. Differences were identified between three stochastics topics on behavioural component (use of content in the personal or professional sphere). Regarding the value component (usefulness and relevance of stochastics and its teaching), there was no difference in pre-service teachers' disposition towards each stochastics topics. Finally, we conclude that the effect of previous training is a good predictor of attitudes towards stochastics and its teaching when is based in the successful experience of previous courses but not with the number of stochastics courses previously taken (and not necessary passed). Therefore, in those cases where past experiences with stochastics subjects have been successfully overcome, a better attitude towards stochastics contents and its teaching is generated.

In this sense, we confirm our initial hypothesis that pre-service teachers' attitudes towards each three stochastics topics and its teaching were generally positive; however, with less positive attitude for inference content. We reinforce that there are differences in the participants' disposition towards the newest stochastic topics in the Chilean school curriculum.

Conclusions Regarding the Fifth Objective (Ob5) and Hypothesis (H5)

Ob5. To assess content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching in a sample of pre-service Chilean mathematics teachers, delving into the relationship between both aspects.

This goal was achieved after the implementation of the scales developed in the previous stages. We approached it by assessing the content knowledge and attitudes towards stochastics

and its teaching in a sample of 269 pre-service Chilean mathematics teachers, whose results were accepted for publication in SERJ (Ruz, Chance, Medina and Contreras, in press).

Regarding stochastics content knowledge, the performance of participants was generally poor with slight differences according to the three content-topics (highest mean score in the descriptive statistics items, and lowest in the referred to probability). This situation is worrying. Indeed, more than 80% of the participants had passed all the stochastics courses included in their initial training, but the majority had not yet mastered the content they will have to teach (common knowledge) or the expanded knowledge of school stochastics (extended knowledge). These findings support the latest reports from the National Diagnostic Assessment of Initial Teacher Training (ENDFID from Spanish acronyms) (CPEIP, 2018, 2019) that reported worse results in stochastics and geometry areas in comparison to calculus and algebra. Furthermore, as we expected lower performance in extended knowledge, this could indicate that pre-service teachers will have difficulty broadening their perspective on the content to be taught and helping students connect topics beyond the school curriculum. Additionally, Chilean curricular guidelines are advancing to broaden learning expectations about stochastics (MINEDUC, 2019). This highlights the importance of keeping the initial teacher training programs updated.

Regarding attitudes, we used a global measure which we call attitudes towards stochastics and its teaching (defined as the mean scores for the three-stochastics topics). In this sense, as is to be expected after Ob4 conclusions, the results maintain the pattern of being positive both globally and with respect to each component of attitudes considered. Thus, it intensified more positively towards probability compared to statistical inference.

Consequently, we confirmed our initial hypothesis that the results would be very similar to those reported by Hannigan, Gill, and Leavy (2013) with a sample of pre-service Irish mathematics teacher, that is, weak content knowledge and mostly positive attitudes. The authors attributed this situation to the fact that in Ireland, stochastics training for teachers has a strong mathematical emphasis. Henceforth, their study concludes that the disposition of their participants could reflect positive attitudes towards mathematics rather than statistics. The mathematical emphasis is similar in Chile, and it is possible that we are, again, seeing pre-services teachers' attitudes towards mathematics rather than stochastics. This could also explain that the increased positive attitudes towards probability in our sample in comparison to the content topics more linked to statistics (descriptive and inferential). Furthermore, although Estrada and Batanero (2008) concluded that the main reason for the pre-service teachers' negative attitudes was due to a lack of preparation or content knowledge, our results showed the opposite. With this, it appears that more positive attitudes are not a strong predictor

of better performance, as we will discuss below in response to the main goal of this doctoral research.

Conclusions Regarding the Main Aim (MA) and Research Problem

MA. Analyse the relationship between content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching in pre-service Chilean mathematics teachers.

Regarding the exploration of stochastics content knowledge and attitudes' association, we use the global scores obtained on each scale, whose correlation was positive and weak (0.239) as in previous research (Chapter 1). The intensity of this association was also low for all of the attitudes' components, but less conclusive in behavioural terms towards teaching stochastics (0.075) and value (0.081). In turn, when correlating the scores in both knowledge and attitudes' items towards each stochastics topic, the intensity varied according to each case. Considering descriptive statistics, although also positive and weak, the association was more intensely towards teaching this topic; that is, the participants declared positive attitudes even with little knowledge. For probability, the correlations were the weakest, and even negative. The observed cases, that had better knowledge performance, held attitudes below the average score (although still positive). This situation could be due to the interaction between two observed situations: the floor effect caused by the low performance in knowledge items, and the ceiling effect that resulted from the large positivity of attitudes towards probability. For statistical inference, the correlations were again generally positive and weak, and slightly more intense than for descriptive statistics. That is, participants with the best performance on the knowledge items tended to be more willing to learn and teach this content because attitudes towards inference were also less positive. In the value component, however, the association was not conclusive for any of the three stochastics topics considered. Most of our pre-service teachers tended to highly value the learning and teaching of stochastics even with a weakest understanding of the subject.

In this way, we were able to face the central problem of this research: pre-service mathematics teachers do not master stochastics knowledge, and do not feel prepared to teaching stochastics in school. In this regard, we concluded that this relationship is unclear, as with our participants who demonstrated poor knowledge performance and positive attitudes towards stochastics and its teaching. Beyond the content knowledge difficulties, we highlight the good attitude of our pre-service teachers to strengthen their content deficiencies.

Therefore, we consider that the stochastic training of mathematics teachers should represent in itself a sequencing of good content teaching practices in which the integrated study

of stochastics and its teaching can be approached. In this context, we dedicated the following section to present a synthesis of the main research contributions and limitations.

Research Contributions and Limitations

In this section, the main contributions and limitations, that were identified in the different stages developed in this research, are presented.

Contributions

From the analysis of curricular guidelines for stochastics education of teachers (Ob1), a reference framework has been established on the teacher's didactic-stochastic knowledge. In this sense, it is possible to identify aspects that need to be strengthened in the initial training and professional development processes for mathematics teachers. Although the documents consulted were specific to Chile and the United States of America, we believe that the details presented in the first paper of Chapter 3 (Ruz et al., 2019) will allow other researchers to consult their local guidelines, and complement them with these results (allowing its use in other latitudes).

In addition, the systematization of these recommendations as indicators, allows the Assessment Guide of Didactic Suitability of planned Instructional processes about Educational Statistics (AGDS-IES) to answer the question: how suitable are the currently instructional processes in didactics of statistics for pre-service mathematics teachers? With this, we highlight the AGDS-IES as a valuable tool to assess the relevance and adequacy of current training process, and identify aspects that would improve them to reach optimal levels. Thus, we project the AGDS-IES guide as a valuable input both for teacher educators and for those who have the responsibility to design the stochastics education process of teachers.

In terms of the assessment studies, we have provided instruments to approach to the content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching in pre-service mathematics teachers. First, concerning stochastics content knowledge, we based on the mathematical dimension of the DMK model, and built the instrument from the use or adaptation of items designed in previous research. Validity and reliability of this scale were discussed in a pilot sample (Ruz, Molina-Portillo, & Contreras, 2020b). Therefore, after its implementation in our full sample of pre-service Chilean mathematics teachers (Ruz, Chance, Medina, et al., in press; Ruz and Contreras, 2020), we confirm previous findings and provide original results due to some items' changes or its previous use in different populations.

Second, regarding attitudes, we adapt and verify psychometric properties of the Attitudes towards Probability and its Teaching (APT) scale to be used towards other stochastics topics (Ruz, Molina-Portillo, and Contreras, 2020a; Ruz, Molina-Portillo, Vásquez, et al., 2020). In this way, with the instrument developed, it is possible to assess teachers' attitudes towards the different content topics and its teaching that make up the school stochastics curriculum. Additionally, after its implementation in our full sample of pre-service Chilean mathematics teachers, we added evidence of mainly positive attitudes towards the three topics considered (Ruz, Chance, and Contreras, under review), confirming the trend of the research previously reviewed in Chapter 1.

Finally, with the results of the assessment papers, we contribute with the exploration of the relationship between the content knowledge and attitudes in pre-service teachers, concluding that the association between both aspects is generally positive and weak. The intensity was greater in the group of participants with only one stochastic subject in their initial training, and smaller when considering probability. We recognize, however, the need to deepen in these results from another perspective as we will delve into below in the limitations of this research.

Limitations

Regarding the analysis of the Chilean stochastics teachers' education curriculum, we assume that one of the limitations was to implement the AGDS-IES in programmed courses only on the teaching of stochastics. This was due to the fact that in the perspective assumed in the EOS on the DMK model, the teaching stochastics must be promoted simultaneously with aspects related to its didactics. In this sense, for example, some of the indicators assigned as dissatisfied in the epistemic facet of AGDS-IES, the one with the lowest percentage of achievement in the programs analysed (Ruz, Contreras, Molina-Portillo, and Godino, 2018; Ruz, Molina-Portillo and Contreras, 2020c) could be covered in courses aimed at stochastics.

Regarding the assessment studies, we recognize that the main limitation was to choose mostly quantitative approaches, which were sufficient for the intended goals in this research. We believe that opting for a mixed approach could have complemented the conclusions. In addition, we assume a limitation in the analysed samples (curricular guidelines, courses plans, and pre-service mathematics teachers) which were selected according to the disposition of the training institution that participated in this research. In this sense, from a qualitative perspective, with the use of interviews and open-response questions, it would be possible to explore more deeply the reasoning and disposition of some cases of interest such as participants

with good performance and a more indifferent attitude. For this reason, we recognize the limited nature of our research, but we value our results to project future research.

Research Projections

Based on the findings of the last stage of the research, where the subjects with greater knowledge of the content tended to manifest more positive attitudes towards stochastics and its teaching, but not the other way around, we project some future lines of research in the form of suggestions for the mathematics teachers' initial training and professional development programs.

On the one hand, we highlight the need for strengthening the link between the teachers' disciplinary and didactic training. For this, we motivate the promotion of the integrated study of stochastics and its teaching in these professionals. This supports what was concluded by Godino et al. (2013) on mathematical training in general. From this perspective, we plan to face the problem that stochastics courses for teachers are usually mathematized. In these cases, the importance of aspects such as context and variability are losing, reflecting that a solid mathematical training does not necessarily translate into an adequate domain of stochastics. Thus, in this joint approach to stochastics and its teaching, the curriculum should be organized according to the stochastics problem-solving process as the empirical research cycle (Franklin et al., 2007; Wild and Pfannkuch, 1999) and the probabilistic modelling cycle [SWAMTU] (Pfannkuch et al., 2016). The latter is vitally important from the performance shown by the participants in this research who had more difficulties with probability and inference.

Therefore, we consider it essential that stochastics education for teachers includes a balanced view of probability both mathematically (symbolic structure and theory) and empirically (through simulation). With this, we think that the mastery of central ideas such as randomness and conditioning, which were conflicting for our participants, can be improved. Another option could be an approach to statistical inference based on resampling methods where simulations are used to introduce sample variation and reasoning for statistical estimation intuitively and informally. Some examples that have systematized these ideas into complete curricula are Lock, Frazer Lock, Lock Morgan, Lock and Lock (2017) and Tintle et al. (2016) which we project as the basis for continuing and reinforcing the efforts developed in probability and inference education for teachers, the least frequent topics in the literature as we review in Chapter 1.

In this sense, considering the case of Chile, we recognize that in all mathematics teacher training institutions at least one stochastic course is programmed, but only a third of them (10

out of 30) consider a course related to their teaching (Ruz, Molina-Portillo and Contreras, 2020c). Given this difference and optimizing the available time, we highlight as feasible the possibility of promoting an integral perspective in the development of stochastic professional knowledge for mathematics teachers. In this way, pre-service teachers would experience good stochastic teaching practices as part of their initial training, and would also serve as an example of how to develop stochastic reasoning with their future students later. Furthermore, in this new paradigm, priority must be given to the use of real data to develop an understanding of the central ideas of stochastic; detect the main characteristics that differentiate stochastic from mathematics; reflect on good practice in teaching stochastic, including identifying students' common misunderstandings and mistakes; develop new assessment methodologies such as the use of projects; and promote the use and mastery of technological resources to introduce simulation and streamline calculation procedures (Ruz, Díaz-Levicoy, Molina-Portillo, & Ruiz-Reyes, 2018).

On the other hand, as pre-service teachers, the participants, that made up the full sample of this research, represented a substantial number of professionals who will soon teach stochastic in Chilean schools. Most of them will not take additional content-focused courses (having all passed during their initial training). Therefore, we cannot expect their improved knowledge and positive attitudes to remain positive without access to professional development programs. In this sense, as reviewed in Chapter 1 on the different theoretical perspectives that have characterized the stochastic professional knowledge for teachers, we highlight the approach developed by Ponte and collaborators (Henriques and Ponte, 2014; Ponte, 2011; Ponte and Noll, 2018). From this perspective, and in the same line with our previous projections, Ponte and Noll (2018) ensure that professional development courses are more effective when they focus on creating learning environments that trainers would like teachers to develop in their classrooms. For this reason, we agree with Ponte that such instances should place the notion of statistical research at the centre in accordance with the stochastic problem-solving cycles mentioned above.

Finally, regarding the attitudes' results, we project the possibility of implementing the scale ASCT in a larger sample with which it would be possible to deepen its theoretical structure. Additionally, based on the background reviewed in Chapter 1, we project the dissemination of the results on the content knowledge demonstrated by the participants of our full sample of which we have partially reported some aspects (Ruz, Chance, Medina, et al., in press; Ruz and Contreras, 2020), however, there are still others to delve into.

Chapter Summary

In this chapter, the main conclusions of this research have been detailed. We begin with a discussion where the results obtained according to the initial objectives and hypotheses were contrasted. Next, we identify some of the most relevant contributions and limitations. On this basis, future research lines were proposed in the form of suggestions for initial training and professional development programs related to stochastics and its teaching.

Initially, we positively value the fulfilment of the five specific objectives raised above thanks to the various studies described in Chapter 3. With this, we were able to face the main problem of this research and get closer to the main aim of this thesis: analysing the relationship between content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching in pre-service Chilean mathematics teachers. In this regard, we conclude the lack of clarity of this relationship in our participants who demonstrated a low performance in the content knowledge items, but had a mostly positive disposition towards stochastics and its teaching. In other words, beyond their issues of mastering stochastics, we highlight the good attitude our pre-service teachers to strengthen their difficulties with stochastics and its teaching.

Next, we highlight the instruments developed as our main field contribution. The first one that synthesizes local and international accepted guidelines for stochastic education of teachers. The second one advocates the assessment content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching in pre-service mathematics teachers. In addition, we value as a contribution the findings in the assessment of specific instructional processes (on the programming of teaching statistics courses in Chile) and in different sample of pre-service mathematics teachers.

We assume that the main research limitations were the use of quantitative methodological approaches in most of the studies developed. Also, in the application of the AGDS-IES guide, which resulted from the curricular analysis, only in planned courses about teaching stochastics and not the ones centred in content. In this way, we recognize the diagnostic and limited nature of this research, and we value our results for planning future research lines.

In this regard, we specifically suggest that Chilean universities update their initial stochastics training programs by including more recent recommendations to better prepare pre-service mathematics teachers. In these approaches, the content covered is very similar to a traditional course, but in its application, the use of genuine contexts and applications is suggested whose main goal is the development of active learning based on exploration. From our perspective, this update should ideally stop differentiating between subjects focused on

stochastics and others in their teaching, and integrate and promote both aspects simultaneously. At the same time, affective aspects should be considered. This can be developed by learning from teaching practice, deeply exploring stochastic content, and using technological environments for teaching. For this reason, exemplifying the case of Chile, the training institutions, the CPEIP, or the school themselves, must offer professional development opportunities to in-service teachers free of charge, especially in stochastics, during at least the first two years of practice. Thus, we believe that offering these instances after teachers have experienced the particularities of professional practice can potentially be more effective. Following these suggestions in future research, we project that, in a not distant period, mathematics teachers will be able to satisfactorily teach stochastics in school.

Anexo 4

Extended Abstract

In this research, the stochastic training of pre-service Chilean mathematics teachers (for grades 7 to 12) has been studied by focusing mainly on some problems related to the content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching. The term stochastics is used to refer simultaneously to statistics and probability, and, thus, emphasize their mutual dependence so that to avoid overloading in the text. In this way, the present doctoral thesis is organized around four chapters that encompass the rationale, methodology, findings, and conclusions. It concludes with the references and appendices chapters.

In Chapter 1, *Rationale*, we approach the research problem and summarize the main backgrounds of the adopted theoretical perspective. Initially, the interest of research is justified by highlighting stochastics as a cultural component necessary to face the challenges of the current era. This situation has driven a reformist movement around the teaching of stochastics in school. In this regard, some cases of interest for this research are exemplified where stochastic learning is promoted throughout the whole mathematics school curriculum. These countries represent the academic internships behind the international mention to which this thesis accedes (U.S. and Germany), the sponsoring university (Spain), and the context of the research (Chile). In this context, mathematics teachers are identified as primarily responsible for implementing the new reforms; and the initial training process is highlighted as a key instance for promoting the ability to teach stochastics in this new landscape. We end the approach to the research problem with a brief description of the mathematics teachers training in Chile.

As for the literature review, we begin by presenting the main theoretical perspectives on the professional knowledge of mathematics teacher in order to support the approaches developed in the field of stochastic education that we reviewed later. As a result, we identified various components of the knowledge needed to teach stochastics mentioned in the literature, where content knowledge is a cross-sectionally valued aspect in all cases. This situation motivated us to focus on this aspect, so we assigned the background section to review the main research on the stochastics content knowledge of teachers. Furthermore, from a pragmatic perspective of knowledge, we consider the attitudes as an aspect of the affective domain. Therefore, we also include a review of those studies interested on teachers attitudes towards

stochastics and its teaching, as well as the ones focused on the relationship between both aspects in these subjects.

Regarding content knowledge, we organize stochastics topics according to their consideration within the seven key notions for the mastery of this topic in teachers: data, variation, distribution, representation, association and bivariate modelling, probability, sampling, and inference. We observed that the research has mainly focused on early childhood and primary education pre-service teachers which are scarce in mathematics teachers for higher grades. Usually, stochastics knowledge has been studied segmentally on specific topics. Among these topics, the exploratory data analysis, that concentrates mainly on the notions of variation, distribution, and graphs, is the most frequently covered one. Research focus on inference and probability topics has been less considered. Beyond the topic, however, in all cases, it is concluded the need to strengthen the stochastic training of teachers who often reproduce the same mistakes and difficulties than school students.

Regarding teachers' attitudes towards stochastics, research in this direction is scarce. For assessing this construct, some of the classical instruments designed for any statistics' students have usually been used. Besides, a new one has been proposed often by adapting classical ones which also consider attitudes towards teaching statistics. In this regard, we identify the tendency to report positive attitudes towards statistics; although this becomes more negative in some of the theoretical components. Concerning the relationship between knowledge and attitudes, most findings have been inconclusive. Previous research highlights that good content knowledge is strongly and positively related to positive attitudes towards statistics. The association, however, loses its intensity when the content knowledge is moderate and the attitudes are more indifferent, or when the knowledge is deficient and the attitudes have been mostly positive in teachers.

In Chapter 2, we detail methodological aspects, that guided and organized this doctoral thesis, and which are represented in a group of publications. It begins with the theoretical framework which was constructed from the review carried out in the previous chapter. Then, it formalizes the main research problem concerning the relationship between content knowledge and attitudes in mathematics teachers. As a result, the Main Aim (MA) of *analysing the relationship between content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching in pre-service Chilean mathematics teachers is established*. For the pursuit of this global goal, five Specific Objectives (Ob) were proposed, and accompanied by their respective initial research Hypotheses (H).

The first Objective (Ob1) was to determine a system of indicators with the expected demands on didactic-stochastic knowledge in the initial training processes of Chilean

mathematics teachers. To achieve this goal, we carried out two studies which tried to respond to two questions: What are the locally and internationally promoted recommendations on stochastics education for mathematics teachers? How suitable are some specific cases of stochastic training for pre-service Chilean mathematics teachers? Framed in Didactic Suitability Theory (Godino, 2013), the answer to the first question is systematized in Ruz, Molina-Portillo and Contreras (2019) (paper in *Bolema*). As for the second question, its answer is highlighted in Ruz, Molina-Portillo, and Contreras (2020c) (paper in *PNA*) in which we evaluated four programmed courses about didactics of statistics for pre-service mathematics teachers in Chile.

The second Objective (Ob2) was to build and validate a test to approach to the stochastics content knowledge of pre-service Chilean mathematics teachers. In this regard, we report the design process and pilot implementation of a test on stochastic content knowledge that we publish by parts because of its extent. One of them exemplifies the process with the descriptive statistics items (paper in *AIEM*) (Ruz, Molina-Portillo, & Contreras, 2020b). The one related to probability (Ruz, Molina-Portillo and Contreras, in press in *BEIO*) and inference is detailed in Appendix 1. In both cases, a pilot sample of 126 pre-service mathematics teachers (Spanish and Chilean) was used to assess some psychometric properties of the items, and validate the test.

The third Objective (Ob3) was to explore the attitudes towards stochastic and its teaching in pre-service mathematics teachers according to their organization in the Chilean school curriculum. To do so, the Attitude towards Probability and its Teaching (ATP) scale of Estrada and Batanero (2015) was adapted for other stochastics topics with more statistics nature. In this context, we applied the ATP scale in the pilot sample for descriptive statistics (paper in *CP*) (Ruz, Molina-Portillo, & Contreras, 2020a) and statistical inference (Appendix 2) to compare them with those obtained with the original version (paper in *AS*) (Ruz, Molina-Portillo, Vásquez, et al., 2020). Following a quantitative methodology and according to each topic, we report information on the validity of the scale and the sense, positive or negative, of the attitudes declared by the participants.

The fourth Objective (Ob4) was to assess the attitudes towards stochastics and its teaching in a sample of pre-service Chilean mathematics teachers. After testing the good characteristics of the APT scale to be used in other stochastic content topics, the resulting scale was applied in our full sample of 296 pre-service Chilean mathematics teachers. From this way, we organized, through a quantitative methodology, the stochastic contents in descriptive statistics, probability, and inference to explore the main differences on the different attitudes'

components considered (paper under review in IJMA) (Ruz, Chance and Contreras, under review).

Finally, the fifth Objective (Ob5) was to evaluate the content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching in a sample of pre-service Chilean mathematics teachers, deepening the relationship between both aspects. This partial objective was built on previous goals which allowed the development of a test on content knowledge and attitudes towards stochastics. Therefore, in this case, we were interested in assessing both aspects and analysing their association in a sample of 296 pre-service Chilean mathematics teachers (paper in SERJ) (Ruz, Chance, Medina and Contreras, in press).

In Chapter 3, we include the *findings* of this doctoral thesis, which considers the articulation of seven manuscripts (five published, one in press, and one under review). In this context, we present, in what follows, a brief summary of each of them based on the abstracts included in the original reports.

Boletim de Educação Matemática. Bolema (Ruz et al., 2019): In order to recognize the important role of teachers in the discipline's teaching and learning processes, we confront, in this article, the problem of evaluating the teaching planning in statistics didactics. For this, we describe the construction process of a guide that values its suitability according to a collection of indicators inferred through the content analysis technique of international consensus documents that guide this formative stage. As a consequence, the resulting guide is organized into two analysis dimensions. The first dimension allows us to characterize the didactic-mathematical knowledge of the future teacher according to the institutional learning expectations of its students (epistemic facet). The second one considers the trainer responsibilities with teachers in training (remaining facets). We hope that this instrument is a valuable input for both trainers and those who have the task of designing or evaluating teaching planning for future teachers.

PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática (Ruz et al., 2020c): In this work, we present the results of the implementation of the "Assessment Guide of Didactic Suitability of planned Instructional processes about Educational Statistics" (AGDS-IES) in four Chilean training programs of teaching statistics for mathematics teachers. Following a qualitative methodology and a content analysis, the presence or absence of each of the indicators that compose the AGDS-IES was identified, within the framework of the Didactic Suitability Theory. The results are organized in such a way as to suggest and detect points of improvement in the documents analysed and a global measure is proposed on the degree of didactic suitability reached in these training programs. It is concluded that the programs have

a high degree of suitability for the affective, interactional, and mediational facets, but only with a medium degree in the epistemic, cognitive, and ecological facets.

Avances de Investigación en Educación Matemática (Ruz et al., 2020b): In this work, we present the process of construction and pilot implementation of an instrument to evaluate the knowledge about stochastic of prospective mathematics teachers in relation to Descriptive Statistics Content. The pilot tests were carried out in a sample of 126 prospective mathematics teachers from Spain and Chile. The results are organized starting with some indicators on the psychometric properties of the items analysed and the overall results of the questionnaire. Subsequently, we jointly study the items that make up each category of knowledge of the content considered, between common or expanded, looking for differences between the groups that make up the sample. It is concluded that the instrument has acceptable characteristics, as well as the items analysed and its reformed application is projected in the future. Regarding probabilities (Ruz et al., in press in BEIO) and statistical inference items' results, was included in Appendix 1; whose results were more deficient in probability items, although very low than expected in both topics.

Cadernos de Pesquisa (Ruz et al., 2020a): In this paper, we examine the attitudes towards descriptive statistics and its teaching in a sample of 126 prospective mathematics teachers from Spain and Chile. Following a quantitative methodology, we delved into analysing the attitudes' sense declared by the participants (negative or positive). Among the results, we begin by referring to the validity of the scale. Next, we explored the disposition of the sample towards the different attitudes' components. Finally, we identified the main differences according to the country of participants. We concluded that the participants declare positive attitudes towards Descriptive Statistics and its teaching, which are more positive towards didactic action in Chilean subjects.

Acta Scientiae. AS (Ruz, Molina-Portillo, Vásquez, et al., 2020): Background: Promoting a positive attitude towards teaching statistics and probability has become a shared challenge for teachers' training today. Objectives: In this study, we examined the validity and reliability of Attitudes' Scale towards Probability and its Teaching (ASPT) given by Estrada, Batanero, and Díaz (2018). Design: Following a quantitative methodology. Setting and Participants: The attitudes of a purposive sample of 126 prospective Chilean and Spanish mathematics teachers were analysed using ASPT scale. Data collection and analysis: through an Exploratory Factor Analysis. Results were organized into two parts. While the first part focused on the psychometric characteristics of the scale, the second one emphasized on specific attitudes of the sample. Conclusions: The findings revealed a positive attitude towards the scale. It was viewed ASPT to be an instrument with good characteristics to explore attitudinal

aspects of teachers. The results of the scale towards inference were also good, although less positive than towards the previous contents (Appendix 2).

International Journal of Science and Mathematics Education. IJMA (Ruz, Chance y Contreras, under review): Promoting a positive attitude toward Stochastics, and toward the teaching of Stochastics by pre-service teachers, has become a core goal of statistics education reform. Building on previous work assessing attitudes of pre-service teachers, we focus on how those attitudes vary across different dimensions, and how these patterns can inform teacher preparation programs. We present results from assessing attitudes towards Stochastics and its teaching for a sample of 269 pre-service Chilean mathematics teachers across three topics: descriptive statistics, probability, and statistical inference. Using a quantitative approach, and consider attitudes towards content and pedagogy, we focus on describing the main attitudinal differences among the three areas. In general, we found positive attitude towards the content and their teaching in all three areas, but with differences among them, primarily in the area of statistical inference. We end with some proposals aimed at improving teacher preparation, focusing on helping pre-service teachers understand the utility and overarching process of statistical investigations.

Statistics Education Research Journal. SERJ (Ruz, Chance, Medina y Contreras, in press): Recognizing that mathematics teachers are facing increasing demands in the teaching of Probability and Statistics (Stochastics) at the school level, we are interested in analysing current pre-service teachers' dispositions about content knowledge and attitudes towards the teaching and learning of stochastics. We implemented a quantitative study for a sample of 269 pre-service Chilean mathematics teachers to determine their understanding of stochastics content, and attitudes towards stochastics and its teaching, and see if they are related. We found weak associations overall, but larger for some components. We concluded recommendations based on these results that would improve the Chilean teachers' preparation process (pre-service) and pieces of advice that could guide the professional development of teachers (in-service).

Chapter 4 details the main *conclusions* of this research. We start by comparing the empirical results with the initial goals and research hypotheses. Next, we identify some of the most relevant contributions and limitations of our whole research. On this basis, we value positively the fulfilment of the five objectives initially set based on various studies described in Chapter 3. With this, we have had an approach to analyse the relationship between content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching in pre-service Chilean mathematics teachers (main aim). In this regard, we concluded the lack of clarity of this relationship. In effect, our participants showed poor performance in the content knowledge

items, but declared a mostly positive attitudes towards stochastics and its teaching. That is, beyond their cognitive deficiencies with stochastics, we highlight the good attitude of these pre-service teachers to strengthen their difficulties with stochastics and its teaching.

Subsequently, we highlight the instruments developed as our main field contribution. The first one synthesizes the curricular guidelines for the stochastic education of pre-service mathematics teachers. The second is an approach to assess the content knowledge and attitudes towards stochastics and its teaching in mathematics teachers. In turn, we value the implementation of these instrument in different samples as concrete planned courses (Ob1) and pre-service mathematics teachers (Ob2-3 and Ob4-5). On the other hand, we assume that the use of quantitative methodologies in most of the developed studies was the main research limitation. We recognize that a qualitative approach would have allowed us to deepen our findings. In this way, we admit the diagnostic and limited nature of this research, and value the results obtained to propose future research guidelines.

In this regard, we specifically suggest that Chilean universities update their stochastics training programs by including more recent recommendations to better prepare pre-service mathematics teachers in stochastics. In these approaches, the content covered is very similar to a traditional course, but its implementation suggests the use of genuine contexts and applications for the development of active exploration-based learning. From our perspective, this update should ideally stop differentiating between subjects focused on stochastics and others in its teaching, and integrate and promote both aspects simultaneously. At the same time, affective aspects should be considered, which can be developed by learning from teaching practice, deeply exploring stochastic contents, and using technological environments for teaching. For this reason, training institutions, the CPEIP (for Chile), or the school themselves, should offer professional development opportunities for teachers free of charge, especially in stochastics, for at least the first two years of practice. Following these suggestions, we project that mathematics teachers will be able, shortly, to teach stochastics in school sufficiently.